

Równanie to napiszemy w postaci różniczkowej

$$\frac{dh}{ds} = \frac{dH}{ds} - i. \quad (13.11)$$

Stąd spadek zwierciadła cieczy

$$I = i - \frac{dH}{ds}.$$

Podstawiając zależność (13.11) do równania (13.10), otrzymamy przy spadku dna $i > 0$.

$$Q = kF \left(i - \frac{dH}{ds} \right). \quad (13.12)$$

Jest to równanie nierównomiernej filtracji o swobodnym zwierciadle w tzw. korytach gruntowych ograniczonych od dołu podłożem nieprzepuszczalnym (rys.13.7).

Przekrój poprzeczny koryta gruntowego zależy przede wszystkim od głębokości strumienia, a więc $F = f(H)$.

Jeżeli dno gruntowego koryta jest poziome, to podstawiając do równania (13.12) $i = 0$, otrzymamy

$$Q = -k F \frac{dH}{ds}. \quad (13.13)$$

W przypadku ujemnego spadku dna gruntowego koryta $i < 0$, przyjmując bezwzględną wartość spadku i' , otrzymamy z równania (13.12)

$$Q = -k F \left(i' + \frac{dH}{ds} \right). \quad (13.14)$$

13.8. CAŁKOWANIE RÓWNAŃ NIERÓWNOMIERNEJ FILTRACJI

Równanie nierównomiernej filtracji w korytach gruntowych można scałkować wówczas, gdy znana jest zależność $F = f(H)$.

Rozważmy najczęściej spotykane w obliczeniach filtracyjnych (w hydrogeologii i hydrotechnice) koryta gruntowe o przekroju prostokątnym, którego pole jest równe

$$F = b H , \quad (13.15)$$

gdzie b - szerokość koryta gruntowego.

Oznaczmy przez $q = \frac{Q}{b}$ wydatek filtracyjny przypadający na jednostkę szerokości gruntowego koryta.

Rozpatrzmy teraz nierównomierną filtrację w prostokątnych korytach gruntowych dla 3 przykładów:

- 1) $i > 0$;
- 2) $i = 0$;
- 3) $i < 0$.

1. W przypadku dodatniego spadku dna $i > 0$ koryta gruntowego równanie (13.12) przy uwzględnieniu zależności (13.15) napiszemy w postaci

$$\frac{Q}{b} = q = k H \left(i - \frac{dH}{ds} \right) . \quad (13.16)$$

Z równania równomiernej filtracji (13.9) dla prostokątnego koryta gruntowego, którego pole przekroju $F_o = b H_o$, otrzymamy

$$q = \frac{Q}{b} = k H_o i . \quad (13.17)$$

Porównując prawe strony powyższych równań napiszemy

$$i = \frac{H}{H_o} \left(i - \frac{dH}{ds} \right) . \quad (13.18)$$

Oznaczmy przez η stosunek głębokości nierównomiernej filtracji do głębokości równomiernej filtracji

$$\eta = \frac{H}{H_o} .$$

Różniczkując to równanie napiszemy $dH = H_o d\eta$.

Po uwzględnieniu powyższych zależności w równaniu (13.18) oraz po rozdzieleniu zmiennych s i η , otrzymamy

$$\frac{i}{H_o} ds = \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta = d\eta + \frac{d\eta}{\eta - 1} .$$

Całkując to równanie w granicach od przekroju 1-1 do 2-2 (rys.13.8), otrzymamy równanie linii zwierciadła, zwanej krzywą depresji

$$\frac{i}{H_o} \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta - 1},$$

czyli

$$\frac{i}{H_o} (s_2 - s_1) = \eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}.$$

czyli

$$\frac{i}{H_o} (s_2 - s_1) = \eta_2 - \eta_1 + \ln \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1}. \quad (13.19)$$

W równaniu tym $s_2 - s_1 = l$ oznacza odległość między przekrojami 1-1 i 2-2:

