

osobliwy, w którym prędkość $v \rightarrow \infty$. W nieskończoności ($r \rightarrow \infty$) prędkość dąży do zera ($v \rightarrow 0$).

Dla wyznaczenia linii prądu piszemy różniczkę zupełną funkcji prądu

$$d\psi = v_x dy - v_y dx = \frac{-q}{2} (y dy + x dx) .$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymamy

$$\psi = -\frac{1}{2} q \ln r^2 + C_1 = -q \ln r + C_1 = \text{const} ,$$

stąd

$$r = \text{const} .$$

Możemy więc powiedzieć, że linie prądu tego ruchu będą kołami współśrodkowymi, linie jednakowego potencjału prędkości - prostymi, przechodzącymi przez początek układu (rys.3.17). Ruch taki nazywamy płaskim wirem kołowym.

3.6.5. NAKŁADANIE PRZEPŁYWÓW

Przepływ równoległy i źródło płaskie. Rozważmy źródło płaskie w początku układu i przepływ równoległy do osi x ze stałą prędkością $v_0 = \text{const}$ (rys.3.18).

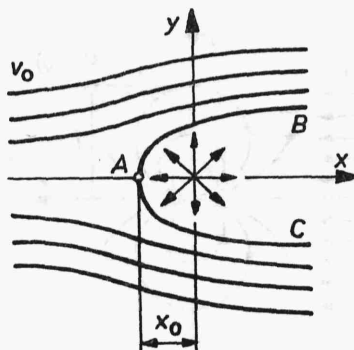
Potencjał prędkości dla tak złożonego ruchu będzie równy:

$$\varphi = v_0 x - \frac{Q}{2\pi} \ln r ; \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) .$$

Składowe prędkości:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{r^2} ,$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{r^2} .$$



Rys.3.18

Równanie linii prądu ma postać

$$\frac{dx}{v_o - \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{r^2}} = \frac{-dy}{\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{r^2}}.$$

Składowe prędkości na osi x , gdy $y = 0$

$$v_x \Big|_{y=0} = v_o - \frac{Q}{2\pi x}; \quad v_y \Big|_{y=0} = 0.$$

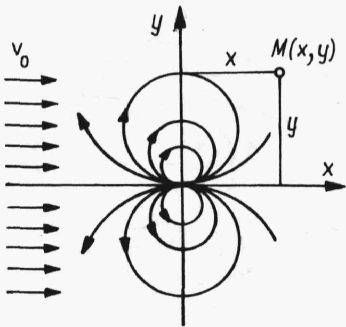
Suma prędkości przepływu równoległego v_o i przeciwnie skierowanej prędkości przepływu źródłowego $\frac{Q}{2\pi x_o}$ jest równa zeru w punkcie A

$$v_o = - \frac{Q}{2\pi x_o} = 0,$$

skąd

$$x_o = \frac{Q}{2\pi v_o} = OA$$

Krzywa BAC oddziela ciecz wypływającą ze źródła od obszaru równoległego przepływu, który można traktować jako opływ dookoła ciała ograniczonego powierzchnią walcową BAC.



Rys.3.19

Przepływ równoległy i dipol. Zbadajmy teraz ruch złożony z przepływu o stałej prędkości $v_o = \text{const}$, równoległego do osi x i dipola, znajdującego się w początku układu (rys.3.19).

Potencjał prędkości i funkcje prądu tego ruchu będą równe:

$$\varphi = v_o x + m \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\psi = v_o y - m \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Równanie linii prądu $\psi(x,y) = C$ ma postać

$$v_0 y - m \frac{y}{x^2 + y^2} = C$$

lub

$$v_0 y \left(1 - \frac{m}{v_0} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C.$$

Jeżeli $\psi = 0$, to otrzymamy równanie zerowej linii prądu

$$v_0 y \left(1 - \frac{m}{v_0} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Równanie to jest spełnione, gdy

1) $y = 0$,

2) $1 - \frac{m}{v_0} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$

lub

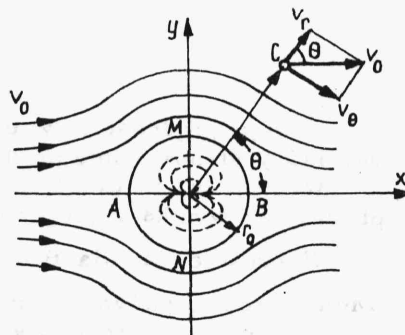
$$x^2 + y^2 = \frac{m}{v_0}.$$

Pierwsze równanie wyznacza oś x , a drugie okrąg ze środkiem w początku

układu o promieniu $r_0 = \sqrt{\frac{m}{v_0}}$ (rys.

3.20).

W rozważanym więc ruchu cieczy istnieje struga cieczy przyływająca wzdłuż osi x , natomiast w punkcie A strumień rozdziela się na dwa odgałęzienia opływające okrąg o promieniu r_0 . Wszystkie linie prądu, znajdujące się w pobliżu dipola zawarte są wewnątrz okręgu AMBN. Obraz ruchu na zewnątrz okręgu traktowany jest jako opływ dokoła walca o promieniu r_0 .



Rys.3.20

Znając promień $r_0 = \sqrt{\frac{m}{v_0}}$, możemy wyznaczyć $m = v_0 r_0^2$.

Określimy we współrzędnych biegunowych potencjał prędkości i funkcję prądu uwzględniając powyższy związek:

$$\varphi = v_o x \left(1 + \frac{r_o^2}{x^2 + y^2} \right) = v_o \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) r \cos \Theta,$$

$$\psi = v_o y \left(1 - \frac{r_o^2}{x^2 + y^2} \right) = v_o \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) r \sin \Theta.$$

Składowe prędkości w kierunku promienia wodzącego r i w kierunku do niego prostopadłym są równe:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[v_o \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) r \cos \Theta \right] = v_o \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \cos \Theta,$$

$$v_o = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left[v_o r \cos \Theta + \frac{r_o^2 v_o}{r} \cos \Theta \right] = -v_o \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \sin \Theta$$

Na powierzchni walca, gdy $r = r_o$, otrzymamy:

$$v_r = 0; \quad v_\theta = -2v_o \sin \Theta.$$

A więc prędkość oływu cieczy dokoła walca jest styczna do okręgu, który stanowi linię prądu.

W punkcie B dla $\Theta = 0$ i w punkcie A ($\Theta = \pi$) prędkości przepływu, jak wynika z powyższego związku, równe są zeru.

W punkcie M dla $\Theta = \frac{\pi}{2}$ prędkość przepływu osiągnie maksymalną wartość równą podwójnej prędkości przepływu v_o .

Dla $r \rightarrow \infty$ otrzymamy:

$$v_r = v_o \cos \Theta; \quad v_\theta = -v_o \sin \Theta.$$

Omawiany powyżej oływ walca nazywamy oływem bezcyrkulacyjnym.