

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial t},$$

$$w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Uwzględniając zależności:

$$\frac{dx}{dt} = v_x; \quad \frac{dy}{dt} = v_y; \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

otrzymujemy:

$$w_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

$$w_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t},$$

$$w_z = \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}.$$

Podobnie ciśnienie i gęstość wyrazimy w postaci:

$$p = p(x, y, z, t); \quad \rho = \rho(x, y, z, t).$$

W mechanice płynów posługujemy się przeważnie metodą Eulera, która jest dogodniejsza od metody Lagrange'a w badaniu ruchów płynów.

### 3.2. POJĘCIA PODSTAWOWE TEORII PRZEPŁYWÓW

Ruch płynu, w którym wektor prędkości  $\bar{v}$ , ciśnienie  $p$ , gęstość  $\rho$  są funkcjami położenia i czasu, nazywamy ruchem nieustalonym. Anali-

tycznie wszystkie te wielkości wyraża się w postaci funkcji określających ich zależność od współrzędnych punktu  $x, y, z$  i od czasu  $t$ :

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t),$$

$$p = p(x, y, z, t),$$

$$\varrho = \varrho(x, y, z, t).$$

Jeżeli parametry przepływu  $\bar{v}, p$  i  $\varrho$  zależą tylko od położenia, to taki ruch nazywamy ustalonym:

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z),$$

$$p = p(x, y, z),$$

$$\varrho = \varrho(x, y, z).$$

Ruch jest jednowymiarowy nieustalony wtedy, gdy wektor prędkości  $\bar{v}$ , ciśnienie  $p$  i gęstość są funkcjami tylko jednej współrzędnej położenia oraz czasu  $t$ , wówczas w przypadku przepływu (na przykład wzdłuż osi  $x$ ) napiszemy:

$$\bar{v} = \bar{v}(x, t),$$

$$p = p(x, t),$$

$$\varrho = \varrho(x, t).$$

Dla przepływu płaskiego nieustalonego wektor prędkości, ciśnienie i gęstość są funkcjami dwu współrzędnych położenia oraz czasu  $t$ .

Jeżeli na przykład  $v_z = 0$ , to mamy wówczas:

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, t),$$

$$p = p(x, y, t),$$

$$\varrho = \varrho(x, y, t).$$

Torem elementu płynu nazywamy linię, która zakreśla w przestrzeni poruszający się element płynu. Równanie toru elementu płynu otrzymujemy rozważając jego przesunięcie w przestrzeni w elementarnym czasie  $dt$ .

A więc:

$$dx = v_x dt; \quad dy = v_y dt; \quad dz = v_z dt.$$

Linia prądu (wektorową linią pola) nazywamy linię przeprowadzoną w polu prędkości, charakteryzującą się tym, że w danej chwili wektory prędkości są do niej styczne we wszystkich punktach (rys.3.3) W ruchu ustalonym linie prądu pokrywają się z torami poszczególnych elementów. W tym przypadku linie prądu nie mogą się przecinać, gdyż

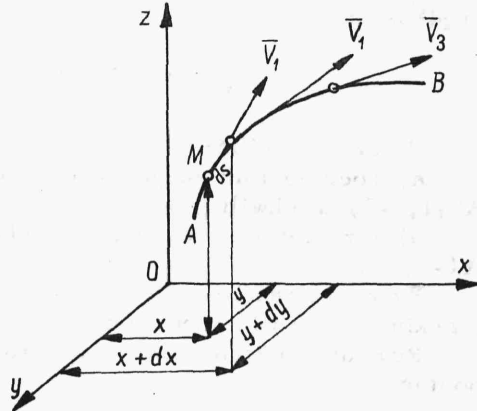
przez dowolny punkt obszaru przepływu ustalonego przechodzi tylko jedna linia prądu.

W ruchu nieustalonym linia prądu nie pokrywa się z torem, a element płynu przechodzi z jednej linii prądu na drugą.

Równanie różniczkowe linii prądu. Z warunku styczności w danym punkcie linii prądu i wektora prędkości wynika, że

$$\vec{v} \times d\vec{s} = 0.$$

Uwzględniając następujące zależności wektorów prędkości  $\vec{v}$  i elementarnego przesunięcia w kierunku linii prądu  $d\vec{s}$ :



Rys.3.3

$$\vec{v} = \bar{i} v_x + \bar{j} v_y + \bar{k} v_z; \quad d\vec{s} = \bar{i} dx + \bar{j} dy + \bar{k} dz$$

przedstawimy iloczyn wektorowy w postaci wyznacznika

$$\vec{v} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie:  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  są to wektory jednostkowe skierowane wzdłuż odpowiednich osi współrzędnych.