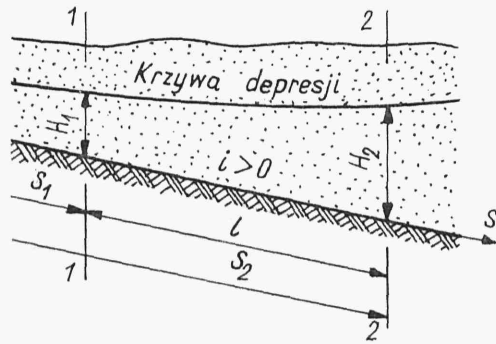
$$\eta_1 = \frac{H_1}{H_o}, \quad \eta_2 = \frac{H_2}{H_o}.$$

Krzywą depresji możemy przedstawić z równania (13.18) w postaci różniczkowej

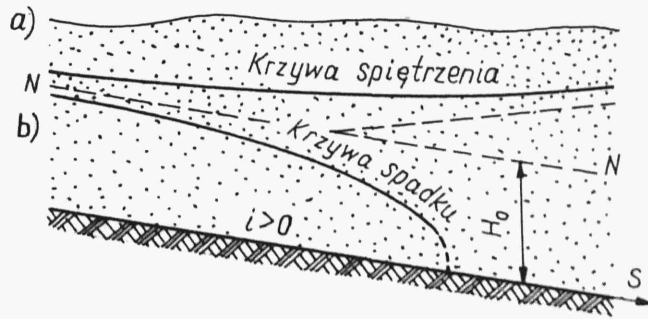
$$\frac{dH}{ds} = i \left(1 - \frac{H_o}{H} \right). \quad (13.20)$$

W rozważanym przypadku kształt krzywej depresji może być dwójaki (rys.13.9):

1. W strefie a) $H > H_o$, wówczas z równania (13.20) wynika, że $\frac{dH}{ds} > 0$. Głębokość H wzrasta w kierunku przepływu, przy czym tworzy się krzywa spiętrzenia. Gdy $H \rightarrow H_o$, to $\frac{dH}{ds} \rightarrow 0$, wówczas asymptotą krzywej spiętrzenia jest linia N-N jednakowych głębokości H_o . Natomiast gdy $H \rightarrow \infty$, to $\frac{dH}{ds} \rightarrow i$, a więc drugą asymptotą tej krzywej jest linia pozioma.



Rys.13.8

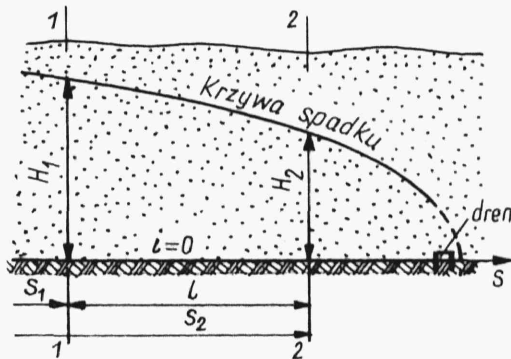


Rys.13.9

2. W strefie b) $H < H_0$, wówczas $\frac{dH}{ds} < 0$. Głębokość H maleje w kierunku przepływu, wskutek czego otrzymamy krzywą spadku. Gdy $H \rightarrow H_0$, to $\frac{dH}{ds} \rightarrow 0$, a więc w górnej części asymptotą krzywej spadku jest linia N-N. Gdy $H \rightarrow 0$, to $\frac{dH}{ds} \rightarrow \infty$, wówczas krzywa spadku szybko się obniża.

2. W przypadku poziomej płaszczyzny nieprzepuszczalnego podkładu $i = 0$ równanie (13.16) przyjmie postać

$$\frac{q}{k} ds = -H dH. \quad (13.21)$$



Rys.13.10

Całkując to równanie w granicach od 1-1 do 2-2, otrzymamy równanie krzywej depresji w postaci paraboli (rys.13.10)

$$\frac{q}{k} \int_{s_1}^{s_2} ds = - \int_{H_1}^{H_2} H dH,$$

skąd

$$\frac{q}{k} (s_2 - s_1) = \frac{H_1^2 - H_2^2}{2}.$$

Z tego równania łatwo obliczyć wydatek q , przypadający na jednostkę szerokości prostokątnego koryta gruntowego, znając głębokość H_1 i H_2 oraz ich odległość $l = s_2 - s_1$, a więc

$$q = \frac{k H_1^2 - H_2^2}{2l} . \quad (13.22)$$

Otrzymaną zależność (13.22) nazywamy równaniem Dupuita.

