

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Powyższe równania w połączeniu z równaniem ciągłości określają ruch płynów doskonałych w najogólniejszej postaci.

W ruchu ustalonym płynu doskonałego pierwsze wyrazy prawych stron równań (4.3), tj. cząstkowe pochodne składowych prędkości względem czasu są równe zero

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

4.3. RÓWNANIE BERNOULLIEGO JAKO CAŁKA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RUCHU EULERA

Równania różniczkowe ruchu w postaci Eulera (4.1) dla dowolnego (niepotencjalnego) przepływu ustalonego można scałkować. Całkę tę po-
dał po raz pierwszy Bernoulli, jest ona dlatego nazywana całką lub
równaniem Bernoulliego.

Niech płyn porusza się względem układu współrzędnych x, y, z . Je-
żeli przepływ jest ustalony, tor i linie prądu pokrywają się, element
płynu porusza się z pewną prędkością v wzdłuż toru stanowiącego jed-
nocześnie linię prądu.

W ciągu czasu dt element płynu przebędzie wzdłuż toru odcinek
drogi ds , który równy jest

$$ds = v dt.$$

Rzutując elementarne przesunięcie ds elementu wzdłuż linii prądu
na osie współrzędnych x, y, z otrzymamy:

$$\begin{aligned} dx &= v_x dt, \\ dy &= v_y dt, \\ dz &= v_z dt. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Przedstawimy drugie wyrazy lewych części równań (4.1) w postaci pochodnych cząstkowych względem odpowiednich współrzędnych pewnej funkcji $P(x,y,z)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (4.5)$$

Zakładając płyn barotropowy, w którym gęstość płynu wyraża się jednoznacznie funkcją samego tylko ciśnienia a tym samym $P(x,y,z)$ zależy tylko od ciśnienia.

Uwzględniając powyższe zależności w równaniach (4.1) otrzymamy:

$$\begin{aligned} X - \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{dv_x}{dt}, \\ Y - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{dv_y}{dt}, \\ Z - \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{dv_z}{dt}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aby te równania scałkować, pomnożymy każde z nich przez odpowiednią składową elementarnego przesunięcia wzdłuż linii prądu równania (4.4) i dodamy stronami. Ostatecznie otrzymamy

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz - \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) &= \\ &= v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wyrażenia po lewej stronie równania są różniczkami zupełnymi, tzn.:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP.$$

Z zależności (4.5) wynika, że

$$dP = \frac{dp}{\rho}, \quad (4.8)$$

zaś

$$P = \int \frac{dp}{\rho}.$$

Funkcja $U(x,y,z)$ jest potencjałem jednostkowych sił masowych X, Y, Z . Prawa strona równania (4.7) jest również różniczką zupełną a mianowicie

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = \frac{d(v^2)}{2}.$$

Równanie (4.7) można zatem napisać w postaci

$$dU - dP = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

lub

$$d\left(\frac{v^2}{2} + P - U\right) = 0.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\frac{v^2}{2} + P - U = C.$$

Uwzględniając zależność (4.8) napiszemy

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C. \quad (4.9)$$

Całka ta nazywa się równaniem Bernoulliego dla ustalonego przepływu płynu ściśliwego.

Jeżeli $\rho = \text{const}$ całka (4.9) przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C.$$

W jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym potencjał sił masowych $U = -g z$, stąd

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}, \quad (4.10)$$

lub dla dwóch przekrojów strugi elementarnej otrzymamy równanie Bernoulliego dla ustalonego przepływu płynu nieściśliwego w polu sił grawitacji ziemskiej

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2. \quad (4.11)$$

4.4. INTERPRETACJA RÓWNANIA BERNOULLIEGO

Analizując równanie Bernoulliego (4.10) widzimy, że każdy jego wyraz ma wymiar długości.

Wyrazy te nazywamy następująco: $\frac{v^2}{2g}$ - wysokością prędkości, $\frac{p}{\gamma}$ - wysokością ciśnienia i z - wysokością położenia.

Równanie Bernoulliego możemy więc sformułować następująco: dla każdego przekroju strugi cieczy doskonałej, znajdującej się w ruchu ustalonym pod działaniem wyłącznie siły grawitacyjnej (ciężenia), suma wysokości prędkości, wysokości ciśnienia i wysokości położenia jest wartością stałą.

Interpretacja energetyczna równania Bernoulliego jest następująca:

wyraz $\frac{v^2}{2g}$ przedstawia energię kinetyczną cieczy w danym przekroju strugi, przypadającą na jednostkę ciężaru przepływającej cieczy, a suma $z + \frac{p}{\gamma}$ przedstawia energię potencjalną na jednostkę ciężaru cieczy.

A więc suma energii kinetycznej i potencjalnej w każdym przekroju strugi cieczy doskonałej jest wielkością stałą.

Na rysunku 4.2 pokazano następujące charakterystyczne linie związane z równaniem Bernoulliego:

a) linia prądu wzniesiona jest ponad linią odniesienia o wartość z ,
b) linia ciśnień - miejsce geometryczne punktów wzniesionych ponad poziom odniesienia o wysokość $z + \frac{p}{\gamma}$,

c) linia energii - w przypadku cieczy doskonałej jest linią poziomą, wzniesioną ponad poziom odniesienia o stałą wysokość $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}$.