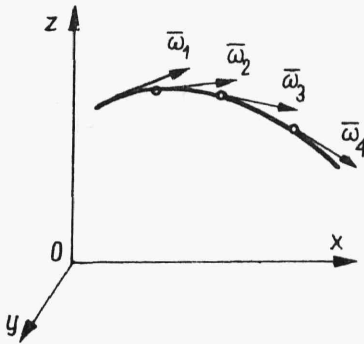
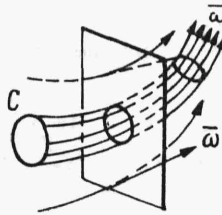


lub w postaci dwóch równań linii wirowej:

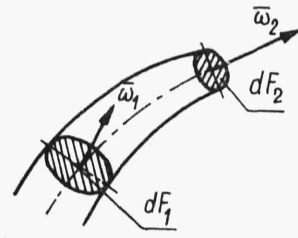
$$\omega_x dy = \omega_y dx; \quad \omega_y dz = \omega_z dy.$$



Rys.3.21



Rys.3.22



Rys.3.23

3.7.2. ROTACJA WEKTORA PRĘDKOŚCI

Rotacją wektora prędkości \bar{v} nazywa się następującą zależność

$$\text{rot } \bar{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (3.30)$$

Zależność między składowymi rotacji a składowymi prędkości kątowej chwilowego obrotu $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ jest następująca:

$$\text{rot}_x \bar{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x,$$

$$\text{rot}_y \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y,$$

$$\text{rot}_z \bar{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z.$$

Stąd

$$\text{rot } \bar{v} = \bar{i} \text{ rot}_x \bar{v} + \bar{j} \text{ rot}_y \bar{v} + \bar{k} \text{ rot}_z \bar{v} = 2(\bar{i} \omega_x + \bar{j} \omega_y + \bar{k} \omega_z) = 2\bar{\omega}.$$

A więc rotacja wektora prędkości \bar{v} równa jest podwójnej prędkości kątowej chwilowego obrotu $\bar{\omega}$ elementu płynu.

3.7.3. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI. TWIERDZENIE HELMHOLTZA

Natężenie strugi wirowej I wyraża się jako podwójny iloczyn prędkości kątowej ω pomnożonej przez przekrój strumienia

$$I = 2 \int_F \omega dF. \quad (3.31)$$

Natężenie strugi wirowej w cieczy doskonałej według twierdzenia Helmholtza zachowuje niezmienną wartość wzdłuż całej strugi wirowej.

Aby uzasadnić powyższe twierdzenie określimy divergencję wektora prędkości kątowej ω :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} \right).$$

Dodając te wyrażenia stronami otrzymamy

$$\text{div } \bar{\omega} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0.$$

Jest to równanie ciągłości ruchu wirowego. Analogicznie do prawa ciągłości w ruchu postępowym, w którym wydatek wzdłuż strugi elementarnej jest wielkością stałą i wyraża się zależnością

$$v dF = v_1 dF_1 = v_2 dF_2 = \text{const},$$