

8. HYDRAULICZNE OBLICZANIE UKŁADÓW PRZEWODÓW

W poprzednim rozdziale omówiono zjawiska przepływowe w przewodach prostych pod ciśnieniem, które traktowano jako przewody pojedyncze. Podano podstawowe równania, metody i przykłady obliczeń przepływu cieczy lepkiej w przewodach pojedynczych.

Obecnie zajmiemy się obliczaniem bardziej złożonych układów przewodów, polegającym na odpowiednim doborze i wykorzystaniu poznanych już metod obliczeniowych, stosowanych do składających się z układów przewodów pojedynczych.

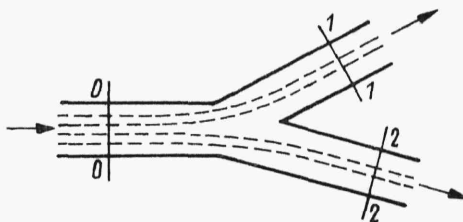
Hydrauliczne obliczanie układów przewodów dotyczyć będzie stosowanych w praktyce inżynierskiej zespołów połączonych ze sobą przewodów, sieci rozgałęzionej i obwodowej, przewodów o zmiennym na ich długości wydatku a także współdziałania pompy z układem przewodów.

8.1. UKŁAD TRZECH PRZEWODÓW

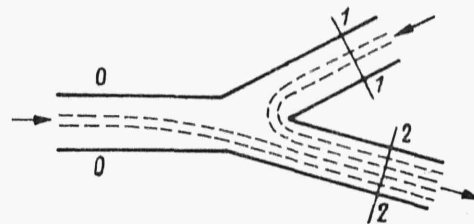
Rozpatrzmy najprostszy układ składający się z trzech przewodów zbiegających się w jednym węźle. Zajmiemy się dwoma przypadkami:

- a) dzielenia przewodu na dwa odgałęzienia,
- b) łączenia dwóch przewodów w jeden.

W pierwszym przypadku jednym przewodem ciecz dopływa do węzła a dwoma odpływa (rys.8.1). W drugim zaś odwrotnie, ciecz dopływa do węzła dwoma przewodami a odpływa jednym (rys.8.2).



Rys.8.1



Rys.8.2

Przyjmując oznaczenia podane na rys.8.1 ułożymy równanie Bernoulliego dla ustalonego przepływu cieczy w przekrojach strumienia 0-0 i 1-1 oraz w przekrojach 0-0 i 2-2

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \lambda \frac{l}{d} \frac{v_0^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_0^2}{2g}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \lambda \frac{l}{d} \frac{v_0^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_0^2}{2g}. \quad (8.2)$$

Z prawa ciągłości otrzymamy:

$$v_0 = \frac{4Q_0}{\pi d_0^2}, \quad v_1 = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2}, \quad v_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2}. \quad (8.3)$$

W każdym węźle suma wydatków doprowadzonych do niego jest równa sumie wydatków odprowadzonych, a więc w naszym przypadku napiszemy

$$Q_0 = Q_1 + Q_2. \quad (8.4)$$

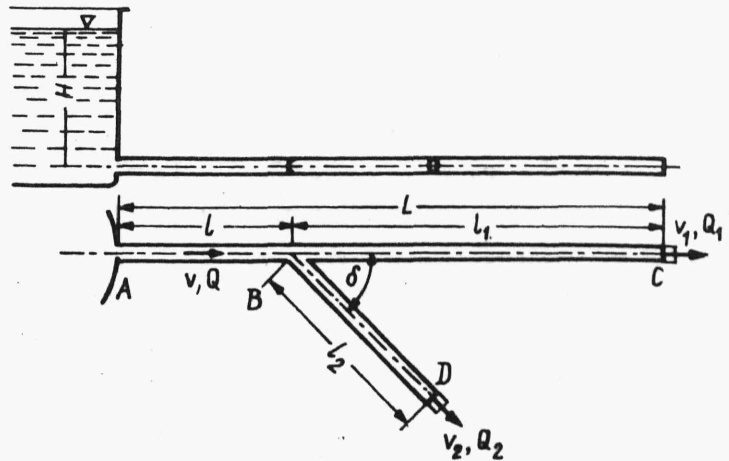
W rozważanym przypadku dla wymienionych strumieni rozgałęzionego przewodu ułożyliśmy równania Bernoulliego podobnie jak w przypadku pojedynczego przewodu.

