

$$\sqrt{\frac{\tau_o}{\varrho}} = l \frac{dv_x}{dy} . \quad (6.28)$$

Z postaci prawej części tego równania widać, że lewa część ma wymiar prędkości

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\varrho}} , \quad (6.29)$$

$v_*$  - nazywamy prędkością dynamiczną.

Możemy więc wzór (6.28) przedstawić w postaci

$$v_* = l \frac{dv_x}{dy} . \quad (6.30)$$

Dla określenia długości drogi mieszania Prandtl przyjął zależność

$$l = \kappa y ,$$

gdzie:  $\kappa = \text{const}$ , współczynnik zwany stałą uniwersalną,

$y$  - odległość od ścianki przewodu.

Podstawiając powyższą zależność do równania (6.30) otrzymamy

$$v_* = \kappa y \frac{dv}{dy} .$$

Zważywszy, że  $v_* = \text{const}$ , otrzymamy po scałkowaniu (pomijamy indeks  $x$  przy  $v$ , ponieważ przepływ w przewodach jest osiowo-symetryczny)

$$v = v_* \left( \frac{1}{\kappa} \ln y + C \right) . \quad (6.31)$$

## 6.6. ROZKŁAD PRĘDKOŚCI W RURACH GŁADKICH I CHROPOWATYCH PRZY PRZEPŁYWIE TURBULENTNYM

Dla określenia rozkładu prędkości w przekrojach poprzecznych rur zarówno gładkich jak i chropowatych posłużymy się, zgodnie z teorią Prandtla równaniem (6.31), przedstawiającym uniwersalne prawo rozkładu prędkości

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln y + C. \quad (6.31)$$

#### A. Rozkład prędkości w rurach gładkich

Wyznaczona ze wzoru (6.31) wartość prędkości przy ścianie, przy  $y = 0$ ,  $v \rightarrow -\infty$  zamiast rzeczywistej wartości  $v = 0$ . Ta sprzeczność wynika z pominięcia w wyrażeniu (6.27), określającym naprężenie styczne składnika  $\tau_1 = \mu \frac{dv}{dy}$ , podczas gdy w pobliżu ścianki ten właśnie wyraz odgrywa decydującą rolę.

Dla określenia stałej całkowania  $C$  w rurach gładkich Prandtl przyjął następujące warunki brzegowe:

$$y = y_0, \quad v = v_{y_0},$$

gdzie:  $y_0$  i  $v_{y_0}$  - grubość podwarstwy laminarnej i prędkość na granicy podwarstwy laminarnej.

Z równania (6.31) wyznaczamy stałą całkowania

$$C = \frac{v_{y_0}}{v_*} - \frac{1}{\alpha} \ln y_0.$$

Grubość podwarstwy laminarnej określamy z zależności

$$y_0 = n \frac{\nu}{v_*}, \quad (6.32)$$

gdzie:  $n$  - stała,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Jak wiadomo, bezpośrednio przy ścianie tworzy się laminarna warstwa przyścienna, w której

$$\tau_0 = \mu \frac{v}{y},$$

a dla  $y = y_0$

$$v_{y_0} = \frac{\tau_0 y_0}{\mu}.$$

Po podstawieniu  $y_0$  z zależności (6.32) napiszemy

$$v_{y0} = n v_* . \quad (6.33)$$

Uwzględniając wzory (6.32) i (6.33) otrzymamy

$$C = n - \frac{1}{\alpha} \ln n \frac{y}{v_*} .$$

Podstawiając tę zależność do równania (6.31) otrzymuje się

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y v_*}{y} + C_1 , \quad (6.34)$$

gdzie  $C_1 = n - \frac{1}{\alpha} \ln n$ .

Współczynniki  $\alpha$  i  $C_1$  zostały określone doświadczalnie przez Nikuradse na podstawie pomiarów rozkładu prędkości, wykonanych w prostych rurach o gładkich ściankach. Otrzymane wartości są następujące:

$$\alpha = 0,40, \quad C_1 = 5,5.$$

Po uwzględnieniu tych wartości napiszemy

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{y v_*}{y} + 5,5$$

lub przechodząc od logarytmów naturalnych do dziesiętnych otrzymamy

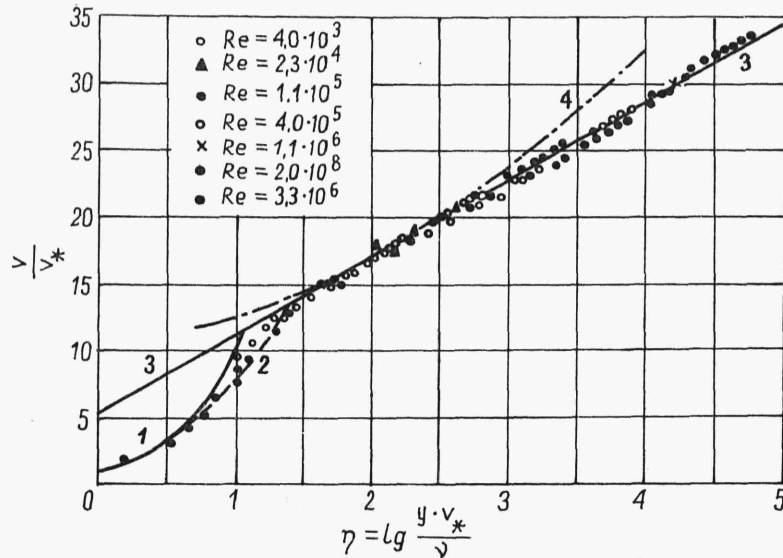
$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y v_*}{y} + 5,5. \quad (6.35)$$

Równanie to otrzymał Prandtl w postaci tzw. logarytmicznego prawa rozkładu prędkości dla przepływu turbulentnego w rurach hydraulicznie gładkich.

