

Stąd

$$\text{rot } \bar{v} = \bar{i} \text{ rot}_x \bar{v} + \bar{j} \text{ rot}_y \bar{v} + \bar{k} \text{ rot}_z \bar{v} = 2(\bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z) = 2\bar{\omega}.$$

A więc rotacja wektora prędkości \bar{v} równa jest podwójnej prędkości kątowej chwilowego obrotu $\bar{\omega}$ elementu płynu.

3.7.3. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI. TWIERDZENIE HELMHOLTZA

Natężenie strugi wirowej I wyraża się jako podwójny iloczyn prędkości kątowej ω pomnożonej przez przekrój strumienia

$$I = 2 \int_F \omega dF. \quad (3.31)$$

Natężenie strugi wirowej w cieczy doskonałej według twierdzenia Helmholtza zachowuje niezmienną wartość wzdłuż całej strugi wirowej.

Aby uzasadnić powyższe twierdzenie określimy divergencję wektora prędkości kątowej ω :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} \right).$$

Dodając te wyrażenia stronami otrzymamy

$$\text{div } \bar{\omega} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0.$$

Jest to równanie ciągłości ruchu wirowego. Analogicznie do prawa ciągłości w ruchu postępowym, w którym wydatek wzdłuż strugi elementarnej jest wielkością stałą i wyraża się zależnością

$$v dF = v_1 dF_1 = v_2 dF_2 = \text{const},$$

w ruchu wirowym istnieje warunek

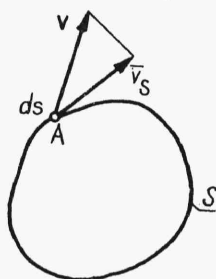
$$\omega dF = \omega_1 dF_1 = \omega_2 dF_2 = \text{const.}$$

A zatem, iloczyn prędkości kątowej przez przekrój strugi wirowej jest wielkością stałą. Z warunku tego wynika, że natężenie strugi wirowej wzdłuż całej jej długości jest stałe

$$\Gamma = 2 \int_{\Gamma} \omega dF = \text{const.}$$

3.7.4. CYRKULACJA PRĘDKOŚCI

Rozważmy dowolną linię zamkniętą (rys.3.24). Prędkość \vec{v}_s jest rzutem wektora prędkości \vec{v} elementu na styczną do konturu w punkcie A.



Rys.3.24

Cyrkulacją prędkości nazywamy całkę liniową po konturze zamkniętym S z iloczynu prędkości stycznej do konturu v_s i elementu drogi ds. A więc

$$\Gamma = \oint_S v_s ds = \oint_S (v_x dx + v_y dy + v_z dz). \quad (3.32)$$

Na podstawie tej zależności można wykazać, że cyrkulacja prędkości w ruchu niewirowym (potencjalnym) jest równa zero.

Jak wiadomo funkcja podcałkowa w równaniu (3.32) stanowi różniczkę zupełną potencjału prędkości

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz,$$

czyli

$$\Gamma = \oint_S d\varphi = \int_A^A d\varphi = \varphi_A - \varphi_A = 0. \quad (3.33)$$

Wynika stąd wniosek, że cyrkulacja prędkości istnieje tylko w ruchu wirowym.