Z równania (13.21) $\frac{dH}{ds} = \frac{q}{kH} < 0$ wynika, że głębokość H maleje w kierunku przepływu, a więc krzywa depresji jest krzywą spadku.

3. W przypadku ujemnego spadku dna koryta gruntowego $i < 0$ otrzymaliśmy równanie (13.14), które w przypadku przekroju prostokątnego przyjmie postać

$$\frac{Q}{b} = q = -kH \left(i' + \frac{dH}{ds} \right) . \quad (13.23)$$

Jeżeli w tym równaniu uwzględnimy głębokość H_0 przepływającego w przeciwnym kierunku strumienia równomiernej filtracji o spadku i' , to na podstawie zależności (13.17) i (13.23) napiszemy

$$H_0 i' = -H \left(i' + \frac{dH}{ds} \right) . \quad (13.24)$$

Oznaczając $\xi = \frac{H}{H_0}$, otrzymamy $H_0 d\xi = dH$. Podstawiając te zależności do równania (13.24), otrzymamy

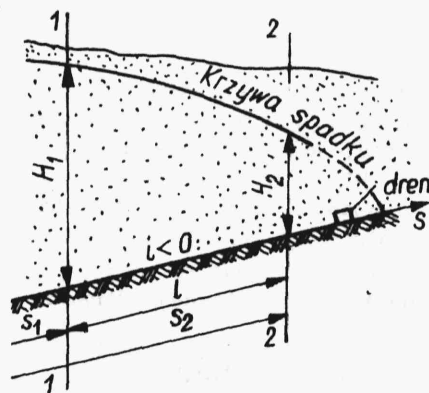
$$\frac{i'}{H_0} ds = \frac{\xi}{\xi + 1} d\xi = -d\xi + \frac{d\xi}{1 + \xi} .$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach od 1-1 do 2-2 (rys.13.11) otrzymamy równanie krzywej depresji

$$\frac{i'}{H_0} \int_{s_1}^{s_2} ds = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{1 + \xi} ,$$

skąd

$$\frac{i'}{H_0} (s_2 - s_1) = \xi_1 - \xi_2 + \ln \frac{1 + \xi_2}{1 + \xi_1} . \quad (13.25)$$



Rys.13.11

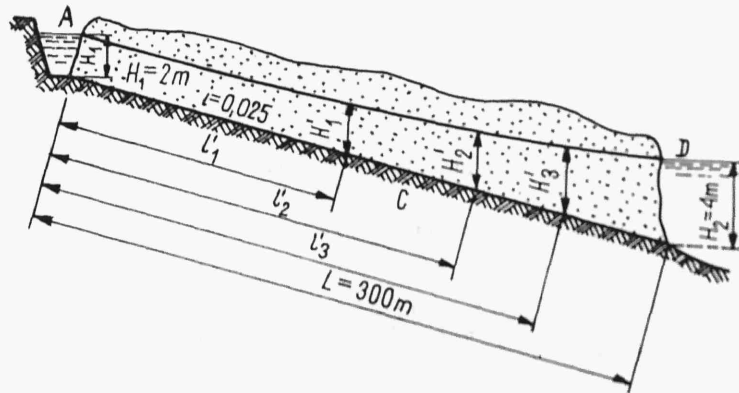
W równaniu (13.25) $s_2 - s_1 = l$ oznacza odległość między wymierzonymi przekrojami: $\xi_1 = \frac{H_1}{H_0}$; $\xi_2 = \frac{H_2}{H_0}$ - stosunki odpowiednich głębokości strumienia nierównomiernej filtracji do głębokości strumienia równomiernej filtracji.

