

Najprostszym przypadkiem ruchu nieustalonego jest taki przepływ, dla którego zakłada się przewód jako niesprężysty i ciecz jako nieściśliwą. Ten najprostszy model ruchu nieustalonego nierzadko jest stosowany do praktycznych obliczeń. Występują jednak w praktyce pewne zjawiska, jak np. uderzenie hydrauliczne w przewodach, kiedy badając ruch nieustalony nie można pominąć ani sprężystości przewodu, ani ściśliwości cieczy.

Oba wymienione przypadki ruchu nieustalonego będą przedmiotem dalszych naszych rozważań.

7.6.2. RUCH NIEUSTALONY CIECZY NIEŚCIŚLIWEJ W PRZEWODZIE NIESPRĘŻYSTYM

Rozważmy wpierw ruch nieustalony cieczy doskonałej, który możemy opisać wychodząc z równania różniczkowego Eulera

$$-g \frac{\partial}{\partial l} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{dv}{dt} \quad (7.39)$$

Po przekształceniu napiszemy

$$g \frac{\partial z}{\partial l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} = 0$$

lub w postaci

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z \right) + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

gdzie $v = f(l, t)$ - prędkość jest funkcją położenia i czasu.

Całkując to równanie niezależnie od czasu wzdłuż linii prądu otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z + \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} dl = \text{const}$$

lub dla dwu przekrojów 1-1 i 2-2 dla strugi napiszemy równanie energii dla ruchu nieustalonego cieczy doskonałej w postaci

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 + \int_0^{l_1} \frac{\partial v}{\partial t} dl = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_0^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl$$

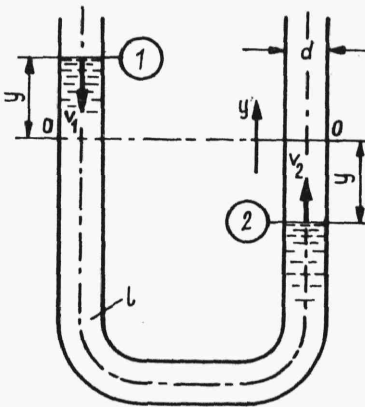
lub

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl. \quad (7.40)$$

Równanie energii dla strugi cieczy lepkiej z uwzględnieniem strat napiszemy w postaci

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + g \sum h_{st} + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl. \quad (7.41)$$

Równanie (7.41) nadaje się do badania przepływów nieustalonych, jak ruchy wahadłowe cieczy w zbiornikach wyrównawczych, wypływy ze zbiornika itp.



Rys.7.28

Na podstawie równań (7.40) i (7.41) omówimy wahania cieczy w otwartym naczyniu połączonym w kształcie litery U (rys.7.28). W stanie spoczynku ciecz w obu ramionach znajduje się na tym samym poziomie 0-0. Pod działaniem impulsu z zewnątrz równowaga zostanie zachwiana i następują wahania cieczy względem pierwotnego położenia.

W rozpatrywanej chwili zwierciadło cieczy w lewym ramieniu znajduje się w wysokości y nad poziomem 0-0, a w prawym ramieniu w wysokości y poniżej tego poziomu.

Rozpatrzmy wpierw wahania cieczy doskonałej a następnie omówimy wahania cieczy lepkiej.

1. Przepiszemy równanie energii (7.40) dla strugi cieczy doskonałej dla przekrojów 1-1 i 2-2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + g z_2 + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl$$

$$p_1 = p_2 = p_a, \quad v_1 = v_2, \quad z_1 = y, \quad z_2 = -y.$$

Po uwzględnieniu tych związków, mamy

$$2g y = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl.$$

Prędkość v jest niezależna od miejsca z a zależy tylko od czasu $v(t)$.

Możemy więc napisać

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}.$$

Wobec tego otrzymamy

$$2g y = \frac{dv}{dt} \int_{l_1}^{l_2} dl = \frac{dv}{dt} (l_2 - l_1) = \frac{dv}{dt} l, \quad (7.42)$$

gdzie l oznacza długość słupa cieczy.

Zmienna y ma znak przeciwny do prędkości, przeto:

$$v = - \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Po uwzględnieniu zależności (7.42) otrzymamy

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{2g y}{l}. \quad (7.43)$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego prostego, którego rozwiązaniem jest funkcja

$$y = A \sin \omega t, \quad (7.44)$$

gdzie: amplituda wahan $A = y_{\max}$, zaś

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Okres wahan

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (7.45)$$

Ruch taki dla cieczy doskonałej (bez oporów) trwa nieskończenie długo.

