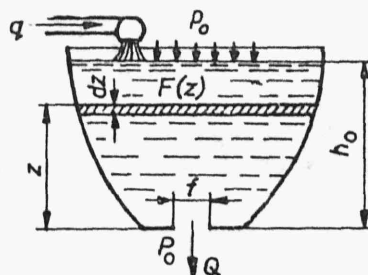


#### 5.2.4. NIEUSTALONY WYPŁYW CIECZY

W poprzednich zagadnieniach zakładaliśmy ustalony wypływ cieczy, tj. że poziom cieczy w zbiorniku w czasie wypływu jest stały. Rozważmy teraz najogólniejszy przypadek opróżnienia zbiornika przy nieustalonym wypływie przez mały otwór w dnie naczynia, tj. przy zmiennym poziomie zwierciadła cieczy.

Oznaczmy przez  $h_0$  początkowy poziom zwierciadła cieczy wzniesiony nad otworem o przekroju  $f$ , przez  $z$  - wysokość położenia dowolnego zmiennego przekroju zbiornika  $F(z)$  nad otworem, przez  $q$  - wydatek cieczy dopływającej do zbiornika (rys. 5.19). Zakładamy, że wydatek dopływowy  $q$  jest mniejszy od wydatku  $Q$  cieczy wypływającej ze zbiornika  $q < Q$ .

Chwilowy wydatek napiszemy w postaci



Rys.5.19

$$Q_z = \mu f \sqrt{2g z}.$$

Przyjmijmy, że po jakimś czasie poziom zwierciadła w zbiorniku obniżył się do wysokości  $z$ . Po czasie  $dt$  poziom obniżył się jeszcze o  $dz$ , a objętość warstwy elementarnej będzie  $dV = F(z)dz$ .

Objętość cieczy wypływającej w czasie  $dt$  z uwzględnieniem wydatku dopływowego  $q$  wyrazi się zależnością

$$dV = -(Q_z - q) dt.$$

Porównując objętość warstwy elementarnej z objętością wypływającej cieczy z uwzględnieniem wzoru na chwilowy wydatek, otrzymamy

$$(\mu f \sqrt{2g z} - q) dt = -F(z) dz,$$

stąd

$$dt = \frac{-F(z) dz}{\mu f \sqrt{2g z} - q}.$$

Czas potrzebny do obniżenia poziomu zwierciadła cieczy od początkowego położenia  $h_0$  do dowolnego położenia  $z$

$$t = \int_z^{h_0} \frac{F(z) dz}{\mu f \sqrt{2g z} - q}. \quad (5.9)$$

Czas całkowitego opróżnienia zbiornika

$$T = \int_0^{h_0} \frac{F(z) dz}{\mu f \sqrt{2g z - q}} \quad (5.10)$$

Czas opróżnienia zbiornika bez uwzględnienia wydatku dopływowego wyznaczymy przyjmując  $q = 0$

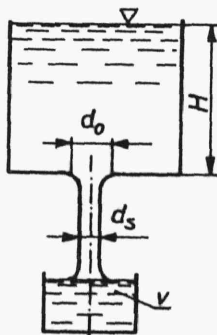
$$t = \int_z^{h_0} \frac{F(z) dz}{\mu f \sqrt{2g z}} = \frac{1}{\mu f \sqrt{2g}} \int_z^{h_0} \frac{F(z) dz}{\sqrt{z}} \quad (5.11)$$

W szczególnym przypadku, gdy przekrój poziomy zbiornika jest stały, a więc  $F = \text{const}$ , otrzymamy

$$t = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}} \left( h_0^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}} \right) \quad (5.12)$$

$$T = \frac{2F}{\mu f} \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \quad (5.13)$$

**Przykład 5.3.** Objętość wody  $V = 10$  l wypłynęła w ciągu czasu  $t = 32,8$  s przez otwór o średnicy  $d_0 = 10$  mm, znajdujący się na głębokości  $H = 2$  m od zwierciadła wody; zmierzona średnica wypływającej strugi wody  $d_s = 8$  mm (rys. 5.20). Określić współczynnik prędkości, kontrakcji, wydatku.



Rys.5.20

**Rozwiązanie.** Teoretyczna prędkość wypływu

$$v = \sqrt{2g H} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 6,25 \text{ m/s}.$$

Rzeczywista prędkość wypływu

$$v_r = \frac{Q}{f} = \frac{V}{t f} = \frac{V}{t \pi \left( \frac{d_s}{2} \right)^2} = \frac{0,01}{32,8 \cdot 3,14 \cdot 0,004^2} =$$

$$= 6,05 \text{ m/s}.$$

Współczynnik prędkości

$$\alpha = \frac{v_r}{v} = \frac{6,05}{6,25} = 0,97.$$

Współczynnik kontrakcji

$$\beta = \frac{f}{f_o} = \frac{\left(\frac{d_s}{2}\right)^2}{\left(\frac{d_o}{2}\right)^2} = \frac{8^2}{10^2} = 0,64.$$

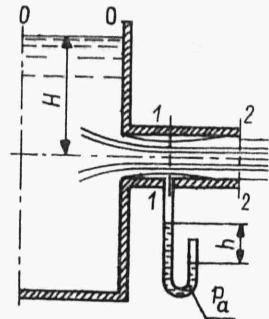
Współczynnik wydatku

$$\mu = \alpha \beta = 0,97 \cdot 0,64 = 0,62.$$

Przykład 5.4. Przy wypływie wody ze zbiornika przez zewnętrzną walcową przystawkę wykonaną ze szkła, zauważono przewężenie strugi. W związku z tym między ścianką przystawki a strugą powstał zamknięty obszar podciśnienia (rys.5.21). Należy określić wielkość tego podciśnienia  $h$  za pomocą manometru rtęciowego przyłączonego do przystawki w miejscu powstawania podciśnienia, jeśli przystawka znajduje się na głębokości  $H = 3,6$  m.

