

Sumując straty na całym ciągu szeregowo połączonych przewodów otrzymamy

$$H = h_{s1_1} + h_{s1_2} + h_{s1_3} = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} \right),$$

stąd obliczymy wydatek cieczy Q

$$Q = \sqrt{\frac{H}{\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2}}},$$

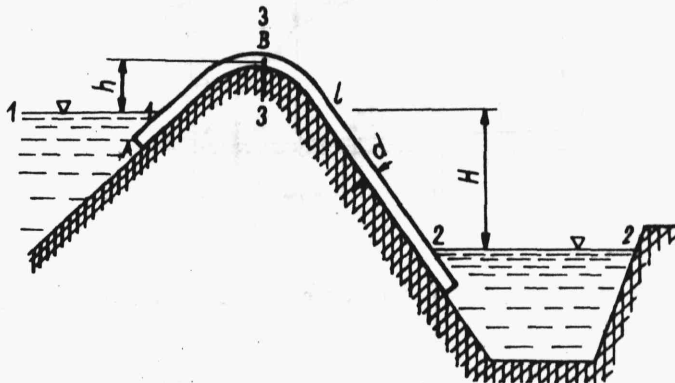
gdzie: H - wielkość naporu,

K_1, K_2, K_3 - parametry przepuszczalności zależne od odpowiednich średnic d_1, d_2, d_3 .

Z obliczonych wysokości strat liniowych sporządzono linię spadku ciśnień w postaci linii łamanej, składającej się z prostych odcinków o różnych kątach nachylenia do osi przewodu.

7.5.4. PRZEPŁYW PRZEZ LEWAR I SYFON

Lewarem nazywamy przewód zakrzywiony, zanurzony końcami w dwóch zbiornikach i umożliwiający przepływ cieczy ze zbiornika o wyższym poziomie do zbiornika o niższym poziomie zwierciadła (rys.7.24). Lewar składa się z dwu części: wznoszącej się od poziomu wody górnej do punktu szczytowego, w tej części ciecz wznosi się ku górze



Rys.7.24

dzięki zjawisku ssania i opadającej gałęzi, w której spływa pod działaniem siły ciężkości.

Obliczenie lewara nie różni się od obliczenia przewodu prostego. Muszą być jednak spełnione pewne warunki dotyczące ciśnienia, które nie może w żadnym punkcie spaść do ciśnienia wrzenia cieczy przepływającej przez lewar.

W przypadku gdy lewar jest całkowicie wypełniony cieczą równanie Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2 względem płaszczyzny odniesienia na poziomie zwierciadła dolnego przybiera postać

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{st}.$$

Z prawa ciągłości wynika, że prędkości w przekrojach 1-1 i 2-2, tj. v_1 i v_2 można pominąć, ponieważ przekroje te są znacznie większe od przekroju przewodu lewarowego.

Równanie Bernoulliego przybierze postać

$$H = \sum h_{st}.$$

Sumując straty miejscowe na wlocie, na zagięciu i na wylocie z przewodu i straty liniowe otrzymamy

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \lambda \frac{1}{d} \right).$$

Stąd wyznaczamy prędkość przepływu

$$v = \sqrt{\frac{2g H}{\sum \zeta_i + \lambda \frac{1}{d}}}. \quad (7.35)$$

Ponieważ na odcinku (AB) = l_1 ciecz jest zasysana, obliczamy z równania Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 3-3 ciśnienie w punkcie szczytowym B

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} - \left[h + \frac{v^2}{2g} \left(1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda \frac{l_1}{d} \right) \right].$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie, z czego wynika, że ciśnienie w punkcie B jest mniejsze od atmosferycznego.