Znana jest z hydrauliki zależność potęgowa rozkładu prędkości w rurach gładkich

$$\frac{v}{v_*} = 8,74 \left( \frac{y v_*}{y} \right)^{\frac{1}{7}} . \quad (6.36)$$

Zależność tę dobrze potwierdzają doświadczenia dla wartości liczb Reynoldsa do  $Re = 100\ 000$ . Dla większych liczb Reynoldsa prędkość  $v$  w przybliżeniu jest proporcjonalna do pierwiastka ósmego stopnia, a następnie do pierwiastka dziewiątego i dziesiątego stopnia z  $\frac{y v_*}{\nu}$ . Należy jednak pamiętać, że powyższe zależności są tylko przybliżonymi wyrażeniami bardziej dokładnej uniwersalnej zależności logarytmicznej (6.35).



Rys. 6.14

Na rys. 6.14 widać całkowitą zbieżność krzywej uniwersalnego logarytmicznego rozkładu prędkości w gładkich rurach z wynikami doświadczalnymi (krzywa 3). Rozkład prędkości według prawa pierwiastka siódmego stopnia zgodny jest z wynikami pomiarów dla liczb  $Re < 100\ 000$  (krzywa 4).

Dla podwarstwy laminarnej krzywa 1 przedstawia prawo ruchu laminarnego

$$\frac{v}{v_*} = \frac{y v_*}{\nu} \quad (6.37)$$

Zależność powyższą otrzymujemy z porównania naprężenia stycznego w podwarstwie laminarnej  $\tau_0 = \mu \frac{v}{y}$  z wyrażeniem (6.29)  $\tau_0 = \rho v_*^2$ .

### B. Rozkład prędkości w rurach chropowatych

Równanie (6.31) da się także zastosować do przepływu burzliwego wzdłuż ściany chropowatej. Otrzymuje się tylko inną wartość dla stałej całkowania  $C$ .

Wprowadzając średnią wysokość występow chropowatości  $k$  (tzw. chropowatość bezwzględna) Prandtl wyznaczył stałą

$$C = C_2 - \frac{1}{\alpha} \ln k.$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (6.31) napiszemy

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{y}{k} + C_2. \quad (6.38)$$

Przyjmując  $\alpha = 0,4$  napiszemy

$$\frac{v}{v_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k} + C_2. \quad (6.39)$$

Przechodząc do logarytmów dziesiętnych

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + C_2. \quad (6.40)$$

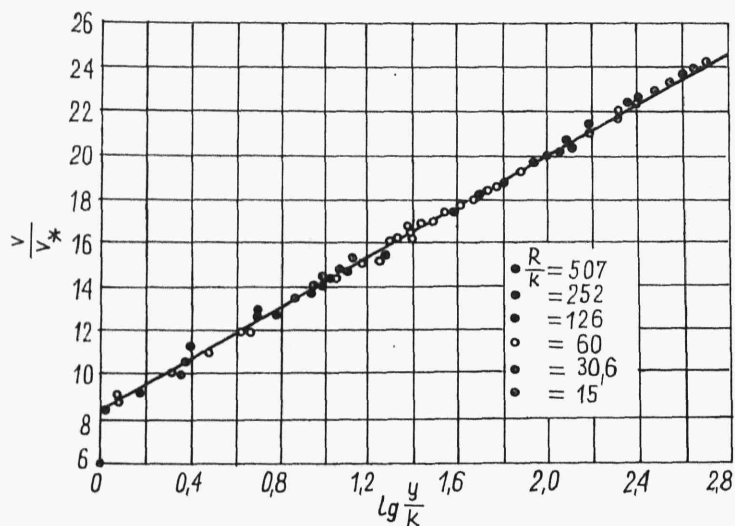
Stała  $C_2$  zależy od bezwymiarowej wielkości  $\frac{v_* k}{\nu}$  charakteryzującej chropowatość.

Dla przepływu w zakresie  $\frac{v_* k}{\nu} > 70$ , a więc dla obszaru rur przy całkowicie rozwiniętej chropowatości (tzn. dla przypadku zaniku podwarstwy laminarnej) wartość współczynnika  $C_2 = 8,5$ .

A więc dla rur chropowatych logarytmiczny rozkład prędkości przedstawia się następująco

$$\frac{v}{v_*} = 5,75 \lg \frac{y}{k} + 8,5. \quad (6.41)$$

Zależność ta została doświadczalnie potwierdzona przez Nikuradse (rys.6.15).



Rys.6.15

## 6.7. OPORY LINIOWE W RURACH GŁADKICH I CHROPOWATYCH

Istotnym parametrem określającym wielkość strat ciśnienia jest współczynnik oporów liniowych  $\lambda$ , występujący we wzorze (6.23) Darcy - Weisbacha, który można napisać w postaci

$$h_{\text{str}} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{śr}}^2}{2g}. \quad (6.42)$$

Siły styczne na prostym odcinku przewodu o długości  $l$  i średnicy  $d$  można wyrazić w postaci iloczynu naprężeń stycznych na ścianie  $\tau_0$  przez pole bocznej powierzchni przewodu  $\pi dl$ . Siły te w ruchu jednostajnym równoważą się z siłami normalnymi w przekrojach na obu końcach odcinka  $l$ .

Otrzymamy następujące równanie

$$\tau_0 \pi dl = (p_1 - p_2) \frac{\pi d^2}{4}, \quad (6.43)$$