

6.4. PRZEPŁYW LAMINARNY PŁYNU NIEŚCISLIWEGO PRAWO HAGEN-POISEUILLE'A

Rozwiązanie zagadnienia laminarnego przepływu ustalonego w przewodzie o przekroju kołowym można uzyskać drogą całkowania równań Naviera Stokesa (6.8).

Rozważmy prostoosiowy przewód o przekroju kołowym. Oś x skierujemy wzdłuż osi przewodu zakładając przepływ jednowymiarowy i laminarny. W tym przypadku spośród trzech składowych prędkości tylko jedna $v_x \neq 0$ jest różna od zera, pozostałe dwie są równe zero $v_y = v_z = 0$. Równanie ruchu (6.9) oraz równanie ciągłości upraszczają się przy tym przyjmując postać (siły ciężkości zaniedbujemy)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$0 = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (6.11)$$

$$0 = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Z ostatniego równania tego układu wynika, że prędkość v_x jest funkcją tylko współrzędnych y i z , z drugiego zaś i trzeciego, że ciśnienie p jest funkcją jedynie współrzędnej x . Z tego względu można pierwsze równanie (6.11) przepisać w postaci

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \frac{dp}{dx}. \quad (6.12)$$

Lewa część tego równania jest funkcją y i z , a część prawa - funkcją tylko x . W tym przypadku równanie (6.12) może być spełnione wtedy tylko, gdy zarówno lewa jak i prawa jego część są wielkościami stałymi.

Wprowadzimy następujące oznaczenie

$$\frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l},$$

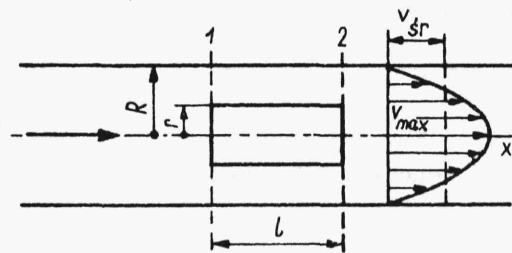
gdzie $\Delta p = p_1 - p_2$ jest spadkiem ciśnienia na odcinku przewodu o długości l (znak minus wynika stąd, że ciśnienie zmniejsza się wzdłuż przewodu, tzn. $\frac{dp}{dx} < 0$, zaś $\Delta p > 0$).

W ten sposób równanie (6.12) sprowadza się do równania o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \quad (6.13)$$

Równanie (6.13) będziemy rozwiązywali z uwzględnieniem warunku brzegowego opartego na tym, że w punktach, w których płyn lepki wskutek adhezji przywiera do sztywnej, nieruchomej ścianki, prędkość płynu staje się zerem (rys.6.8). Warunek ten wyraża się w postaci:

$$v_x = 0, \quad r = R, \quad (6.14)$$



Rys.6.8

gdzie: r - promień ($r = \sqrt{y^2 + z^2}$),

R - promień przewodu rurowego.

Łatwo wykazać, że równanie (6.13) oraz warunek brzegowy (6.14) są spełnione, jeżeli v_x ma następującą postać

$$v_x = C \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) = C \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

gdzie C - pewna stała określona z równania (6.13)

$$-2C \frac{2}{R^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l},$$

czyli

$$C = \frac{\Delta p R^2}{4 \mu l}.$$

Wyrażenie v_x przybiera zatem postać

$$v_x = \frac{\Delta p R^2}{4 \mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

lub

$$v_x = \frac{\Delta p}{4 \mu l} (R^2 - r^2). \quad (6.15)$$

Otrzymane równanie na poszukiwaną prędkość v_x dowodzi, że rozkład prędkości przy laminarnym przepływie ustalonym w przekroju kołowego przewodu jest paraboliczny (rys.6.8).

Z równania (6.15) wynika również, że prędkość maksymalna odpowiada wartości $r = 0$, tj. elementom płynu na osi przewodu. A zatem

$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{4 \mu l} R^2. \quad (6.16)$$

Z tego względu można wzór (6.15) przepisać w postaci

$$v_x = v_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (6.17)$$

Objętość zaznaczonej na rys.6.8 paraboloidy stanowi wydatek objętościowy przepływającego płynu. Elementarny wydatek przez powierzchnię pierścienia r i $r + dr$ będzie równy

$$dQ = 2 \pi r dr v_x,$$

skąd

$$Q = \int_0^R 2 \pi r v_x dr = \frac{\Delta p}{l} \frac{\pi}{2 \mu} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

ostatecznie

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \mu l} R^4 = \frac{\pi d^4}{128 \mu l} (p_1 - p_2), \quad (6.18)$$

gdzie $d = 2R$ jest średnicą przewodu

$$\Delta p = p_1 - p_2.$$

Otrzymany wzór (6.18) jest zgodny z prawem Hagen Poiseuille'a, sformułowanym na drodze doświadczalnej dla laminarnych przepływów płynów nieściśliwych w prostoosiowych przewodach o przekroju kołowym.

Znając wydatek, można znaleźć średnią prędkość w przekroju z prawa ciągłości

$$v_{\text{śr}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2. \quad (6.19)$$

Porównując (6.16) i (6.19) znajdziemy, że

$$v_{\text{śr}} = \frac{v_{\text{max}}}{2}, \quad (6.20)$$

tzn., że średnia prędkość przy laminarnym przepływie płynu w kołowym przewodzie równa się połowie prędkości maksymalnej.

Określmy stratę ciśnienia wskutek działania sił tarcia w przypadku przepływu laminarnego.

W tym celu przepisujemy równanie (6.19) w postaci

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{8\mu l v_{\text{śr}}}{R^2} = \frac{32\mu v_{\text{śr}}}{d^2} l. \quad (6.21)$$

Otrzymane wyrażenie przekształcimy do postaci

$$\Delta p = \frac{64\nu}{v_{\text{śr}} d} \frac{l}{d} \frac{v_{\text{śr}}^2}{2}.$$

Wprowadzając liczbę Reynoldsa

$$Re = \frac{v_{\text{śr}} d}{\nu}$$

otrzymamy

$$\Delta p = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{\rho v_{sr}^2}{2}. \quad (6.22)$$

Porównując wzór (6.22) ze wzorem na straty ciśnienia w postaci Darcy - Weisbacha

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{sr}^2}{2}, \quad (6.23)$$

gdzie λ jest bezwymiarowym współczynnikiem strat na tarcie w przewodzie, zwanym również współczynnikiem strat liniowych - otrzymamy

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (6.24)$$

Ze wzoru (6.22) wynika liniowa zależność straty ciśnienia od prędkości przepływu laminarnego.

Wartości współczynnika strat liniowych otrzymane ze wzoru (6.24) są zgodne z doświadczeniem w przedziale liczb Reynoldsa, odpowiadających laminarnemu przepływowi w przewodzie o przekroju kołowym.

Naprężenia styczne ze wzoru Newtona

$$\tau = -\mu \frac{dv_x}{dr}.$$

Gradient prędkości wyznaczmy z równania (6.15)

$$\frac{dv_x}{dr} = - \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{r}{2},$$

stąd

$$\tau = \frac{\Delta p}{l} \frac{r}{2}.$$

Wzór ten określa liniowy rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym przewodu od $\tau = 0$ na osi do $\tau_0 = \frac{\Delta p}{l} \frac{R}{2}$ na ścianie.