



Rys.4.2

#### 4.5. CAŁKA CAUCHY-LAGRANGE'A

Rozważmy ruch potencjalny cieczy doskonałej; składowe prędkości w tym ruchu wyraża się w postaci cząstkowych pochodnych potencjału prędkości  $\varphi(x, y, z, t)$ .

Uwzględniając w równaniu (4.2) zależności (3.15), otrzymamy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}$$

lub

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2,$$

możemy napisać dla wszystkich rzutów przyspieszenia następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Uwzględniając zależności (4.12) w równaniach różniczkowych (4.3) Eulera otrzymamy układ równań w postaci:

$$\begin{aligned}X - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Przy założeniu płynu barotropowego wyrazy prawej strony układu, równań (4.13) przedstawimy w postaci pochodnych cząstkowych względem odpowiednich współrzędnych pewnej funkcji  $P(x, y, z)$  zależnej tylko od ciśnienia:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Wprowadzając tę funkcję do równań (4.12) otrzymamy:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right), \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right), \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right).\end{aligned}$$

W celu scałkowania powyższych równań pomnożmy je odpowiednio przed  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  oraz zsumujmy

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right) dx + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right) dz. \end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach są funkcjami nie tylko  $x, y, z$ , lecz także  $t$ . Dlatego też całkując je będziemy przyjmowali, że  $t$  nie ulega zmianie. Prawa strona będzie wówczas różniczką zupełną, a zatem

$$X dX + Y dy + Z dz = d \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right).$$

Lewą część równania, określającą elementarną pracę sił masowych przedstawiamy w postaci różniczki potencjału sił masowych  $U$ , a zatem

$$dU = d \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + P \right).$$

Uwzględniając zależność (4.8), otrzymamy po scałkowaniu

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\varrho} = U + C(t). \quad (4.14)$$

Całka ta nazywa się całką Cauchy-Lagrange'a dla nieustalonego potencjalnego przepływu płynu ściśliwego.

Jeżeli płyn jest nieściśliwy, tzn.  $\varrho = \text{const}$ , całka Cauchy-Lagrange'a przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\varrho} - U = C(t). \quad (4.15)$$

Przy założeniu ruchu ustalonego  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ,  $C(t) = C$  równanie (4.15) przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\varrho} - U = C. \quad (4.16)$$

Równanie (4.16) zwane całką Lagrange'a-Bernoulliego charakteryzuje się tym, że stała C ma tę samą wartość dla wszystkich elementów cieczy, podczas gdy stała Bernoulliego ma jednakową wartość tylko wzdłuż linii prądu. Jeżeli ciecz jest poddana działaniu wyłącznie sił ciężkości, wówczas potencjał  $U = -g z$  i równanie (4.15) przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z = C(t).$$

Analogicznie dla ruchu ustalonego napiszemy

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = C. \quad (4.17)$$

#### 4.6. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIA RUCHU WIROWEGO PŁYNU DOSKONAŁEGO

Różniczkowe równania Eulera dadzą się zastosować zarówno do ruchu potencjalnego jak i wirowego.

Aby wyprowadzić równania różniczkowe ruchu wirowego do prawej strony równania Eulera (4.3) ruchu ustalonego dodamy i odejmiemy następujące wyrazy:

$$\begin{aligned} & + \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \text{ do pierwszego równania,} \\ & + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \text{ do drugiego równania,} \\ & + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \text{ do trzeciego równania.} \end{aligned}$$

Po dokonaniu tej operacji pierwsze równanie układu (4.3) przyjmie postać

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = & \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} + \\ & + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}. \end{aligned}$$