

$$Ar = Ga \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} = \frac{g l^3}{\nu^2} \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}, \quad (11.20)$$

gdzie: ϱ i ϱ_0 - gęstości płynu w dwu punktach układu.

Jeżeli różnicę gęstości wyrazimy za pomocą różnicy temperatur

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} = \beta \Delta t,$$

gdzie β - współczynnik rozszerzalności objętościowej, to podstawiając to wyrażenie do równania (11.20) otrzymamy liczbę Grashofa

$$Gr = \beta \frac{g l^3}{\nu^2} \Delta t. \quad (11.21)$$

Liczba Eulera jest również stosowana w innej postaci, zamiast ciśnienia p można podstawić różnicę ciśnień Δp w dowolnych dwu punktach układu. A więc można napisać

$$Eu = \frac{\Delta p}{\varrho v^2}. \quad (11.22)$$

W badaniach przepływu płynu w przewodach mamy często do czynienia z zagadnieniem określenia strat ciśnienia Δp wskutek oporów hydraulicznych. Dla przepływów ustalonych zależność między liczbami podobieństwa przyjmuje zwykle postać

$$Eu = f(Re). \quad (11.23)$$

11.4. WARUNKI PODOBIEŃSTWA ZJAWISK WYMIANY CIEPŁA

Całkowite podobieństwo zjawisk wymiany ciepła przez konwekcję wymaga, poza podobieństwem przepływu, podobieństwa cieplnego, którego warunki można zbadać przez analizę równania energii. Podobieństwo cieplne oznacza podobieństwo pól temperatur i strumieni ciepłych.

Rozpatrzmy warunki podobieństwa dla omawianych poprzednio dwu układów.

Dla pierwszego układu mamy następujące równania:
równanie Kirchhoffa-Fouriera przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) . \quad (11.24)$$

Równanie wymiany ciepła

$$\alpha \Delta T = -\Lambda \frac{\partial T}{\partial y} , \quad (11.25)$$

gdzie: a - współczynnik wyrównywania temperatury,

α - współczynnik przejmowania ciepła,

Λ - przewodność cieplna.

Dla układu drugiego odpowiednio

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial T'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial T'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial T'}{\partial z'} = a' \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right) , \quad (11.26)$$

$$\alpha' \Delta T' = -\Lambda' \frac{\partial T'}{\partial y'} . \quad (11.27)$$

Z podobieństwa zjawiska wynika:

$$(a) \quad \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \alpha_l , \quad \frac{t'}{t} = \alpha_t , \quad \frac{v'_x}{v_x} = \frac{v'_y}{v_y} = \frac{v'_z}{v_z} = \alpha_v ,$$

$$\frac{T'}{T} = \alpha_T , \quad \frac{a'}{a} = \alpha_a , \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \alpha_\Lambda , \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha_\alpha .$$

Zastępując zmienne drugiego układu przez zmienne pierwszego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_T}{\alpha_t} \frac{\alpha_v a_T}{\alpha_t} + \frac{\alpha_v \alpha_T}{\alpha_l} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ = \frac{\alpha_a \alpha_T}{\alpha_l^2} a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) , \end{aligned} \quad (11.28)$$

$$\alpha_{\alpha} \alpha_T \alpha \Delta T = - \frac{\alpha_{\lambda} \alpha_T}{\alpha_1} \Delta \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (11.29)$$

Z warunku tożsamości równań (11.24) i (11.28) oraz (11.25) i (11.29) wynikają następujące zależności:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_T}{\alpha_t} &= \frac{\alpha_a \alpha_T}{\alpha_1^2} \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha_a \alpha_t}{\alpha_1^2} = 1, \\ (b) \quad \frac{\alpha_v \alpha_T}{\alpha_1} &= \frac{\alpha_a \alpha_T}{\alpha_1^2} \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha_v \alpha_1}{\alpha_a} = 1, \\ \alpha_{\alpha} \alpha_T &= \frac{\alpha_{\lambda} \alpha_T}{\alpha_1} \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha_{\alpha} \alpha_1}{\alpha_{\lambda}} = 1. \end{aligned}$$

Podstawiając z zależności (a) zamiast stałych podobieństwa ich wartości i grupując zmienne otrzymujemy liczby podobieństwa cieplnego:

$$\frac{at}{l^2} = \frac{a' t'}{l'^2} \quad \text{lub} \quad \frac{a t}{l^2} = Fo = \text{idem}, \quad (11.30)$$

$$\frac{v l}{a} = \frac{v' l'}{a'} \quad \text{lub} \quad \frac{v l}{a} = Pe = \text{idem}, \quad (11.31)$$

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha' l'}{\lambda'} \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha l}{\lambda} = Nu = \text{idem}, \quad (11.32)$$

gdzie: Fo - liczba Fouriera,
Pe - liczba Pecleta,
Nu - liczba Nusselta.

Przy podobieństwie cieplnym dwu lub kilku układów liczby podobieństwa Fo, Pe i Nu te same wartości dla dowolnych punktów odpowiadających sobie układów.

Liczbę Pecleta można przekształcić i przedstawić w postaci iloczynu dwu liczb, a mianowicie

$$Pe = \frac{v l}{a} = \frac{vl}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} = Re \cdot Pr. \quad (11.33)$$

Taka zamiana jest dogodna do obliczeń praktycznych, ponieważ Re jest liczbą podobieństwa hydrodynamicznego, a liczba Prandtla - Pr składa się tylko z parametrów fizycznych

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{a} . \quad (11.34)$$

Równanie uogólnione wymiany ciepła ma następującą postać

$$Nu = f(Fo, Re, Gr, Pr) . \quad (11.35)$$

Dla ruchu wymuszonego ustalonego równanie (11.35) przyjmuje postać

$$Nu = f(Re, Pr) , \quad (11.36)$$

ponieważ przy ruchu ustalonym odpada liczba Fo a przy ruchu wymuszonym burzliwym można pominąć wpływ ruchu swobodnego, a tym samym odpada liczba Gr.

Przy swobodnym ruchu cieczy odpada liczba Re, wobec czego

$$Nu = f(Gr, Pr) . \quad (11.37)$$

Wreszcie dla gazów o jednakowej liczbie atomów, dla których liczba Pr jest jednakowa, równania (11.36) i (11.37) przyjmą postać:

$$Nu = f(Re) , \quad (11.38)$$

$$Nu = f(Gr) . \quad (11.39)$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że teoria podobieństwa pozwala otrzymać liczby podobieństwa bez całkowania równań różniczkowych oraz pozwala ustalić zależności uogólnione, które są słuszne dla wszystkich zjawisk podobnych.

11.5. SENS FIZYCZNY LICZB PODOBIENSTWA

Każdej liczbie podobieństwa można przypisać pewien sens fizyczny. Liczby podobieństwa określamy zazwyczaj jako stosunek dwu wyrażeń charakterystycznych oddziaływania dwu różnych wielkości fizycznych.