Na podstawie równania (13.24) zbadamy przebieg krzywej depresji

$$\frac{dH}{ds} = -i' \left(1 + \frac{H'_0}{H} \right).$$

Z równania tego wynika, że pochodna $\frac{dH}{ds} < 0$ jest zawsze mniejsza od zera, a więc głębokość H maleje w kierunku przepływu, a krzywa depresji będzie krzywą spadku.

Przykład 13.1. Z kanału A o głębokości $H_1 = 2,0$ m woda przepływa przez grunt B, leżący na nieprzepuszczalnym podłożu C, do rzeki D o głębokości $H_2 = 4,0$ m (rys.13.12). Wyznaczyć krzywą de-



Rys.13.12

presji strumienia wody w korycie gruntowym o przekroju prostokątnym oraz obliczyć wydatek filtracyjny q , przypadający na 1 m szerokości koryta, jeżeli spadek dna $i = 0,025$, odległość kanału do rzeki wynosi $L = 300$ m oraz współczynnik filtracji gruntu $k = 0,002$ cm/s.

Rozwiązanie. Przykład ten dotyczy przypadku 1a, tj. $i > 0$, $H_2 > H_1$. Krzywą depresji jest krzywa spiętrzenia.

Podstawiając do równania (13.19) znane wielkości, obliczymy głębokość równomiernej filtracji H_0

$$\frac{0,025}{H_0} \cdot 300 = \frac{4}{H_0} - \frac{2}{H_0} + 2,3 \lg \frac{4 - H_0}{2 - H_0},$$

skąd

$$f(H_0) = H_0 \lg \frac{4 - H_0}{2 - H_0} = 2,39.$$

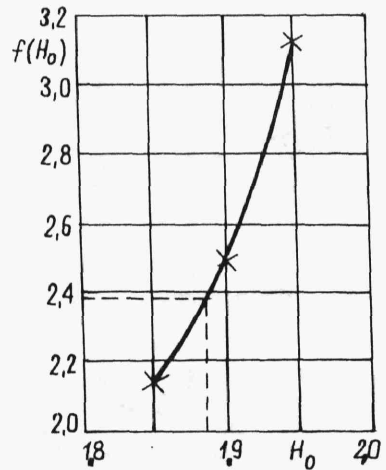
Z równania tego łatwo wyznaczyć H_0 graficznie. Przyjmując szereg dowolnych wartości H (w granicach między 0 i H_1), sporządzamy wykres $f(H_0)$ dla lewej strony równania.

Na wykresie podanym na rys.13.13, zadany wartości H_0 : 1,95 m; 1,90 m, 1,85 m, odpowiadają wartości $f(H_0)$: 3,14; 2,52; 2,14. Wartości $f(H_0) = 2,39$, odpowiada na wykresie wartość $H_0 = 1,88$ m.

Ze wzoru (13.17) obliczymy wydatek filtracyjny na 1 m szerokości koryta gruntu

$$q = k i H_0 = 0,002 \cdot 0,025 \cdot 1,88 = 0,01 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Krzywą depresji wyznaczmy z równania (13.19). Podstawiając do tego równania wartości $H_1 = 2$ m, $H_0 = 1,88$ m oraz pamiętając, że $s_2 - s_1 = 1$, otrzymamy zależność $l = f(H)$ w postaci



Rys.13.13

$$\frac{0,025}{1,88} l = \frac{H}{1,88} - \frac{2,0}{1,88} + 2,3 \lg \frac{H - 1,88}{2,0 - 1,88}$$

lub

$$l = 40 H + 173 \lg \frac{H - 1,88}{0,12} - 80.$$

Przyjmując w tym równaniu dowolne wartości głębokości H , np. $H'_1 = 2,5$ m, $H'_2 = 3,0$ m i $H'_3 = 3,5$ m, otrzymamy odpowiednie wartości odległości l do przekroju początkowego koryta $l'_1 = 144$ m, $l'_2 = 210$ m; $l'_3 = 255$ m.

Na podstawie powyższych danych przedstawiono na rys.13.12 krzywą depresji, przy czym skala pionowa jest dziesięciokrotnie większa od skali poziomej.