Współczynniki oporów miejscowych ζ_1 i ζ_2 w trójkącie dla dwóch strumieni wyznaczamy z tablicy 7.9, zaś straty miejscowe (ostatnie wyrazy w równaniach (8.1) i (8.2) uzależnione są od średniej prędkości w przekroju 0-0 (rys.8.1)).

Analogicznie postępuje się w przypadku łączenia przewodów (rys. 8.2), jak również przy większej ilości odgałęzień, z tym, że w ostatnim przypadku odpowiednio zwiększy się liczba równań Bernoulliego.

Obliczenie tego typu układów sprowadza się przeważnie, podobnie zresztą jak w przypadku przewodów pojedynczych, do określenia parametrów hydrodynamicznych lub geometrycznych przy zadanych wydatkach lub też odwrotnie, do określenia wydatków w poszczególnych przewodach. Pewne sposoby obliczeń tych układów omówimy na dwu konkretnych przykładach.

Przykład 8.1. Z otwartego zbiornika wodnego o naporze $H = 8$ m płynie woda poziomym przewodem z nachylenym do niego pod kątem $\vartheta = 45^\circ$ odgałęzieniem o średnicach $d_1 = d_2 = d = 100$ mm, długościach $l = 10$ m, $l_1 = 22$ m, $l_2 = 12$ m i chropowatości bezwzględnej $k = 1$ mm. Określić prędkości przepływu i wydatki w poszczególnych przewodach (rys.8.3). Współczynnik oporu miejscowego na wlocie przewodu $\zeta = 0,5$.



Rys.8.3

Rozwiązanie. Układamy równanie Bernoulliego dla przekrojów A i C

$$H = \frac{v_1^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l_1}{d_1} \frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v^2}{2g}.$$

Analogicznie dla przekrojów A i D napiszemy

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l_2}{d_2} \frac{v^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v^2}{2g}.$$

Po prostym przekształceniu otrzymamy:

$$2g H = v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d_1} \right) + v^2 \left(\zeta + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_1 \right), \quad (8.5)$$

$$2g H = v_2^2 \left(1 + \lambda \frac{l_2}{d_2} \right) + v^2 \left(\zeta + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_2 \right). \quad (8.6)$$

Ponadto napiszemy

$$Q = Q_1 + Q_2$$

lub

$$\frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4} v_1 + \frac{\pi d^2}{4} v_2 ,$$

skąd

$$v = v_1 + v_2 . \quad (8.7)$$

Mamy więc 3 równania (8.5), (8.6) i (8.7) i niewiadome v, v_1, v_2 . Dochodzi tu dodatkowa trudność wynikająca stąd, że określenie współczynników oporów miejscowych w trójkniku ζ_1 i ζ_2 z tablicy 7.9

wymaga znajomości stosunku $\frac{Q_2}{Q} = \frac{v_2}{v}$.

Wydatków tych nie możemy wyznaczyć nie znając wartości prędkości. Zastosujemy więc w tym przypadku, podobnie jak postępowaliśmy już poprzednio, metodę kolejnych przybliżeń.

Współczynnik oporów liniowych λ w strefie kwadratowej zależności oporów wyznaczmy w zależności od współczynnika chropowatości względnej $\varepsilon = \frac{k}{d} = 0,001$ ze wzoru Nikuradse (7.12); $\lambda = 0,038$.

