

### 3.6.1. FUNKCJA PRĄDU

Różniczkowe równanie linii prądu w ruchu płaskim napiszemy w postaci

$$v_x dy - v_y dx = 0. \quad (3.20)$$

Równanie ciągłości dla ruchu płaskiego płynu nieściśliwego

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (3.21)$$

lub po uwzględnieniu zależności:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

otrzymamy równanie ciągłości dla płaskiego ruchu potencjalnego w postaci równania Laplace'a

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.22)$$

Równanie  $\varphi(x,y) = \text{const}$  przedstawia rodzinę krzywych, zwanych liniami ekwipotencjalnymi prędkości.

Z równania ciągłości (3.21) wynika, że równanie linii prądu (3.20) stanowi różniczkę zupełną funkcji  $\psi(x,y)$  zwanej funkcją prądu

$$d\psi = v_x dy - v_y dx. \quad (3.23)$$

Równanie  $\psi(x,y) = \text{const}$  przedstawia rodzinę krzywych, zwanych liniami prądu.

Różniczkę zupełną  $d\psi$  przedstawimy w postaci

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (3.24)$$

Porównując równania (3.23), (3.24), otrzymamy następujące zależności:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.25)$$

### 3.6.2. ZWIĄZEK MIĘDZY FUNKCJĄ PRĄDU A POTENCJAŁEM PRĘDKOŚCI

Składowe prędkości w płaskim ruchu potencjalnym równe są jak wiadomo, cząstkowym pochodnym potencjału prędkości  $\varphi(x,y)$ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Z porównania tych warunków z zależnościami (3.25) wynikają związki, zwane równaniami Cauchy'ego i Riemana:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.26)$$

Po zrózniczkowaniu tych równań otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

skąd

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.27)$$

Wynika stąd, że w ruchu potencjalnym (bezwirowym) funkcje prądu, podobnie jak i potencjał prędkości, spełniają równanie Laplace'a, a więc są funkcjami harmonicznymi.

Mnożąc odpowiednio stronami równania (3.26) otrzymamy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.28)$$

Równanie to jest warunkiem ortogonalności dwu rodzin krzywych:

$$\varphi(x,y) = \text{const} \quad \text{ i } \quad \psi(x,y) = \text{const},$$