

11. TEORIA PODOBIENSTWA I ANALIZA WYMIAROWA

11.1. UWAGI WSTĘPNE

Praktyczne zagadnienia z mechaniki płynów wymagają rozwiązania wielu zadań m.in. ustalonych i nieustalonych przepływów cieczy i gazów w przewodach, ruchu ciał w płynach, różnego rodzaju przepływów w kanałach, turbinach, cyklonach itd. Zadania te można w niektórych przypadkach rozwiązać analitycznie, co jednak nie zawsze jest możliwe ze względu na bardzo złożony układ równań opisujących dane zjawiska.

Wykonywanie doświadczenia w skali naturalnej jest zazwyczaj kosztowne, gdyż wymagałoby to budowania bardzo dużych i skomplikowanych obiektów eksperymentalnych. Dlatego najczęściej wykonuje się modele urządzeń rzeczywistych. Wyniki badań doświadczalnych na modelu mogą być przeniesione na układ rzeczywisty tylko w oparciu o teorię podobieństwa zjawisk fizycznych.

Teorię podobieństwa można stosować tylko do zjawisk tego samego rodzaju, określonych analitycznie jednakowymi równaniami, zarówno w formie jak i w treści fizycznej.

Koniecznym warunkiem podobieństwa zjawisk fizycznych jest ich podobieństwo geometryczne. Dwa zjawiska fizyczne uważa się za podobne, jeżeli w odpowiadających sobie punktach obu układów geometrycznie podobnych oraz odpowiadających sobie chwilach dowolna wielkość fizyczna zjawiska pierwszego jest proporcjonalna do jednorodnej wielkości zjawiska drugiego.

Teorię podobieństwa stosuje się zasadniczo do analizy równań różniczkowych opisujących rozpatrywane zjawisko. W przypadkach, gdy trudno jest podać takie równanie, natomiast znane są parametry wpływające na poszukiwaną wielkość, można posługiwać się tzw. analizą wymiarową.

11.2. PODOBIENSTWO ZJAWISK FIZYCZNYCH

Jak już wspominaliśmy przy analizie zjawisk podobnych można porównywać ze sobą tylko wielkości jednorodne w odpowiadających sobie punktach i chwilach.

W układach geometrycznie podobnych odpowiadające sobie wymiary liniowe są proporcjonalne, tj.

$$\frac{l'}{l} = \alpha_1, \quad (11.1)$$

gdzie: α_l - stała podobieństwa (skala liniowa),

l' - wymiar liniowy na modelu,

l - odpowiadający wymiar liniowy w układzie rzeczywistym.

Stałe podobieństwa dla powierzchni i objętości zależą od skali liniowej:

$$\frac{F'}{F} = \alpha_F = \alpha_l^2; \quad \frac{V'}{V} = \alpha_V = \alpha_l^3.$$

Pojęcie odpowiadających sobie punktów obu układów oznacza, że współrzędne tych punktów spełniają warunki podobieństwa (11.1), podobnie definiowane są odpowiadające sobie chwile

$$\frac{t'}{t} = \alpha_t.$$

Odpowiadające sobie wielkości fizyczne występujące na modelu φ' i w układzie rzeczywistym φ są do siebie proporcjonalne, a ich stosunek równy jest

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \alpha_\varphi,$$

gdzie α_φ - stała podobieństwa.

Matematyczne zależności warunków podobieństwa pól prędkości v , przyspieszenia ziemskiego g , gęstości ρ , lepkości μ , siły S , temperatury T , przewodności cieplnej Λ , ciepła właściwego c_w dla dwu strumieni płynu przyjmują następującą postać:

podobieństwo kinematyczne:

$$\frac{v'}{v} = \alpha_v, \quad \frac{g'}{g} = \alpha_g,$$

podobieństwo dynamiczne:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \alpha_\rho, \quad \frac{\mu'}{\mu} = \alpha_\mu, \quad \frac{S'}{S} = \alpha_s,$$

podobieństwo cieplne:

$$\frac{T'}{T} = \alpha_T, \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = \alpha_\Lambda, \quad \frac{c'_w}{c_w} = \alpha_{c_w}.$$

Dla zjawisk złożonych, które są określone dużą ilością różnorodnych wielkości, stałe podobieństwa nie mogą być wybierane w sposób

dowolny. Okazuje się, że oprócz stałych stosunków wielkości jednorodnych w podobnych zjawiskach złożonych muszą być spełnione dodatkowe warunki, które będą przedmiotem dalszych rozważań.