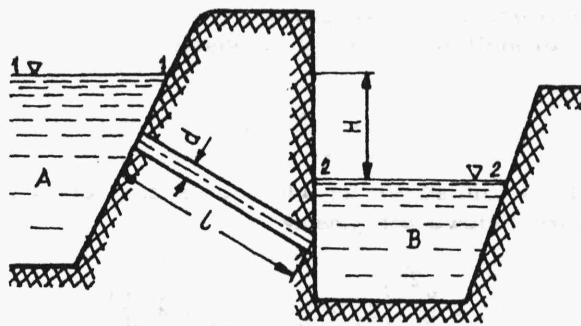
Przy obniżaniu się ciśnienia w punkcie B poniżej ciśnienia wrzenia przy danej temperaturze cieczy gwałtownie paruje tworząc obszary wypełnione parą, co powoduje przerwanie ciągłości strumienia i zakłócenie pracy przewodu lewarowego. W tych warunkach w najwyższym punkcie przewodu występuje zjawisko kawitacji.

Aby przepływ przez lewar był w ogóle możliwy ciśnienie p_B ma być większe od ciśnienia wrzenia p_w .

Stąd techniczny warunek pracy lewara

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} - \left[h + \frac{v^2}{2g} \left(1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda \frac{l}{d} \right) \right] > \frac{p_w}{\gamma} . \quad (7.36)$$

Syfonem nazywamy przewód zamknięty, przez który ciecz przepływa ze zbiornika A do zbiornika B przez przegrodę lub pod przegrodą dzielącą oba zbiorniki (rys.7.25).



Rys.7.25

Z równania Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2 obliczamy wielkość naporu

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g} , \quad (7.37)$$

który potrzebny jest do pokonania oporów liniowych i miejscowych w syfonie.

Ze wzoru (7.37) wyznaczamy prędkość przepływu przez syfon

$$v = \sqrt{\frac{2g H}{\sum \zeta + \lambda \frac{l}{d}}} . \quad (7.38)$$

Porównując (7.35) i (7.38) widzimy, że wzory na obliczenie prędkości przepływu przez lewar i syfon są identyczne.

Przykład 7.3. Obliczyć stratę ciśnienia na długości $l = 2,5$ km przewodu o średnicy $d = 100$ mm, jeżeli wydatek oleju wynosi $Q = 10$ m³/h, jego współczynnik lepkości $\nu = 7,5^\circ \text{E}$ oraz gęstość $\rho = 0,91$ kg/dm³.

Rozwiązanie. Stratę ciśnienia obliczamy z równania Darcy - Weisbacha:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2},$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{Q}{F} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,00278}{3,14 \cdot 0,1^2} = 0,354 \text{ m/s},$$

$$\text{Re} = \frac{v d}{\nu} = \frac{0,354 \cdot 0,1}{56,8 \cdot 10^{-6}} = 623,$$

gdzie $\nu = 7,5^\circ \text{E} = 56,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Z wartości liczby Reynoldsa wynika, że przepływ jest laminarny.

Współczynnik oporów liniowych λ dla przepływu laminarnego obliczamy ze wzoru Hagen - Paiseuille'a

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{623} = 0,1027.$$

Strata ciśnienia wynosi

$$\Delta p = 0,1027 \frac{2500}{0,1} \frac{910 \cdot 0,354^2}{2} = 146\,377 \text{ N/m}^2 = 1,46 \text{ bar}.$$

Przykład 7.4. Określić spadek hydrauliczny przewodu betonowego o średnicy $d = 1000$ mm, długości $l = 800$ m i chropowatości $k = 1$ mm dla przepływu wody o temperaturze 40°C i wydatku $Q = 100\,000$ dm³/min.

Rozwiązanie. Spadek hydrauliczny przewodu obliczamy ze wzoru:

$$l = \frac{h_{sl}}{1} = \frac{h_1 - h_2}{1} = \lambda \frac{v^2}{2g d},$$

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1,667}{3,14 \cdot 1^2} = 2,123 \text{ m/s},$$

$$Re = \frac{v d}{\nu} = \frac{2,123 \cdot 1}{0,658 \cdot 10^{-6}} = 3,238 \cdot 10^6.$$

Współczynnik lepkości kinematycznej dla wody o temperaturze 40°C wynosi

$$\nu = 0,658 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Współczynnik chropowatości

$$\varepsilon = \frac{k}{d} = \frac{1}{1000} = 0,001.$$

Określona wartość Re wskazuje na ruch burzliwy w strefie kwadratowej zależności oporów. Możemy więc obliczyć współczynnik λ ze wzoru Nikuradse (7.11):

$$\lambda = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} = \frac{1}{\left(1,14 + 2 \lg 1000\right)^2} = 0,01963,$$

$$I = \frac{h_1 - h_2}{l} = 0,01963 \frac{2,123^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 1} \cdot 100\% = 0,451\%.$$

Różnica wysokości wynosi

$$h_1 - h_2 = 0,00451 \cdot 800 = 3,6 \text{ m}.$$

Przykład 7.5. Obliczyć wartość naporu H wody w zbiorniku dla podanych na rys.7.26 warunków.

