

a stąd

$$\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} = - \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \theta.$$

tzn. że θ jest prędkością rozszerzania się jednostki objętości i w związku z tym nazywa się ją współczynnikiem rozszerzalności objętościowej, oczywiście dla płynu nieściśliwego $\theta = 0$.

Przy wyprowadzeniu równania ciągłości nie czyniliśmy żadnych ograniczeń dotyczących lepkości lub braku lepkości płynu. Równanie ciągłości w podanej powyżej postaci jest słuszne zarówno dla płynów nielepkich jak i lepkich.

3.4. POLA PRĘDKOŚCI POSTĘPOWEJ, ODKSZTAŁCENIA I OBROTU ELEMENTÓW PŁYNU. RÓWNANIE CAUCHY'EGO-HELMHOLTZA

3.4.1. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ CAUCHY'EGO-HELMHOLTZA

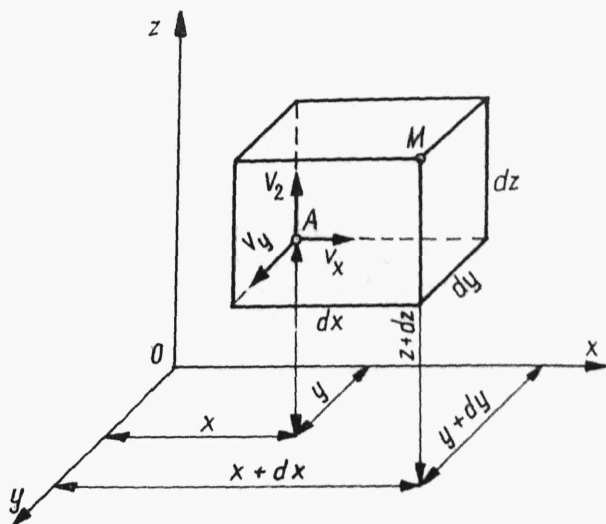
Twierdzenie Cauchy'ego-Helmholtza można sformułować w sposób następujący. Elementarny ruch dowolnego elementu płynu złożony jest z trzech składników: przesunięcia postępowego, odkształcenia i chwilowego obrotu.

Jeżeli oznaczmy prędkość w punkcie A obranym jako biegun przez \bar{v}_A , to wektor prędkości punktu M znajdującego się w nieskończenie małej odległości od bieguna A można przedstawić w postaci geometrycznej sumy trzech wektorów: \bar{v}_A - prędkości postępowej bieguna A, \bar{v}_1 - prędkości odkształcenia oraz \bar{v}_2 - prędkości obrotu względem chwilowej osi przechodzącej przez biegun A. A więc prędkość w punkcie M będzie równa

$$\bar{v} = \bar{v}_A + \bar{v}_1 + \bar{v}_2.$$

Dla uzasadnienia tego twierdzenia rozważmy w obszarze przepływu elementarny prostopadłościan o krawędziach dx, dy, dz (rys.3.7). Oznaczmy składowe wektora prędkości \bar{v} w punkcie $A(x, y, z)$ przez v_x, v_y, v_z . Wektor prędkości \bar{v} w punkcie $M(x + dx, y + dy, z + dz)$ znajdującym się w ciągłym obszarze przepływu będzie równy wektorowi prędkości \bar{v}_A w punkcie $A(x, y, z)$ powiększonemu o różniczkę zupełną wektora $d\bar{v}$, zatem

$$\bar{v} = \bar{v}_A + d\bar{v}.$$



Rys.3.7

Składowe prędkości w punkcie M będą równe:

$$v_x = v_{x_A} + dv_x = v_{x_A} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz,$$

$$v_y = v_{y_A} + dv_y = v_{y_A} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz,$$

$$v_z = v_{z_A} + dv_z = v_{z_A} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz.$$

Z powyższych równań wynika, że w ogólnym przypadku ruchu prędkości poszczególnych punktów elementu płynu są różne, wskutek czego nastąpi odkształcenie samego elementu.

Aby powyższe równania doprowadzić do odpowiedniej postaci, dodamy i odejmiemy kolejno do prawych stron tych równań następujące wielkości:

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dy,$$

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial y} dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} dx,$$

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} dy \pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial z} dx.$$

Po przekształceniu otrzymamy składowe prędkości punktu M:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x_A} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy \\ v_y &= v_{y_A} + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dz + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dz, \\ v_z &= v_{z_A} + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wyrazy $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} dy$, $\frac{\partial v_z}{\partial z} dz$ przedstawiają wydłużenie lub skrócenie boków i stanowią prędkości odkształceń liniowych wzdłuż osi współrzędnych.

Interpretację fizyczną pozostałych wyrazów w równaniach (3.7) podajemy poniżej.