Rozwiązanie. Z równania Bernoulliego ułożonego dla przekrojów 0-0, 1-1

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + H = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + 0.$$



Rys.5.21

Zakładając, że  $v_o = 0$  znajdujemy wyrażenie na ciśnienie

$$\frac{p_a - p_1}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} - H.$$

Z warunku ciągłości  $Q_1 = Q_2$

$$\frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2$$

( $d_1$  - średnica przewężenia strumienia) otrzymamy

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2, \text{ ale } \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{1}{\beta},$$

gdzie  $\beta$  - współczynnik kontrakcji,

więc

$$v_1 = \frac{v_2}{\beta}.$$

Prędkość  $v_2$  odpowiada prędkości rzeczywistej  $v_r$

$$v_2 = v_r = \alpha \sqrt{2g H}.$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$v_1 = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{2g H}.$$

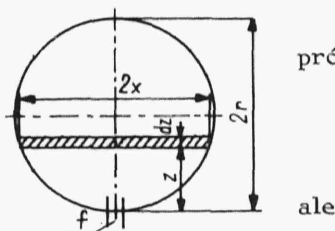
Wyrażenie na podciśnienie będzie mieć teraz postać:

$$\frac{p_a - p_1}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \frac{2g H}{2g} - H = H \left[ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1 \right],$$

$$\alpha = 0,82; \quad \beta = 0,64.$$

A więc podciśnienie  $h$  wynosi

$$h = \frac{p_a - p_1}{\gamma} = 3,6 \left[ \left(\frac{0,82}{0,64}\right)^2 - 1 \right] = 2,3 \text{ m H}_2\text{O}.$$



Rys. 5.22

Przykład 5.5. Obliczyć czas całkowitego opróżnienia kulistego zbiornika (rys. 5.22).

Rozwiązanie. Dowolny przekrój poziomy

$$F = \pi x^2,$$

$$x^2 = r^2 - (r - z)^2 = 2r z - z^2.$$

Czas całkowitego opróżnienia

$$T = \frac{1}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^{2r} \frac{F dz}{\sqrt{z}} = \frac{\pi}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^{2r} \frac{2r z - z^2}{\sqrt{z}} dz.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

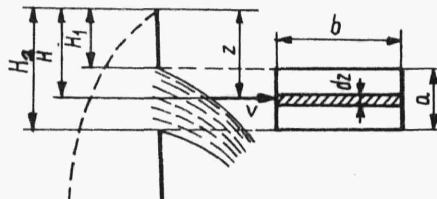
$$T = \frac{8}{5} \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\mu f \sqrt{2g} \, 2r} = \frac{8}{5} \frac{V}{\mu f \sqrt{2g} \, D},$$

gdzie:  $D$  - średnica kuli,  
 $V$  - objętość kuli.

### 5.3. WYPŁYW PRZES DUŻE OTWORY

#### 5.3.1. WYPŁYW USTALONY

Przy obliczaniu wypływu cieczy przez mały otwór mogliśmy przyjąć, że prędkość wypływu we wszystkich punktach przekroju strugi jest jednakowa a średnie zagłębienie otworu stanowi odległość od jego środka do zwierciadła cieczy w zbiorniku. W przypadku jednak wypływu przez duży otwór nie można rozpatrywać średniej prędkości wypływu, ponieważ strugi dolne mają znacznie większą prędkość wypływu niż górne.



Rys.5.23

Rozważmy ustalony wypływ cieczy przez otwór prostokątny o szerokości  $b$  i wysokości  $a$  (rys.5.23); oznaczając przez  $H_1 = \text{const}$  i  $H_2 = \text{const}$  - zagłębienia górnej i dolnej krawędzi danego otworu, przez  $H$  - wysokość położenia zwierciadła cieczy od środka otworu.

Wyodrębnijmy w przekroju otworu na głębokości  $z$  elementarną powierzchnię o wysokości  $dz$  i szerokości  $b$ . Traktując tę powierzchnię jako mały otwór możemy przyjąć, że prędkość wypływu przez ten otwór  $v = \sqrt{2g} \, z$ . Elementarny wydatek przez powierzchnię elementarnego paska  $dF = b \, dz$  jest równy

$$dQ = v_r \, dF = \mu \, b \sqrt{2g} \, z \, dz.$$

Całkując to równanie w granicach od  $H_1$  do  $H_2$  otrzymamy całkowity wydatek wypływu cieczy

$$Q = \mu \, b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} \sqrt{z} \, dz,$$