Wymiary przewodów: $d_1 = 200 \text{ mm}$, $d_2 = 100 \text{ mm}$, $l_1 = 200 \text{ m}$, $l_2 = 200 \text{ m}$. Chropowatość przewodu $k = 0,2 \text{ mm}$. Woda o temperaturze $T = 283 \text{ K}$ wypływa z przewodu z prędkością $v_2 = 2 \text{ m/s}$.

Blisko wylotu przewodu znajduje się zasuwa o przymknięciu $s = 0,50$.

Rozwiązanie. Z równania Bernoulliego dla przekrojów 3-3 i 2-2 otrzymujemy:

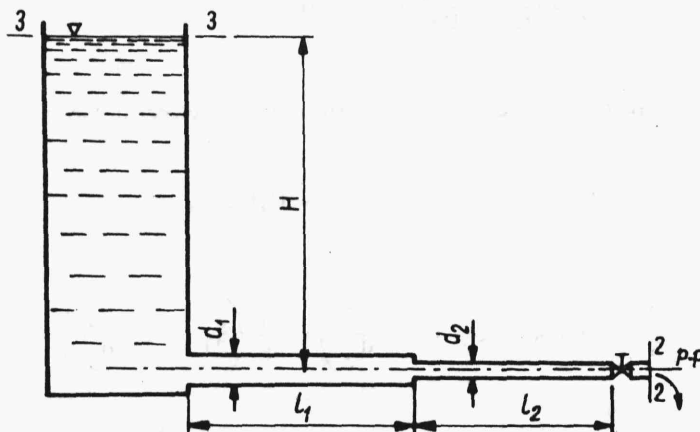
$$\frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_3 \frac{v_2^2}{2g} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g},$$

$$v_3 = 0, \quad v_2 = 2 \text{ m/s}, \quad \zeta_1 = 0,5 - \text{dla wlotu},$$

$$p_3 = p_2 = p_a, \quad \zeta_2 = 0,41 - \text{dla nagłej zmiany przekroju},$$

$$z_3 = H, \quad z_2 = 0, \quad \zeta_3 = 2,06 - \text{dla zasuwy}.$$



Rys. 7.26

Wartości współczynnika ζ wyznaczamy z podanych w tym rozdziale zależności.

Dla określenia wartości współczynnika oporów liniowych obliczamy liczbę Reynoldsa Re oraz względne chropowatości:

$$Re = \frac{v d}{\nu}, \quad T = 283 \text{ K}, \quad \nu = 1,306 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Z równania ciągłości:

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 2,0 \left(\frac{100}{200} \right)^2 = 0,5 \text{ m/s},$$

$$Re_1 = \frac{0,5 \cdot 0,2 \cdot 10^6}{1,306} = 7,65 \cdot 10^4,$$

$$\text{Re}_2 = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot 10^6}{1,306} = 3,07 \cdot 10^5,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{k}{d_1} = \frac{0,2}{200} = 1 \cdot 10^{-3},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{k}{d_2} = \frac{0,2}{100} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Wartości współczynników λ odczytujemy z wykresu Colebrooka i White'a:

$$\lambda_1 = 0,0231, \quad \lambda_2 = 0,0241,$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{v_2^2}{2g} \left(1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \right) + \frac{v_1^2}{2g} \left(\zeta_1 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \right) = \\ &= \frac{2^2}{2 \cdot 9,81} \left(1 + 0,41 + 2,06 + 0,0241 \frac{200}{0,1} \right) + \\ &+ \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} \left(0,5 + 0,0231 \frac{200}{0,2} \right), \end{aligned}$$

$$H = 15,35 \text{ m.}$$

Przykład 7.6. Woda ze zbiornika pod naporem $H = 17 \text{ m}$ przepływa przewodem poziomym i wewnątrz gładkim do atmosfery. Wymiary przewodu: $d = 125 \text{ mm}$, $l = 170 \text{ m}$. Określić prędkość i wydatek wody o temperaturze 20°C .

