

Wykładniki potęgowe $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k, x_1, x_2, \dots, x_k$ dobieramy w taki sposób, aby parametry π były bezwymiarowe.

W tym celu każdemu iloczynowi π przyporządkowujemy równanie wymiarowe, co pozwala obliczyć wartości liczbowe wykładników wymiarowych.

11.7. OGÓLNE UJĘCIE STRAT LINIOWYCH METODĄ ANALIZY WYMIAROWEJ

Posłużymy się metodą analizy wymiarowej dla określenia strat liniowych wywołanych oporami ruchu jednostajnego w przewodzie.

Na podstawie danych doświadczalnych można określić zależność strat liniowych ciśnienia Δp_{sl} od średnicy przewodu d , jego długości l , własności fizycznych cieczy: gęstości ρ i współczynnika lepkości dynamicznej μ , średniej prędkości przepływu w poprzecznym przekroju przewodu v , średniej chropowatości k .

Zależność tę zapiszemy w postaci

$$f\left(\frac{\Delta p_{sl}}{l}, \mu, \rho, d, v, k\right) = 0, \quad (11.44)$$

gdzie straty ciśnienia Δp_{sl} są, jak wiadomo, funkcją liniową długości przewodu l .

W zależności (11.44) mamy $n = 6$ wielkości, których wymiary zawierają $k = 3$ jednostki podstawowe: m, kg, s.

Zgodnie z twierdzeniem π równanie (11.44) można przedstawić w postaci zawierającej $n - k = 3$ bezwymiarowych parametrów

$$f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \quad (11.45)$$

W celu wyznaczenia parametrów π obieramy trzy wielkości podstawowe, np.: ρ, v, d , które zawierają wszystkie jednostki podstawowe i są od siebie wymiarowo niezależne:

$$[m \cdot s^{-1}]^{a_1} \cdot [kg \cdot m^{-3}]^{a_2} \cdot [m]^{a_3} = 1$$

lub

$$[m]^{a_1 - 3a_2 + a_3} \cdot [kg]^{a_2} \cdot [s]^{-a_1} = 1,$$

skąd

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Z pozostałych trzech wielkości tworzymy trzy iloczyny bezwymiarowe:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\Delta p_{sl}}{1} \varrho^{a_1} v^{a_2} d^{a_3}, \\ \pi_2 &= \mu \varrho^{b_1} v^{b_2} d^{b_3}, \\ \pi_3 &= k \varrho^{c_1} v^{c_2} d^{c_3}.\end{aligned}\tag{11.46}$$

Dla wyznaczenia parametrów π_1, π_2, π_3 układamy równania wymiarowe:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}] \cdot [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^{a_1} \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^{a_2} \cdot [\text{m}]^{a_3}, \\ \pi_2 &= [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}] \cdot [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^{b_1} \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^{b_2} \cdot [\text{m}]^{b_3}, \\ \pi_3 &= [\text{m}] \cdot [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^{c_1} \cdot [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]^{c_2} \cdot [\text{m}]^{c_3}.\end{aligned}$$

Dla wyznaczenia wykładników potęgowych posłużymy się takim porównaniem wymiarów, aby parametry π_1, π_2, π_3 były bezwymiarowe, co można wyrazić w postaci $[\text{m}]^0 \cdot [\text{kg}]^0 \cdot [\text{s}]^0$.

a. Obliczenie parametru π_1

Porównując wykładniki potęg przy jednostkach podstawowych otrzymamy następujące trzy równania:

$$\text{dla } m: -2 - 3a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

$$\text{kg: } 1 + a_1 = 0,$$

$$\text{s: } -2 - a_2 = 0.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 1.$$

Po podstawieniu otrzymanych wyników liczbowych do pierwszego równania (11.46) napiszemy

$$\pi_1 = \frac{\Delta p_{sl}}{1} \rho^{-1} v^{-2} d^1$$

lub

$$\pi_1 = \frac{d \frac{\Delta p_{sl}}{1}}{\rho v^2}. \quad (11.47)$$

b. Obliczenie parametru π_2

Analogicznie do poprzedniego przypadku napiszemy układ równań wynikający z drugiego równania wymiarowego:

