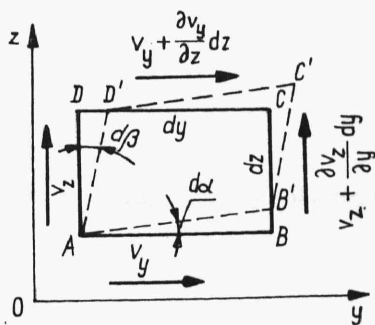


### 3.4.2. PRĘDKOŚĆ ODKSZTAŁCEŃ KĄTOWYCH ELEMENTU PŁYNU

Rozważmy podstawę elementarnego prostopadłościanu ABCD o bokach  $dy, dz$ , leżącą w płaszczyźnie równoległej do rzutni  $y, z$  (rys.3.8).



Rys.3.8

Składowe prędkości w kierunku osi  $y$  punktów  $A$  i  $D$  prostokąta oznaczmy odpowied-

nio przez  $v_y$  oraz  $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz$ . Analogicznie wzdłuż osi  $z$  składowe prędkości punktów  $A$  i  $B$  będą  $v_z$  i  $v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy$ .

Wskutek różnic prędkości prostokątny element powierzchniowy ABCD odkształci się, przyjmując po upływie czasu  $dt$  kształt równoległoboku  $AB'C'D'$ , jeżeli  $\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ . Bok  $AB$  obróci się doko-

ła osi  $x$  o kąt  $d\alpha$ , a bok  $AD$  o kąt  $d\beta$ . W związku z tym kąt prosty  $DAB$  po odkształceniu elementu płynu zmniejszy się o wielkość  $(d\alpha + d\beta)$ .

Aby wyznaczyć kąty  $d\alpha$  i  $d\beta$  musimy określić przesunięcia  $BB'$  i  $DD'$ . Wartość przesunięcia  $BB'$  równa jest iloczynowi promienia obrotu  $dy$  przez kąt  $d\alpha$  lub różnicy składowych prędkości punktów  $A$  i  $B$  mnożonej przez czas  $dt$ , a zatem

$$d\alpha dy = \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy - v_z \right) dt = \frac{\partial v_z}{\partial y} dy dt,$$

czyli

$$d\alpha = \frac{\partial v_z}{\partial y} dt.$$

Analogicznie

$$d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial z} dt.$$

Odkształcenie kątowe

$$d\alpha + d\beta = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dt.$$

Składowa prędkości odkształcenia kątowego w kierunku osi  $x$  równa jest stosunkowi odkształcenia kątowego do czasu  $dt$ , a więc

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = 2\theta_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

czyli

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right).$$

Analogicznie:

$$\begin{aligned} \theta_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.4.3. PRĘDKOŚCI KĄTOWE CHWILOWEGO OBROTU ELEMENTU

Oprócz odkształcenia elementu obserwujemy na rys.3.8 obrót prostokąta ABCD dokoła osi  $x$  prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Miarą obrotu elementu na płaszczyźnie  $zOy$  jest kąt obrotu przekątnej

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} (d\alpha - d\beta).$$

Podstawiając w tej zależności:

$$d\alpha = \frac{\partial v_z}{\partial y} dt \quad \text{i} \quad d\beta = \frac{\partial v_y}{\partial z} dt$$

otrzymamy prędkość kątową obrotu elementu dokoła osi  $x$

$$\omega_x = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\alpha - d\beta}{2 dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right).$$

Przez cykliczne przestawienie indeksów otrzymamy składowe prędkości kątowej chwilowego obrotu elementu płynu w otoczeniu punktu  $A$ :