Rozpatrzmy ogólny przypadek ruchu płynu. Prędkość v jest to stosunek drogi do czasu

$$v = \frac{l}{t}.$$

Stosując ten wzór do odpowiadających sobie elementów dwóch podobnych strumieni płynu, które wykonały drogi podobne, mamy:

$$\text{dla modelu} \quad v' = \frac{l'}{t'},$$

$$\text{dla układu rzeczywistego} \quad v = \frac{l}{t}.$$

skąd

$$\frac{v'}{v} = \frac{l'}{l} : \frac{t'}{t} \quad (11.2)$$

i podstawiając stałe podobieństwa α_v , α_l i α_t otrzymamy

$$\alpha_v = \frac{\alpha_l}{\alpha_t}$$

lub

$$\frac{\alpha_v \alpha_t}{\alpha_l} = 1. \quad (11.3)$$

W zależności (11.3) istnieje możliwość dowolnego wyboru tylko dwóch spośród trzech stałych podobieństwa. Zależność (11.2) można wyrazić w postaci

$$\frac{v' t'}{l'} = \frac{v t}{l}$$

lub

$$\frac{v t}{l} = \text{idem}, \quad (11.4)$$

gdzie słowo idem oznacza, że otrzymana wartość musi być identyczna w obu układach (modelowym i rzeczywistym).

Równanie (11.4) oznacza, że w układach podobnych istnieją pewne wielkości, które dla wszystkich zjawisk podobnych zachowują jedną i tę samą wartość liczbową. Wielkości te są bezwymiarowe i noszą nazwy liczb podobieństwa, kryteriów podobieństwa, modułów lub inwariantów podobieństwa.

Liczby podobieństwa są na ogół nazywane od nazwisk naukowców, którzy pracowali w danej dziedzinie nauki i oznaczone są symbolami składającymi się z początkowych liter ich nazwisk, np.: liczba podobieństwa Newtona Ne , Reynoldsa - Re , Eulera - Eu , Nusselta - Nu , Frouda - Fr .

Na podstawie powyższych rozważań można sformułować tzw. pierwsze twierdzenie teorii podobieństwa w sposób następujący: zjawiska podobne scharakteryzowane są jednakowymi wartościami liczb podobieństwa.

Drugie twierdzenie teorii podobieństwa ustala możliwość wyrażenia całki równania różniczkowego jako funkcji liczb podobieństwa określonych za pomocą tego równania.

Równania różniczkowe wyprowadzone na podstawie praw fizyki opisują zjawiska w ogólnej postaci. Pełny opis matematyczny dowolnego zjawiska fizycznego obejmuje prócz równań różniczkowych tzw. warunki jednoznaczności, na które składają się:

- a) własności geometryczne układu, w którym przebiega zjawisko,
- b) warunki fizyczne określające własności fizyczne ciał tworzących rozpatrywany układ,
- c) warunki brzegowe układu w ciągu przebiegu rozpatrywanego zjawiska,
- d) warunki początkowe w układzie.

11.3. ANALIZA PODOBIEŃSTWA RUCHU PŁYNU LEPKIEGO I NIEŚCISLIWEGO

Ruch płynu lepkiego opisany jest równaniami Naviera-Stokesa oraz równaniem ciągłości. Załóżmy, że istnieją dwa podobne do siebie układy.

W układzie pierwszym równania te mają następującą postać:

a) równanie Naviera-Stokesa (tylko dla rzutu na osi x) w postaci

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\ = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (11.5)$$

b) równanie ciągłości

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (11.6)$$

W układzie drugim równania te przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \varrho' \frac{\partial v'_x}{\partial t'} + \varrho' \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) = \\ = \varrho' g' - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu' \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right), \end{aligned} \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = 0. \quad (11.8)$$

Podobieństwo fizyczne obu ruchów płynu wymaga podobieństwa pól wszystkich wielkości wchodzących do równań ruchu i ciągłości, a więc z określenia podobieństwa wynika:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \alpha_l, \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = \alpha_\varrho, \quad \frac{g'}{g} = \alpha_g, \quad \frac{t'}{t} = \alpha_t,$$

$$\frac{v'_x}{v_x} = \frac{v'_y}{v_y} = \frac{v'_z}{v_z} = \alpha_v, \quad \frac{p'}{p} = \alpha_p, \quad \frac{\mu'}{\mu} = \alpha_\mu.$$

Na podstawie tych zależności można wyrazić wszystkie zmienne drugiego układu przez zmienne pierwszego, a mianowicie:

$$x' = \alpha_l x, \quad y' = \alpha_l y, \quad z' = \alpha_l z, \quad \varrho' = \alpha_\varrho \varrho, \quad g' = \alpha_g g,$$

$$v'_x = \alpha_v v_x, \quad v'_y = \alpha_v v_y, \quad v'_z = \alpha_v v_z, \quad p' = \alpha_p p, \quad \mu' = \alpha_\mu \mu$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do równań (11.7) i (11.8) napiszemy

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_\rho \alpha_v}{\alpha_t} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1} \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = \alpha_\rho \alpha_g \rho g - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_\mu \alpha_v}{\alpha_1^2} \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\frac{\alpha_v}{\alpha_1} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (11.10)$$

