

2.4. POTENCJAŁ JEDNOSTKOWYCH SIŁ MASOWYCH. POWIERZCHNIE JEDNAKOWEGO CIŚNIENIA

Prawą stronę równania (2.2) można przedstawić w postaci różniczki zupełnej pewnej skalarnej funkcji współrzędnych $U(x,y,z)$, która charakteryzuje się tym, że jej cząstkowe pochodne równe są odpowiednim składowym jednostkowej siły masowej:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Funkcję $U(x,y,z)$ nazywamy potencjałem jednostkowych sił masowych.

Uwzględniając zależności (2.3) w równaniu (2.2) otrzymamy

$$dp = \varrho \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = \varrho dU, \quad (2.4)$$

gdzie $\varrho = \text{const.}$

Po scałkowaniu

$$p = \varrho U + c. \quad (2.5)$$

Wartość stałej całkowania wyznaczy się z warunków brzegowych. Między ciśnieniem a potencjałem jednostkowych sił masowych zachodzi zależność liniowa.

Powierzchnią jednakowego ciśnienia nazywa się geometryczne miejsce punktów, w których panują jednakowe ciśnienia. Na powierzchni jednakowego ciśnienia, $p(x,y,z) = \text{idem}$, czyli różniczka zupełna ciśnienia równa jest zeru: $dp = 0$.

Przyjmując $\varrho \neq 0$, otrzymamy z równania równowagi (2.4)

$$dU = X dx + Y dy + Z dz = 0. \quad (2.6)$$

W tym przypadku różniczka potencjału jednostkowych sił masowych jest równa zeru, czyli $U(x,y,z) = \text{idem}$.

Z rozważań powyższych wynika, że powierzchnia jednakowego ciśnienia jest zarazem powierzchnią jednakowego potencjału sił masowych lub powierzchnią ekwipotencjalną.

Równanie (2.6) wyraża warunek ortogonalności (prostokątności) wektora jednostkowej siły masowej do wektora przemieszczenia, co jest równoznaczne z tym, że praca sił masowych działających na powierzchni ekwipotencjalnej jest równa zeru.

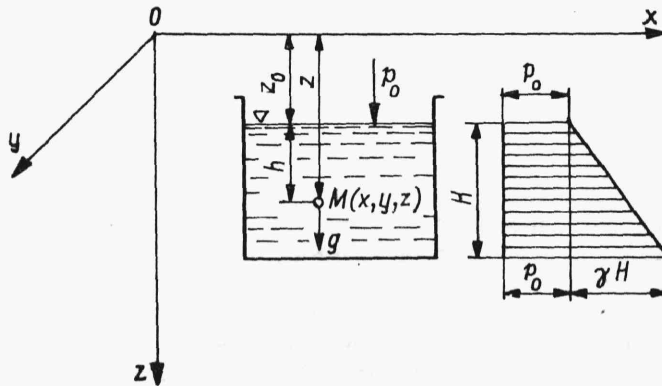
W ten sposób wykazaliśmy, że (wektory jednostkowej siły masowej są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej w każdym punkcie leżącym na tej powierzchni.)

Jedną z powierzchni jednakowego ciśnienia w płynach barotropowych, których gęstość jest funkcją wyłącznie ciśnienia, jest powierzchnia zwierciadła cieczy lub powierzchnia swobodna. Powierzchnią swobodną cieczy nazywamy powierzchnię oddzielającą ciecz od ośrodka gazowego.

2.5. RÓWNOWAGA CIECZY W JEDNORODNYM POLU GRAWITACYJNYM

Rozważmy bardzo istotny dla praktyki szczególny przypadek równowagi cieczy, znajdującej się pod działaniem siły ciężenia jako jedynej siły masowej w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Ciecz znajduje się w nieruchomym naczyniu związanym z prostokątnym układem współrzędnych tak, aby płaszczyzna xy była pozioma a oś z skierowana pionowo w dół (rys.2.4).



Rys.2.4

Składowe jednostkowej siły masowej w dowolnym punkcie $M(x, y, z)$ wynoszą:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = g. \quad (2.7)$$

Podstawiając te wartości do równania (2.2) otrzymujemy różniczkowe równanie rozkładu ciśnienia w obszarze cieczy

$$dp = \rho g dz = \gamma dz. \quad (2.8)$$