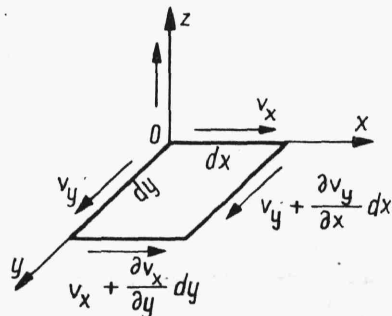


3.7.5. TWIERDZENIE STOKESA

Związek między cyrkulacją prędkości a składowymi prędkościami chwilowego obrotu $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ otrzymamy w następujący sposób. Rozpatrzmy prostokątną ściankę elementarnego prostopadłościanu w płaszczyźnie xy o bokach dx, dy . Oznaczmy powierzchnię tej ścianki $dF_z = dx dy$ (rys.3.25).

Określmy teraz cyrkulację prędkości wzdłuż elementarnego konturu jako dodatnią w kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości, zaś ujemną w kierunku przeciwnym do kierunku prędkości.

W tym przypadku różniczkę zupełną cyrkulacji prędkości napiszemy w postaci



Rys.3.25

$$d\Gamma_z = v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx - v_y dy,$$

czyli

$$d\Gamma_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Uwzględniając zależności (3.9), otrzymamy

$$d\Gamma_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dx dy$$

lub

$$d\Gamma_z = 2\omega_z dF_z.$$

Analogicznie otrzymamy zależności elementarnych cyrkulacji od składowych prędkości kątowej $\vec{\omega}$ w pozostałych płaszczyznach:

$$d\Gamma_x = 2\omega_x dF_x,$$

$$d\Gamma_y = 2\omega_y dF_y.$$

Składowe cyrkulacji prędkości można zapisać:

$$\Gamma_x = 2 \int_F \omega_x dF_x,$$

$$\Gamma_y = 2 \int_F \omega_y dF_y,$$

$$\Gamma_z = 2 \int_F \omega_z dF_z,$$

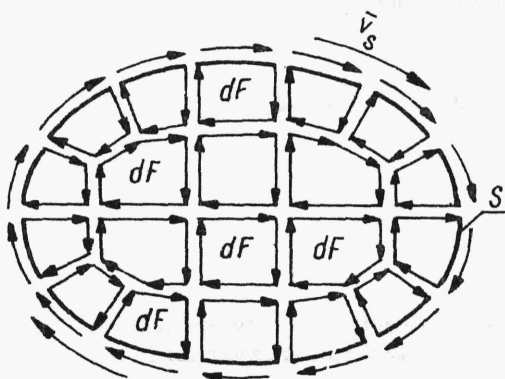
oraz cyrkulacja ze wzoru (3.32)

$$\Gamma = \oint_S (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = 2 \int_F \omega dF. \quad (3.34)$$

Porównując zależności (3.34) i (3.31), otrzymamy

$$\Gamma = I. \quad (3.35)$$

Możemy więc twierdzenie Stokesa sformułować w następujący sposób:



Rys.3.26

Cyrkulacja prędkości wzdłuż konturu zamkniętego jest równa sumie natężeń elementarnych strug wirowych, przechodzących przez powierzchnię ograniczoną tym konturem.

Łatwo wykazać, że dzieląc całą powierzchnię F ograniczoną konturem S na elementarne poletka dF , w których kierunek cyrkulacji (pokazany na rys.3.26 strzałkami) jest zgodny z kierunkiem cyrkulacji wzdłuż konturu S, suma cyrkulacji wzdłuż wszystkich

boków stykających się poletek wewnątrz rozpatrywanego konturu jest równa zero. Przeto suma cyrkulacji elementarnych równa jest cyrkulacji wzdłuż konturu S ograniczającego poletka brzegowe.