Z podobieństwa obu zjawisk wynika, że równanie (11.5) i (11.9) oraz (11.6) i (11.10) powinny być identyczne, co jest możliwe przy tożsamości tych równań. Warunkiem tych tożsamości jest, aby zachodziły równości:

Z równań ruchu wynika, że

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1} = \alpha_\rho \alpha_g = \frac{\alpha_p}{\alpha_1} = \frac{\alpha_\mu \alpha_v}{\alpha_1^2}.$$

Z równania ciągłości wynika, że

$$\frac{\alpha_v}{\alpha_1} = \text{idem.}$$

Rozpatrując te zależności parami otrzymujemy

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v}{\alpha_t} = \frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1}, \quad \text{skąd} \quad \frac{\alpha_v \alpha_t}{\alpha_1} = 1, \quad (11.11)$$

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1} = \alpha_\rho \alpha_g, \quad \text{skąd} \quad \frac{\alpha_g \alpha_1}{\alpha_v^2} = 1, \quad (11.12)$$

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_p}{\alpha_1}, \quad \text{skąd} \quad \frac{\alpha_p}{\alpha_\rho \alpha_v^2} = 1, \quad (11.13)$$

$$\frac{\alpha_\rho \alpha_v^2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_\mu \alpha_v}{\alpha_1^2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{\alpha_\rho \alpha_v \alpha_1}{\alpha_\mu} = 1. \quad (11.14)$$

Równania (11.11) do (11.14) można przedstawić w postaci liczb podobieństwa przez zastąpienie stałych podobieństwa stosunkami odpowiednich wielkości podobnych i zgrupowanie wszystkich wielkości zgodnie ze wskaźnikami. Odpowiednie przekształcenia dają następujący wynik:

$$\frac{v}{l} = \frac{v' l'}{l'^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v}{l} = H_o = \text{idem}, \quad (11.15)$$

$$\frac{g}{v^2} = \frac{g' l'}{v'^2 l'^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{g}{v^2} = Fr = \text{idem}, \quad (11.16)$$

$$\frac{p}{\rho v^2} = \frac{p'}{\rho' v'^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{\rho v^2} = Eu = \text{idem}, \quad (11.17)$$

$$\frac{\rho v l}{\mu} = \frac{\rho' v' l'}{\mu'}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\rho v l}{\mu} = Re = \text{idem}. \quad (11.18)$$

Warunek podobieństwa niestabilnych przepływów płynu lepkiego, nieściśliwego w obu układach wymaga więc, aby liczby podobieństwa H_o - równoczesności (lub Strouhala - Sh), Fr - liczba Frouda, Eu - liczba Eulera oraz Re - liczba Reynoldsa, miały jedne i te same wartości w odpowiadających sobie punktach obu układów.

Przy zastosowaniu liczb podobieństwa zachodzi niekiedy potrzeba zmiany ich postaci. Na przykład przy analizie ruchu cieczy wywołanego przez różnicę gęstości poszczególnych elementów dogodniejsze jest zastąpienie liczby Frouda liczbą Galileusza

$$Ga = Fr Re^2 = \frac{g l^3}{v^2}. \quad (11.19)$$

Mnożąc liczbę Galileusza przez stosunek $\frac{\rho - \rho_o}{\rho}$ otrzymujemy liczbę Archimedes

$$Ar = Ga \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} = \frac{g l^3}{\nu^2} \frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho}, \quad (11.20)$$

gdzie: ϱ i ϱ_0 - gęstości płynu w dwu punktach układu.

Jeżeli różnicę gęstości wyrazimy za pomocą różnicy temperatur

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} = \beta \Delta t,$$

gdzie β - współczynnik rozszerzalności objętościowej, to podstawiając to wyrażenie do równania (11.20) otrzymamy liczbę Grashofa

$$Gr = \beta \frac{g l^3}{\nu^2} \Delta t. \quad (11.21)$$

Liczba Eulera jest również stosowana w innej postaci, zamiast ciśnienia p można podstawić różnicę ciśnień Δp w dowolnych dwu punktach układu. A więc można napisać

$$Eu = \frac{\Delta p}{\varrho v^2}. \quad (11.22)$$

W badaniach przepływu płynu w przewodach mamy często do czynienia z zagadnieniem określenia strat ciśnienia Δp wskutek oporów hydraulicznych. Dla przepływów ustalonych zależność między liczbami podobieństwa przyjmuje zwykle postać

$$Eu = f(Re). \quad (11.23)$$

11.4. WARUNKI PODOBIEŃSTWA ZJAWISK WYMIANY CIEPŁA

Całkowite podobieństwo zjawisk wymiany ciepła przez konwekcję wymaga, poza podobieństwem przepływu, podobieństwa cieplnego, którego warunki można zbadać przez analizę równania energii. Podobieństwo cieplne oznacza podobieństwo pól temperatur i strumieni cieplnych.

Rozpatrzmy warunki podobieństwa dla omawianych poprzednio dwu układów.