$$\text{dla } m: -1 - 3b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

$$\text{kg: } 1 + b_1 = 0,$$

$$s: -1 - b_2 = 0,$$

skąd

$$b_1 = -1, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = -1.$$

Uwzględniając otrzymane wielkości liczbowe w równaniu drugim (11.46) napiszemy

$$\pi_2 = \left(\frac{\rho v d}{\mu} \right)^{-1}. \quad (11.48)$$

c. Obliczenie parametru π_3

Z trzeciego równania wymiarowego wynika następujący układ równań:

$$\text{dla } m: 1 - 3c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$\text{kg: } c_1 = 0,$$

$$s: -c_2 = 0,$$

skąd

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -1.$$

Z równania trzeciego (11.46) otrzymamy

$$\pi_3 = \frac{k}{d}. \quad (11.49)$$

Po podstawieniu otrzymanych zależności (11.47), (11.48) i (11.49) do równania (11.45) napiszemy:

$$f_1\left(\frac{d \frac{\Delta p_{sl}}{1}}{\varrho v^2}, \frac{\varrho v d}{\mu}, \frac{k}{d}\right) = 0$$

lub w postaci

$$\frac{d \frac{\Delta p_{sl}}{1}}{\varrho v^2} = f_2\left(\frac{\varrho v d}{\mu}, \frac{k}{d}\right),$$

skąd

$$\Delta p_{sl} = \frac{\varrho v^2 d}{1} f_2\left(\frac{\varrho v d}{\mu}, \frac{k}{d}\right). \quad (11.50)$$

Dzieląc obie strony równania (11.50) przez $\gamma = \varrho g$, oznaczając znane liczby podobieństwa:

$$\frac{\varrho v d}{\mu} = Re, \quad \frac{k}{d} = \varepsilon$$

oraz wyrażając:

$$f_2(Re, \varepsilon) = \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\Delta p_{sl}}{\gamma} = h_{sl},$$

otrzymamy metodą analizy wymiarowej znany wzór Darcy - Weisbacha na opory liniowe w postaci

$$h_{sl} = \lambda \frac{1}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (11.51)$$

12. USTALONY RUCH CIECZY W KORYTACH OTWARTYCH I KANAŁACH

W rozdziale tym rozpatrzmy ustalony ruch bezciśnieniowy cieczy (ze swobodną powierzchnią) w korytach otwartych i kanałach zamkniętych.

Koryta otwarte dzielimy na naturalne i sztuczne. Do koryt naturalnych zaliczamy rzeki i potoki, do sztucznych - kanały do nawadniania i odwadniania gruntów, zasilania turbin wodnych itp.

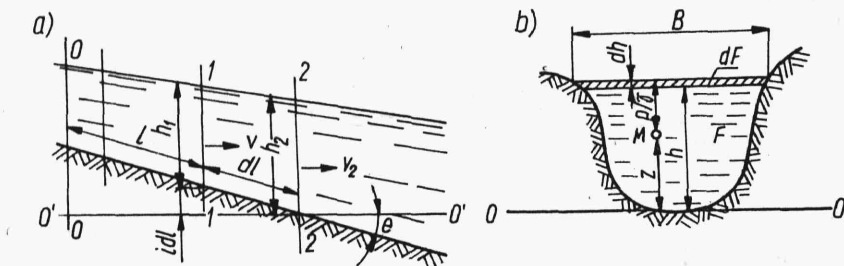
Rozważmy dwa rodzaje ustalonego ruchu w korytach otwartych:

- 1) ruch wolnozmienny,
- 2) ruch jednostajny.

12.1. RUCH WOLNOZMIENNY W KORYTACH OTWARTYCH

Ruchem wolnozmiennym nazywamy taki ruch, w którym krzywizna linii zwierciadła jest nieznaczna, a prędkości elementów cieczy są prawie prostopadłe do przekroju przepływowego, który możemy traktować jako płaski. Zakładamy również hydrostatyczny rozkład ciśnień w przekroju koryta. Dzięki tym upraszczającym założeniom można w równaniach ruchu zaniedbać składowe prędkości w płaszczyźnie przekroju przepływowego.

Rozważmy w strumieniu cieczy w odległości l od przekroju początkowego 0-0 przekrój 1-1 oraz w nieskończenie małej odległości przekrój 2-2 (rys.12.1a). Oznaczmy przez $i = \sin \theta$ spadek dna koryta.



Rys.12.1

Napiszemy równanie Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2, przyjmując poziom porównawczy $0' - 0'$