Rozwijając względem pierwszego wiersza, otrzymamy:

$$v_y dz - v_z dy = 0,$$

$$v_z dx - v_x dz = 0,$$

$$v_x dy - v_y dx = 0.$$

Otrzymane równanie można przedstawić w postaci

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t)}. \quad (3.1)$$

Jest to tzw. równanie różniczkowe linii prądu, które przedstawia układ dwu równań różniczkowych.

Przykład 3.1. Przepływ jest określony przez następujące składowe prędkości:

$$v_x = x + t, \quad v_y = -y + t, \quad v_z = 0.$$

Należy określić:

- a) rodzinę linii prądu oraz linię prądu przechodzącą przez punkt A  $A(-1, -1)$  w chwili  $t = 0$ ;
- b) tor elementu M, który w chwili  $t = 0$  znajdował się w punkcie  $A(-1, -1)$ .

Rozwiązanie. Jak widać, rozważany przepływ jest przepływem płaskim ( $v_z = 0$ ), nieustalonym.

Równanie różniczkowe linii prądu (3.1) będzie miało następującą postać

$$\frac{dx}{x + t} = \frac{dy}{-y + t}.$$

Całkując otrzymane równanie mamy

$$\ln(x + t) = -\ln(-y + t) + \ln C$$

lub

$$(a) \quad (x + t)(t - y) = C.$$

Wynika z tego, że linie prądu stanowią w każdej określonej chwili czasu rodzinę hiperbol. W celu znalezienia linii prądu przechodzącej w chwili  $t = 0$  przez punkt  $A(-1, -1)$  podstawiamy powyższe wartości  $t, x, y$  do równania (a); otrzymamy wówczas

$$(-1) \cdot (+1) = C, \text{ tzn. } C = -1.$$

Równanie poszukiwanej linii prądu przybierze postać

$$x y = 1.$$

Dla określenia toru trzeba scałkować następujące równania:

$$\frac{dx}{dt} = x + t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + t,$$

lub:

$$\frac{dx}{dt} - x = t,$$

$$\frac{dy}{dt} + y = t.$$

Stwierdzamy, że każde z tych równań jest niejednorodnym równaniem liniowym ze stałymi współczynnikami. A więc:

$$x = C_1 e^t - t - 1,$$

$$y = C_2 e^{-t} + t - 1.$$

W celu otrzymania równania toru, po którym porusza się element M znajdujący się w chwili  $t = 0$  w punkcie  $A(-1, -1)$ , określimy wartości stałych  $C_1$  i  $C_2$ . Podstawiając do powyższych zależności  $t = 0$ ,  $x = -1$ ,  $y = -1$ , otrzymamy  $C_1 = C_2 = 0$ .

W ten sposób dla poszukiwanego toru będziemy mieli:

$$x = -t - 1,$$

$$y = t - 1.$$

Skąd rugując  $t$  znajdujemy równanie toru elementu płynu

$$x + y = -2,$$

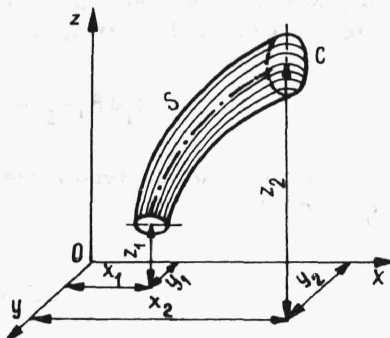
jest to równanie prostej.

Powyższy przykład wykazuje zatem, że w przepływie nieustalonym linie prądu i tory elementów płynu na ogół nie pokrywają się.

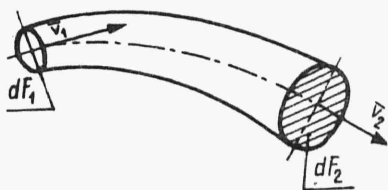
Rurką prądu nazywamy powierzchnię  $S$ , utworzoną z linii prądu, przechodzących przez wszystkie punkty kontury zamkniętego  $C$ , leżącego w obszarze przepływu (rys.3.4).

Masa płynu wypełniająca rurkę prądu nosi nazwę strumienia. Strumień, którego przekrój poprzeczny jest nieskończenie mały  $dF$  nazywamy strugą elementarną (rys.3.5).

W ruchu ustalonym struga elementarna posiada następujące własności:



Rys.3.4



Rys.3.5

1. Kształt strugi stanowiącej wiązkę linii prądu nie ulega zmianie, ponieważ przebieg linii prądu jest niezależny od czasu.

