

Równanie (4.16) zwane całką Lagrange'a-Bernoulliego charakteryzuje się tym, że stała C ma tę samą wartość dla wszystkich elementów cieczy, podczas gdy stała Bernoulliego ma jednakową wartość tylko wzdłuż linii prądu. Jeżeli ciecz jest poddana działaniu wyłącznie sił ciężkości, wówczas potencjał  $U = -g z$  i równanie (4.15) przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z = C(t).$$

Analogicznie dla ruchu ustalonego napiszemy

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C. \quad (4.17)$$

#### 4.6. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU WIROWEGO PŁYNU DOSKONAŁEGO

Różniczkowe równania Eulera dadzą się zastosować zarówno do ruchu potencjalnego jak i wirowego.

Aby wyprowadzić równania różniczkowe ruchu wirowego do prawej strony równania Eulera (4.3) ruchu ustalonego dodamy i odejmiemy następujące wyrazy:

$$\begin{aligned} & + \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \text{ do pierwszego równania,} \\ & + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \text{ do drugiego równania,} \\ & + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \text{ do trzeciego równania.} \end{aligned}$$

Po dokonaniu tej operacji pierwsze równanie układu (4.3) przyjmie postać

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} + \\ & + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

W równaniu tym

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right),$$

a składowe prędkości kątowej obrotu elementu:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right),$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Przedstawimy więc nasze równanie w postaci

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z).$$

Analogicznie napiszemy dla dwóch pozostałych osi. Ostatecznie różniczkowe równania ustalonego ruchu wirowego płynu doskonałego możemy napisać w postaci:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z), \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2(v_x \omega_z - v_z \omega_x), \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + 2(v_y \omega_x - v_x \omega_y). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Równanie powyższe dla ruchu wirowego otrzymane na podstawie wyjściowych równań różniczkowych Eulera nazywamy równaniami Gromeki-Lamba.

Dla ruchu ustalonego  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$  i wówczas równania Gromeki-Lamba przyjmą postać:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= 2 (v_z \omega_y - v_y \omega_z), \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= 2 (v_x \omega_z - v_z \omega_x), \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= 2 (v_y \omega_x - v_x \omega_y). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mnożąc poszczególne równania odpowiednio przez  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  i dodając stronami otrzymamy

$$\begin{aligned} X dz + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \\ - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) dz \right] = \\ = 2 \left[ (v_z \omega_y - v_y \omega_z) dx + (v_x \omega_z - v_z \omega_x) dy + \right. \\ \left. + (v_y \omega_x - v_x \omega_y) dz \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli siły masowe mają potencjał  $U$ , to wówczas

$$\begin{aligned} dU - \frac{1}{\rho} dp - d \left( \frac{v^2}{2} \right) &= 2 \left[ (v_z \omega_y - v_y \omega_z) dx + \right. \\ &+ (v_x \omega_z - v_z \omega_x) dy + (v_y \omega_x - v_x \omega_y) dz \left. \right], \end{aligned}$$

lub też w postaci

$$d \left( U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} \right) = 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

Prawa strona równania (4.20) przedstawiona została w postaci wyznacznika. Równanie to możemy łatwo scałkować, jeżeli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0. \quad (4.21)$$

Wówczas otrzymujemy

$$d\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

a po scałkowaniu

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (4.22)$$

W polu grawitacyjnym potencjał sił ciężkości  $U = -g z$ , a po podstawieniu do równania (4.22) otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = \text{const}$$

lub

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const.} \quad (4.23)$$

Jest to znane nam już równanie Bernoulliego przedstawiające sumę energii kinetycznej i potencjalnej jednostki ciężaru płynu.

Omówimy teraz zakres stosowalności równania Bernoulliego. Jak wiemy równanie to otrzymaliśmy całkując równanie (4.20), przy założeniu, że wyznacznik (4.21) równy jest zeru. Wyznacznik równa się zeru wówczas, gdy w jednym z jego wierszy lub kolumn wszystkie wyrazy są zerami, lub gdy dowolne dwa wiersze są nawzajem proporcjonalne. Z tego wynika, że wyznacznik (4.21) równa się zeru, gdy spełniony będzie jeden z następujących warunków:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0,$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (4.24)$$

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}.$$

Warunek  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  określa przepływ niewirowy, potencjalny. A zatem stała w równaniu Bernoulliego jest taka sama dla całego pola przepływu i równanie to może być stosowane dla przepływu potencjalnego w całej rozciągłości, a więc bez żadnych ograniczeń.

Warunek  $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$  przedstawia nam równanie linii prądu.

Z tego wniosek, że stała w równaniu Bernoulliego będzie inna dla każdej linii prądu, zachowując tę samą wartość jedynie wzdłuż danej linii prądu. Równaniem Bernoulliego możemy się w tym przypadku posługiwać i dla ruchu wirowego stosując je osobno dla każdej linii wirowej.

Warunek  $\frac{\omega_x}{v_x} = \frac{\omega_y}{v_y} = \frac{\omega_z}{v_z}$  określa charakter przepływu. Jest to je-

dyny przypadek kiedy równanie Bernoulliego możemy stosować dla całego pola przepływu pomimo, że ruch cieczy jest wirowy. Ma to miejsce wówczas, kiedy kierunek linii wirowej jest zgodny z kierunkiem linii prądu. W strumieniu, w którym linie prądu i linie wirowe pokrywają się ze sobą, mamy ruch śrubowy.

#### 4.7. RÓWNANIE BERNOULLIEGO DLA GAZÓW

Rozważając przepływ gazów zaniedbujemy siły masowe, gdyż nie wywierają one istotnego wpływu na przepływ gazów

$$X = Y = Z = 0.$$

Uwzględniając powyższe w równaniach Eulera (4.4) otrzymujemy:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$