Porównując prawe strony równań (8.5) i (8.6) a następnie dzieląc otrzymane równanie przez v^2 napiszemy

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d}\right) - \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \left(1 + \lambda \frac{l_2}{d}\right) + \zeta_1 - \zeta_2 = 0.$$

Wstawiamy do tego równania zadane wielkości

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \left(1 + 0,038 \frac{22}{0,1}\right) - \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 \left(1 + 0,038 \frac{12}{0,1}\right) + \zeta_1 - \zeta_2 = 0$$

lub

$$9,36 \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 - 5,56 \left(\frac{v_2}{v}\right)^2 + \zeta_1 - \zeta_2 = 0. \quad (8.8)$$

Z równania (8.7) mamy

$$\frac{v_1}{v} = 1 - \frac{v_2}{v} .$$

Po podstawieniu tej zależności do (8.8) napiszemy

$$\left(\frac{v_2}{v}\right)^2 - 4,92 \frac{v_2}{v} + 2,46 + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{3,8} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania drugiego stopnia jest

$$\frac{v_2}{v} = 2,46 \pm \sqrt{3,59 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{3,8}}.$$

Ponieważ $\frac{v_2}{v} < 1$, więc wybieramy znak ujemny przed pierwiastkiem.

Pierwsze przybliżenie:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \quad \frac{v_2}{v} = 2,46 - \sqrt{3,59} = 0,565.$$

Drugie przybliżenie:

znajdujemy z tablicy 7.9 odpowiadające $\frac{v_2}{v} = 0,565$ wartości:

$$\zeta_2 = 0,43, \quad \zeta_1 = 0,03.$$

Obliczamy

$$\frac{v_2}{v} = 2,46 - \sqrt{3,59 + \frac{0,4}{3,8}} = 0,53.$$

Trzecie przybliżenie: dla stosunku $\frac{v_2}{v} = 0,53$ znajdujemy:

$$\zeta_2 = 0,47, \quad \zeta_1 = 0,01, \quad \frac{v_2}{v} = 2,46 - \sqrt{3,59 + \frac{0,46}{3,8}} = 0,53.$$

Czwarte przybliżenie: znajdujemy z tablic ostatecznie:

$$\zeta_2 = 0,47, \quad \zeta_1 = 0,01.$$

Wartościom tym odpowiada

$$v_2 = 0,53v.$$

Po podstawieniu znalezionej zależności do równania (8.6) z uwzględnieniem zadanych wartości otrzymamy

$$2 \cdot 9,81 \cdot 8 = 0,53^2 v^2 \left(1 + 0,038 \frac{12}{0,1}\right) + v^2 \left(0,5 + 0,038 \frac{10}{0,1} + 0,47\right),$$

skąd:

$$157 = 1,60v^2 + 4,77v^2 = 6,37v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{157}{6,37}} = 4,97 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 0,53 \cdot 4,97 = 2,63 \text{ m/s},$$

$$v_1 = v - v_2 = 2,34 \text{ m/s}.$$

Sprawdzamy teraz czy określenie współczynnika λ w strefie kwadratowej zależności oporów było prawidłowe. Obliczamy więc liczbę Reynoldsa dla najmniejszej prędkości $v_1 = 2,34 \text{ m/s}$:

$$Re = \frac{2,34 \cdot 0,1}{1,0 \cdot 10^{-6}} = 2,34 \cdot 10^5, \quad \text{zaś} \quad \varepsilon = \frac{k}{d} = 0,01.$$

Z wykresu Colebrook i White'a tym wartościom Re i ε odpowiada strefa kwadratowej zależności oporów.