2. Rozważmy teraz wahan cieczy lepkiej nie zmieniając pozostałych warunków zadania.

Stosując równanie Bernoulliego (7.41) do strugi cieczy lepkiej otrzymamy

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 + g \sum h_{st} + \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial v}{\partial t} dl.$$

Postępując analogicznie jak poprzednio i podstawiając do prawej strony równania

$$\sum h_{st} = \left(\lambda \frac{1}{d} + \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$$

otrzymamy:

$$2g y = \frac{dv}{dt} l + \left(\lambda \frac{1}{d} + \zeta \right) \frac{v^2}{2},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g y}{l} - \frac{\lambda \frac{1}{d} + \zeta}{2l} v^2. \quad (7.46)$$

Zakładając ruch laminarny określimy współczynnik:

$$\lambda = \frac{C}{Re} = \frac{C \nu}{v d},$$

$$\frac{\lambda \frac{1}{d}}{2l} v^2 = \frac{C \nu}{v d} \frac{1}{2l} v^2 = \frac{C \nu v}{2d^2}.$$

Wstawiając do równania (7.46) zależności:

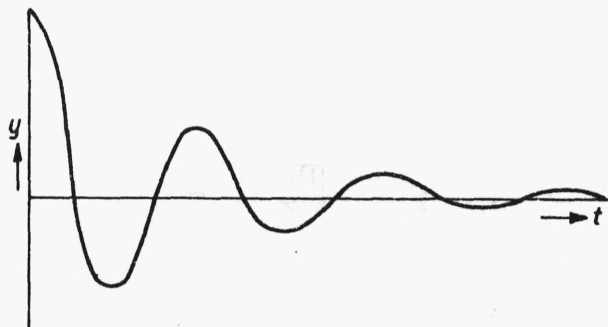
$$\frac{\zeta}{2l} = a_1, \quad \frac{C \nu}{d^2} = a_2, \quad \frac{2g}{l} = a_3, \quad v = - \frac{dy}{dt},$$

otrzymamy różniczkowe równanie drugiego rzędu zanikającego ruchu harmonicznego

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - a_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 y = 0. \quad (7.47)$$

Rozwiązanie tego równania jest możliwe w postaci szeregu. Na rys. 7.29 przedstawiono przebieg funkcji $y = f(t)$ w postaci krzywej znikających wahań, której amplituda z upływem czasu maleje do zera.

W tym przypadku rozważając ciecz lepką mamy do czynienia ze zjawiskiem zanikania ruchu po pewnym czasie wskutek oporów hydraulicznych.



Rys.7.29

7.6.3. UDERZENIE HYDRAULICZNE W PRZEWODACH

Uderzeniem hydraulicznym nazywamy nagłą zmianę ciśnienia spowodowaną zmianą prędkości w czasie przepływu cieczy w przewodzie pod ciśnieniem.

Z zagadnieniem uderzenia hydraulicznego związany jest ruch nieustalony, w którym należy uwzględnić ściśliwość cieczy i sprężystość przewodu, ponieważ mamy do czynienia z dość dużymi przyrostami ciśnienia.

Uderzenie hydrauliczne może mieć miejsce np. w przewodach wodociągowych i zasilających turbiny przy nagłym zamknięciu lub otwarciu zaworu, przy uruchomieniu lub zatrzymaniu turbiny.

W przypadku gdy zmniejszenie prędkości wskutek zamknięcia zaworu powoduje przyrost ciśnienia, uderzenie nazywamy dodatnim. Jeżeli zaś przy otwarciu zaworu nastąpi spadek ciśnienia, to uderzenie nazywamy ujemnym.

Zmiany wielkości ciśnienia przy uderzeniu hydraulicznym wywołane są bezwładnością masy cieczy płynącej przewodem i są tak duże, że w obliczeniach będzie można pominąć opory hydrauliczne w przewodzie jako wielkości porównywalnie bardzo małe.

1. Uderzenie hydrauliczne przy nagłym zamknięciu zaworu

Rozpatrzmy przepływ cieczy przewodem o długości l i średnicy D (rys.7.30) przyłączonym do zbiornika zasilającego. Na końcu przewodu umieszczony jest zawór.