Rozwiązanie. Przyjmujemy oznaczenie: 1-1 powierzchnia zwierciadła wody w zbiorniku, 2-2 przekrój wylotowy przewodu.

Układamy równanie Bernoulliego dla przekrojów 1-1 i 2-2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \zeta_1 \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

$$p_1 = p_2 = p_a, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = v, \quad z_1 = H, \quad z_2 = 0,$$

stąd

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta + \lambda \frac{1}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 17}{1 + 0,5 + \lambda \frac{170}{0,125}}}$$

Dla rur gładkich $\lambda = f(Re)$ zależy od v , a więc rozwiązanie możliwe metodą kolejnych przybliżeń.

Znajdujemy $\zeta = 0,5$ dla wlotu o ostrych brzegach,

$\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ dla wody o temperaturze 20°C .

λ obieralne	[-]	0,02	0,0135	0,0131
$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta + \lambda \frac{1}{d}}}$	[m/s]	3,41	4,1	4,16
$Re = \frac{v d}{\nu}$	[-]	$4,25 \cdot 10^5$	$5,1 \cdot 10^5$	$5,17 \cdot 10^5$
λ dla rur gładkich (wykres)	[-]	0,0135	0,0131	0,0131

Znalezioną z wykresu wartość $\lambda = 0,0131$ możemy sprawdzić porównując z wartością obliczoną ze wzoru Prandtla Kármána (6.51):

$$\lambda = \frac{1}{[2 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8]^2} = \frac{1}{[2 \lg(5,17 \cdot 10^5 \sqrt{0,0131}) - 0,8]^2}$$

$$\lambda = 0,0131.$$

Dla $\lambda = 0,0131$ obliczamy prędkość przepływu

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 17}{1 + 0,5 + 0,0131 \frac{170}{0,125}}} = 4,16 \text{ m/s},$$

oraz wydatek

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{3,14 \cdot 0,125^2}{4} \cdot 4,16 = 0,051 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Przykład 7.7. Przewodem stalowym o chropowatości $k = 0,3 \text{ mm}$ i spadku hydraulicznym $I = 2,5\%$ płynie woda o temperaturze 10°C , przy czym prędkość $v = 2 \text{ m/s}$ nie może być przekroczona. Obliczyć średnicę tego przewodu.

Rozwiązanie. Przekroje - początkowy i końcowy przewodu oznaczamy przez 1-1 i 2-2.

Równanie Bernoulliego dla tych przekrojów:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{s1},$$

$$v_1 = v_2 = v \quad \text{dla} \quad d = \text{const},$$

$$p_1 = p_2 = p_a, \quad z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2,$$

stąd

$$I = \frac{h_{s1}}{l} = \frac{h_1 - h_2}{l} = \lambda \frac{v^2}{2g d},$$

$$d = \frac{\lambda v^2}{2g I}.$$

W tej zależności $\lambda = f(\text{Re})$, a $\text{Re} = f_1(d)$, a zatem i w tym przypadku rozwiązania należy szukać metodą kolejnych przybliżeń. Współczynnik lepkości wody przy temperaturze 10°C , $\nu = 1,297 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

d (obieralne)	[m]	0,3	0,165	0,193	0,184	0,185
$\varepsilon = \frac{k}{d}$	[-]	0,001	$\frac{1}{550}$	$\frac{1}{643}$	$\frac{1}{613}$	$\frac{1}{617}$
$\text{Re} = \frac{v d}{\nu}$	[-]	$4,62 \cdot 10^5$	$2,54 \cdot 10^5$	$2,98 \cdot 10^5$	$2,84 \cdot 10^5$	$2,85 \cdot 10^5$
λ według wykresu Colebrooka	[-]	0,0202	0,0236	0,0226	0,0227	0,0227
$d = \frac{\lambda v^2}{2g I}$	[m]	0,1647	0,1925	0,1843	0,1851	0,185

