

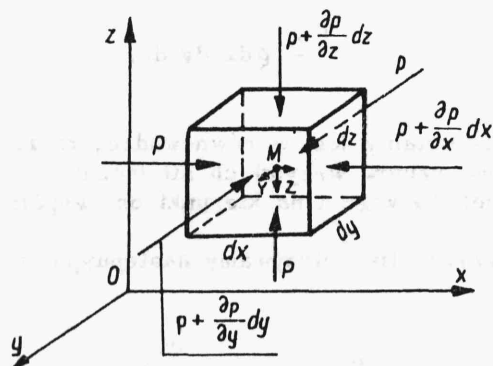
dynamiki płynu było wyprowadzenie przez D. Bernoulliego równania energetycznego, które stanowi podstawę przybliżonych rozwiązań zagadnień hydrauliki.

Hydrodynamiczne ciśnienie w płynie doskonałym będącym w ruchu ma wszelkie cechy ciśnienia hydrostatycznego, ponieważ w płynach nielepkich nie występują naprężenia styczne.

W mechanice płynów płyn jest traktowany jako ośrodek ciągły i jednorodny, w związku z czym ciśnienia i prędkości są ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami współrzędnych. W ruchu płynów spełnione są warunki ciągłości, określone równaniami (3.5) lub (3.6).

4.2. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU EULERA

Rozpatrzmy element płynu w postaci prostopadłościanu o krawędziach dx , dy , dz , równoległych do prostokątnych osi współrzędnych (rys. 4.1). Na wyodrębniony element działają siły powierzchniowe, wywołane ciśnieniem hydrodynamicznym.



Rys.4.1

Oznaczmy X , Y , Z - składowe siły masowych, przypadających na jednostkę masy, w kierunkach osi współrzędnych.

Masa elementarnego prostopadłościanu płynu o gęstości ρ wynosi $dM = \rho dx dy dz$.

Rzuty jednostkowych sił masowych na kierunki osi współrzędnych są równe:

$$X \rho dx dy dz, \quad Y \rho dx dy dz, \quad Z \rho dx dy dz.$$

Siły powierzchniowe, działające na ścianki elementarnego prostopadłościanu, są do nich prostopadłe i wynoszą:

$$p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz,$$

$$p \, dz \, dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dz \, dx,$$

$$p \, dx \, dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx \, dy.$$

W wyrażeniach tych symbolem p oznaczyliśmy ciśnienie.

Rzuty sił bezwładności otrzymamy, mnożąc masę elementu przez składowe przyspieszeń ze znakami przeciwnymi:

$$- \frac{dv_x}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$- \frac{dv_y}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$- \frac{dv_z}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Jeżeli układ materialny jest w równowadze, to zgodnie z zasadą d'Alemberta - suma rzutów wszystkich sił łącznie z siłą bezwładności na dowolny kierunek (a więc i na kierunki osi współrzędnych) równa jest zeru.

Sumując powyższe siły, otrzymamy następujące warunki rzutów na osie x , y , z :

$$X \rho \, dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz - \frac{dv_x}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz = 0,$$

$$Y \rho \, dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx \, dy \, dz - \frac{dv_y}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz = 0,$$

$$Z \rho \, dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx \, dy \, dz - \frac{dv_z}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Po uproszczeniu i przekształceniu otrzymamy różniczkowe równanie ruchu płynu doskonałego w postaci układu równań Eulera:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Prawe strony układu równań (4.1) możemy przedstawić w rozwiniętej postaci. Składowe prędkości v_x, v_y, v_z są funkcjami czterech zmiennych niezależnych x, y, z, t , przeto możemy napisać różniczkę zupełną

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz.$$

Dzieląc obie strony równania przez dt i uwzględniając następujące zależności:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

otrzymamy

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Analogicznie:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Wstawiając powyższe wartości do równań (4.1) otrzymamy układ równań Eulera w postaci:



$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Powyższe równania w połączeniu z równaniem ciągłości określają ruch płynów doskonałych w najogólniejszej postaci.

W ruchu ustalonym płynu doskonałego pierwsze wyrazy prawych stron równań (4.3), tj. cząstkowe pochodne składowych prędkości względem czasu są równe zero

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

4.3. RÓWNANIE BERNOULLIEGO JAKO CAŁKA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RUCHU EULERA

Równania różniczkowe ruchu w postaci Eulera (4.1) dla dowolnego (niepotencjalnego) przepływu ustalonego można scałkować. Całkę tę po-
dał po raz pierwszy Bernoulli, jest ona dlatego nazywana całką lub
równaniem Bernoulliego.

Niech płyn porusza się względem układu współrzędnych x, y, z . Je-
żeli przepływ jest ustalony, tory i linie prądu pokrywają się, element
płynu porusza się z pewną prędkością v wzdłuż toru stanowiącego jed-
nocześnie linię prądu.

W ciągu czasu dt element płynu przebędzie wzdłuż toru odcinek
drogi ds , który równy jest

$$ds = v dt.$$

Rzutując elementarne przesunięcie ds elementu wzdłuż linii prądu
na osie współrzędnych x, y, z otrzymamy:

$$\begin{aligned} dx &= v_x dt, \\ dy &= v_y dt, \\ dz &= v_z dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$