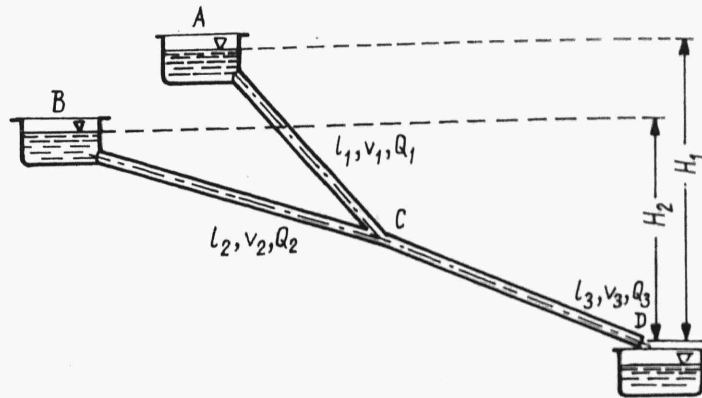
Z równania ciągłości obliczamy:

$$Q_1 = \frac{\pi d^2}{4} v_1 = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} \cdot 2,34 = 0,1837 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{v_2}{v_1} = 0,1837 \cdot \frac{2,63}{2,34} = 0,2057 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0,3894 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Przykład 8.2. Rozpatrzmy odwrotne do poprzedniego zadania łączenia się dwu przewodów w jeden na podstawie schematu układu podanego na rys.8.4. Należy określić średnice d_1 oraz $d_2 = d_3 = d$, jeżeli zadane są następujące wielkości $l_1 = 320$ m, $l_2 = 430$ m, $l_3 = 390$ m, $Q_1 = 65\ 000$ l/h = $0,0181$ m³/s, $Q_2 = 120\ 000$ l/h = $0,0333$ m³/s, $H_1 = 85$ m, $H_2 = 68$ m, $k = 0,001$ m.



Rys.8.4

Dla długich przewodów pomijamy straty miejscowe jako bardzo małe w porównaniu ze stratami liniowymi.

Rozwiązanie. Układamy równanie Bernoulliego dla ciągów przewodów ACD oraz BCD:

$$H_1 = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}, \quad (8.9)$$

$$H_2 = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}. \quad (8.10)$$

Z warunku ciągłości:

$$v_1 = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2}, \quad v_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2}, \quad v_3 = \frac{4Q_3}{\pi d_3^2}. \quad (8.11)$$

Uwzględniając zależności (8.11) w (8.9) i (8.10) napiszemy:

$$H_1 = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3^5} \frac{8Q_3^2}{\pi^2 g},$$

$$H_2 = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2^5} \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3^5} \frac{8Q_3^2}{\pi^2 g}.$$

Wykorzystując równości $d_2 = d_3 = d$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ otrzymamy:

$$H_1 = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} \frac{8Q_1^2}{\pi^2 g} + \lambda \frac{l_3}{d^5} \frac{8Q_3^2}{\pi^2 g}, \quad (8.12)$$

$$H_2 = \lambda \frac{l_2}{d^5} \frac{8Q_2^2}{\pi^2 g} + \lambda \frac{l_3}{d^5} \frac{8Q_3^2}{\pi^2 g} = \frac{8}{\pi^2 g d^5} (l_2 Q_2^2 + l_3 Q_3^2).$$

Z ostatniego równania (wydatek $Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0,0514 \text{ m}^3/\text{s}$) obliczamy średnicę:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt[5]{\frac{8}{\pi^2 g} \frac{\lambda}{H_2} (l_2 Q_2^2 + l_3 Q_3^2)} = \\ &= \sqrt[5]{\frac{8}{3,14 \cdot 9,81} \frac{\lambda}{68} (430 \cdot 0,0333^2 + 390 \cdot 0,0514^2)}, \end{aligned}$$

$$d = 0,283 \sqrt[5]{\lambda} \text{ (m)}. \quad (8.13)$$

Współczynnik λ zależy od średnicy d . A więc zastosujemy w tym przypadku metodę kolejnych przybliżeń.

Pierwsze przybliżenie: zakładamy $\lambda = 0,03$, $d = 0,283 \sqrt[5]{0,03} = 0,14 \text{ m}$.

Drugie przybliżenie: z zadanych wartości wydatków można wnioskować, że mamy do czynienia z przepływem w strefie kwadratowej zależności oporów, wyznaczamy $\varepsilon = \frac{k}{d} = \frac{0,001}{0,140} = \frac{1}{140}$; ze wzoru Nikuradse (7.11) określamy $\lambda = 0,034$, które podstawiamy do wzoru (8.13) i otrzymujemy $d = 0,144$ m.