2. Płyn nie może przepływać przez powierzchnię boczną strugi, gdyż jej kontur ograniczony jest liniami prądu, do których wektory prędkości przepływu są styczne.

3. Prędkości przepływu we wszystkich punktach przekroju poprzecznego strugi można traktować jako jednakowe z powodu nieznaczących wymiarów tego przekroju.

Pojęcie strumienia i strugi wprowadzamy po to, aby otrzymać poglądowy obraz przepływu płynu. Całą przestrzeń wypełnioną płynem możemy podzielić na strumienie lub na strugi (elementarne).

Przy rozwiązywaniu szeregu zadań, dotyczących obliczeń przepływów płynów rzeczywistych w przewodach można traktować całą przestrzeń, wypełnioną płynem, jako jeden strumień. W przepływach tych zachodzą zmiany prędkości w przekroju poprzecznym strumienia. Aby uprościć obliczenie przepływu w przewodach, wyznaczamy średnią wartość prędkości  $v_{sr}$  w przekroju poprzecznym strumienia.

Przekrojem poprzecznym strumienia lub strugi nazywamy powierzchnię prostopadłą do wszystkich linii prądu. Jeśli strumień składa się z równoległych linii prądu, to jego przekroje poprzeczne są płaszczyznami. Ogólnie biorąc, przekroje strumienia mają kształt powierzchni krzywych. W przypadku strugi (rys.3.5) przyjmujemy przekroje poprzeczne płaskie, ze względu na ich bardzo małe wymiary.

Warunek ciągłości w ruchu ustalonym jest spełniony wówczas, gdy w rozważanym obszarze przepływu rurki prądu będą całkowicie wypełnione płynem. Zgodnie z zasadą zachowania masy przez każdy przekrój strugi przepływa w jednostce czasu jednakowa ilość płynu. Masa płynu, przepływająca w jednostce czasu przez dany przekrój strugi, nazywa się masowym natężeniem przepływu  $Q_m$ , równa jest iloczynowi prędkości przez pole przekroju i gęstość płynu w danym przekroju. A więc wzdłuż całej strugi płynu ściśliwego zachodzi związek

$$\rho_1 dF_1 v_1 = \rho_2 dF_2 v_2 = dQ_m = \text{const.} \quad (3.2)$$

W przypadku płynów nieściśliwych gęstość jest stała, czyli  $\rho = \text{const}$

$$dF_1 v_1 = dF_2 v_2 = dQ, \quad (3.2')$$

gdzie  $Q$  - oznacza objętościowe natężenie przepływu.

Równanie powyższe nosi nazwę równania ciągłości dla strugi.  
Równanie ciągłości dla strumienia płynu nieściśliwego

$$F v_{\text{śr}} = Q = \text{const} \quad (3.3)$$

oznacza, że iloczyn średniej prędkości przez pole przekroju jest stały w każdym przekroju strumienia.

Prędkość średnią obliczamy ze wzoru

$$v_{\text{śr}} = \frac{1}{F} \int_F v_i dF,$$

gdzie  $v_i$  oznacza prędkości w każdym punkcie przekroju.

Natężenie objętościowe strumienia  $Q$  można wyrazić stosunkiem objętości płynu  $\Delta V$ , przepływającej przez dany przekrój strumienia, do czasu przepływu  $\Delta t$ , a więc

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Średnią prędkość w przekroju poprzecznym możemy obliczyć z zależności (3.3).

Podane równania ciągłości dla strugi i strumienia odnoszą się do przepływów jednoparametrowych, to znaczy, że dla opisanego przepływu wystarczy jedna tylko zmienna niezależna, a mianowicie odległość rozpatrywanego przekroju od dowolnego punktu początkowego, mierzona wzdłuż środkowej linii rurki prądu.

### 3.3. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

W rozważaniach przepływów przestrzennych, w których zwykle wyznacza się składowe prędkości  $v_x, v_y, v_z$  ciśnienie  $p$  oraz gęstość  $\rho$  jako funkcje współrzędnych przestrzennych  $x, y, z$  i czasu  $t$ , równanie ciągłości wyprowadza się z równości masy płynu, która wpływa i wypływa z elementarnego prostopadłościanu o krawędziach  $dx, dy, dz$  (rys.3.6).

Rozważmy ogólny przypadek nieustalonego przepływu płynu ściśliwego przyjmując  $\rho(x, y, z, t)$ .

W kierunku osi  $x$  wpływa w czasie  $dt$  do elementarnego prostopadłościanu przez lewą ściankę o powierzchni  $dy dz$  masa płynu  $\rho v_x dy dz dt$ . Przez przeciwległą ściankę, w tym samym czasie, wypływa masa płynu równa