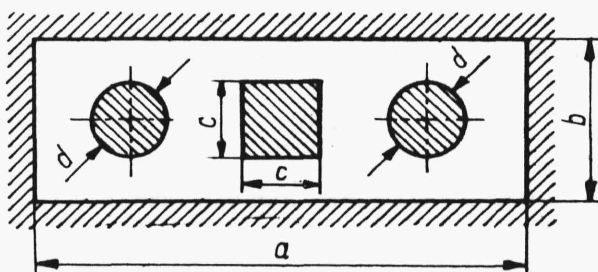
Wartość współczynnika $\lambda = 0,0227$ sprawdzamy ze wzoru (7.15)

$$\lambda = \frac{1}{\left[-2 \lg \left(\frac{6,1}{\text{Re}^{0,91}} + 0,268 \frac{k}{d} \right) \right]^2} =$$

$$= \frac{1}{\left[-2 \lg \left(\frac{6,1}{285\,000^{0,91}} + 0,268 \frac{1}{617} \right) \right]^2} = 0,0227.$$

Znaleziona zatem wartość średnicy jest równa $d = 185$ mm.

Przykład 7.8. W zamkniętym kanale o przekroju prostokątnym i wymiarach $a = 200$ mm, $b = 650$ mm ułożone są równoległe do siebie trzy przewody: dwa o przekrojach kołowych i średnicach $d = 75$ mm, trzeci o przekroju kwadratowym o wymiarze $c = 75$ mm (rys.7.27).



Rys.7.27

Przez kanał płynie woda o wydatku $Q = 500$ m³/h, lepkości $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6}$ m²/s, gęstości $\rho = 1,1$ kg/m³. Chropowatość kanału $k = 0,4$ mm.

Obliczyć stratę ciśnienia przypadającą na 1 m długości poziomego kanału.

Rozwiązanie. Stratę ciśnienia określimy ze wzoru (7.7):

$$\Delta p = \lambda \frac{1}{4R_h} \frac{\rho v^2}{2}, \quad \text{zaś} \quad v = \frac{Q}{F},$$

$$R_h = \frac{F}{U} = \frac{a \cdot b - 2 \frac{\pi d^2}{4} - c^2}{2a + 2b + 2\pi d + 4c},$$

$$Re = \frac{v \cdot 4R_h}{\gamma},$$

$$R_h = \frac{0,2 \cdot 0,65 - 2 \frac{\pi}{4} 0,075^2 - 0,075^2}{2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,65 + 2\pi 0,075 + 4 \cdot 0,075} = 0,047 \text{ m},$$

$$F = 0,2 \cdot 0,65 - 2 \frac{\pi}{4} 0,075^2 - 0,075^2 = 0,1155 \text{ m}^2,$$

$$v = \frac{500}{3600 \cdot 0,1155} = 1,202 \text{ m/s},$$

$$Re = \frac{1,202 \cdot 4 \cdot 0,047 \cdot 10^6}{1,3} = 1,73 \cdot 10^5,$$

$$\varepsilon = \frac{k}{4R_h} = \frac{0,4}{4 \cdot 0,047} = 0,0021.$$

Współczynnik λ znajdujemy z wykresu Colebrooka i White'a

$$\lambda = 0,025$$

Strata ciśnienia na jednostkę długości kanału wynosi

$$\Delta p = 0,025 \frac{1}{4 \cdot 0,047} \frac{1100 \cdot 1,202^2}{2} \cdot 9,81 = 106,24 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

7.6. RUCH NIEUSTALONY W PRZEWODACH POD CIŚNIENIEM

7.6.1. UWAGI WSTĘPNE

Ruch nieustalony charakteryzuje się tym, że elementy ruchu są funkcjami nie tylko położenia ale i czasu. Jak wiemy, w ruchu ustalonym w ogólnym przypadku cząstkowe pochodne prędkości, ciśnienia i gęstości względem czasu są równe zeru.

W ruchu nieustalonym są one różne od zera.