Trzecie przybliżenie: $\varepsilon = \frac{k}{d} = \frac{1}{144}$; ze wzoru (7.11) otrzymujemy $\lambda = 0,034$, które odpowiada wartości średnicy $d = 0,144$ m, obliczonej ze wzoru (8.13).

Sprawdzamy teraz, czy prawidłowo założyliśmy przepływ w strefie kwadratowej.

$$\text{Prędkość w przewodzie BC } v_2 = \frac{4 \cdot 0,0333}{3,14 \cdot 0,144^2} = 2,05 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{2,05 \cdot 0,144}{1,15 \cdot 10^{-6}} = 2,56 \cdot 10^5,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{144};$$

dla tych wartości Re i ε z wykresu Colebrooka i White'a ustalamy, że przepływ jest w strefie kwadratowej zależności oporów.

Z równania (8.12) obliczamy

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt[5]{\frac{8 \lambda_1 Q_1^2}{\pi^2 g H_1 - 8 \lambda \frac{1}{d^5} Q_3^2}} = \\ &= \sqrt[5]{\frac{8 \cdot \lambda_1 320 \cdot 0,0181^2}{3,14^2 \cdot 9,81 \cdot 85 - 8 \cdot 0,034 \cdot \frac{390}{0,144^2} \cdot 0,0514^2}}, \end{aligned}$$

$$d_1 = 0,187 \sqrt[5]{\lambda_1} \text{ (m)}. \quad (8.14)$$

Pierwsze przybliżenie: zakładamy $\lambda_1 = 0,03$, ze wzoru (8.14) wyznaczamy $d_1 = 0,093$ m.

Drugie przybliżenie: $\varepsilon = \frac{k}{d_1} = \frac{1}{93}$, ze wzoru (7.11) obliczamy $\lambda = 0,039$, zaś ze wzoru (8.14) $d_1 = 0,098$ m.

Trzecie przybliżenie: $\varepsilon = \frac{k}{d_2} = \frac{1}{98}$, $\lambda = 0,038$ odpowiada wartości $d_1 = 0,098$ m.

Zgodnie z normą przyjmujemy $d = 0,15$ m i $d_1 = 0,1$ m.

8.2. UKŁADY PRZEWODÓW WODOCIĄGOWYCH

Omówimy obecnie obliczenie hydrauliczne kilku typowych układów wodociągowych na podstawie wzoru (7.31)

$$h_{sl} = \frac{Q^2}{K^2} = A \cdot Q^2,$$

gdzie $K = f(d, k)$ określamy z tablicy 7.12 lub $K = f(d, n)$ z tabl. 7.13.

Tę uproszczoną postać wzoru otrzymano, jak wiemy, z przekształcenia wzoru (7.3), na straty liniowe. Wzór ten może być stosowany do obliczeń przy spełnieniu dwu warunków:

a) przy zaniedbaniu energii kinetycznej i strat miejscowych jako wielkości bardzo małych w porównaniu ze stratami liniowymi,

b) przy przepływie w strefie kwadratowej zależności oporów.

Dla prędkości przepływu wody (jak wynika z tablicy 7.12) $v > 1,5$ m/s w przewodach długich można przyjąć, że oba wymienione warunki są spełnione.

8.2.1. PRZEWODY POŁĄCZONE RÓWNOLEGLE

Przewodami połączonymi równolegle nazywamy układ n przewodów wychodzących ze wspólnego węzła i łączących się w innym wspólnym węźle.

W ogólnym przypadku mamy układ przewodów połączonych równolegle o różnych średnicach, długościach i wydatkach (rys. 8.5).

Hydrauliczne obliczenie przewodów równoległych polega na określeniu wydatku w poszczególnych przewodach układu, strat ciśnienia pomiędzy wspólnymi węzłami oraz obliczeniu średnicy poszczególnych