

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = 2 \theta_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

czyli

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right).$$

Analogicznie:

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.4.3. PRĘDKOŚCI KĄTOWE CHWILOWEGO OBROTU ELEMENTU

Oprócz odkształcenia elementu obserwujemy na rys.3.8 obrót prostokąta ABCD dokoła osi x prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Miarą obrotu elementu na płaszczyźnie zOy jest kąt obrotu przekątnej

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} (d\alpha - d\beta).$$

Podstawiając w tej zależności:

$$d\alpha = \frac{\partial v_z}{\partial y} dt \quad \text{ i } \quad d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial z} dt$$

otrzymamy prędkość kątową obrotu elementu dokoła osi x

$$\omega_x = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\alpha - d\beta}{2 dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right).$$

Przez cykliczne przestawienie indeksów otrzymamy składowe prędkości kątovej chwilowego obrotu elementu płynu w otoczeniu punktu A:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Wektor prędkości kątowej chwilowego obrotu elementu płynu określający ruch wirowy można przedstawić w postaci

$$\bar{\omega} = \bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z.$$

Po podstawieniu zależności (3.8) i (3.9) do układu równań (3.7) otrzymamy składowe prędkości punktu M:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{x_A} + \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \theta_y dz + \theta_z dy \right] + (\omega_y dz - \omega_z dy), \\ v_y &= v_{y_A} + \left[\frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \theta_z dx + \theta_x dz \right] + (\omega_z dx - \omega_x dz), \\ v_z &= v_{z_A} + \left[\frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \theta_x dy + \theta_y dx \right] + (\omega_x dy - \omega_y dx).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Są to równania Cauchy'ego-Helmholtza, wyrażające bardzo istotny mechanizm ruchu płynu, a mianowicie: wektor prędkości przemieszczenia dowolnego punktu płynu składa się w ogólnym przypadku z trzech prędkości: postępowej $v_{x_A}, v_{y_A}, v_{z_A}$, odkształcenia (wyrazy w nawiasie kwadratowym) i obrotowej (wyrazy w nawiasie okrągłym).