

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.25)$$

3.6.2. ZWIĄZEK MIĘDZY FUNKCJĄ PRĄDU A POTENCJAŁEM PRĘDKOŚCI

Składowe prędkości w płaskim ruchu potencjalnym równe są jak wiadomo, cząstkowym pochodnym potencjału prędkości $\varphi(x,y)$:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Z porównania tych warunków z zależnościami (3.25) wynikają związki, zwane równaniami Cauchy'ego i Riemana:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.26)$$

Po zróźniczkowaniu tych równań otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

skąd

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.27)$$

Wynika stąd, że w ruchu potencjalnym (bezwirowym) funkcje prądu, podobnie jak i potencjał prędkości, spełniają równanie Laplace'a, a więc są funkcjami harmonicznymi.

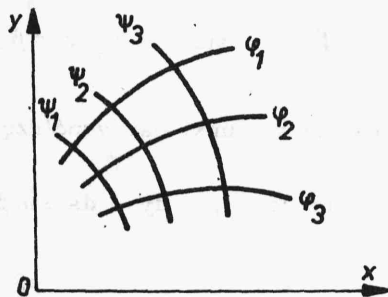
Mnożąc odpowiednio stronami równania (3.26) otrzymamy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.28)$$

Równanie to jest warunkiem ortogonalności dwu rodzin krzywych:

$$\varphi(x,y) = \text{const} \quad \text{i} \quad \psi(x,y) = \text{const},$$

czyli linii jednakowego potencjału prędkości i linii prądu (rys.3.11). Funkcje $\varphi(x,y)$ i $\psi(x,y)$ nazywamy funkcjami harmonicznymi sprzężonymi. Te dwa układy wzajemnie do siebie prostopadłych linii nazywamy siatką hydrodynamiczną.



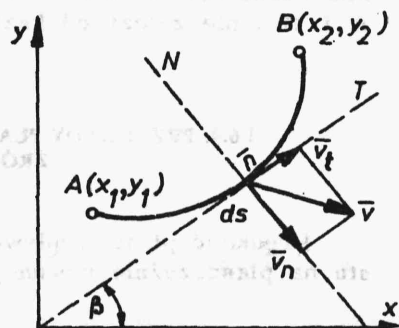
Rys.3.11

3.6.3. NATĘŻENIE PRZEPŁYWU

Natężeniem przepływu Q_{AB} w płaskim ruchu potencjalnym nazywamy strumień płynu przepływający przez odcinek AB dowolnej krzywej (rys. 3.12). Oznaczmy współrzędne punktów A i B odpowiednio przez x_1, y_1 oraz x_2, y_2 . Obierzmy na odcinku krzywej AB element ds i przeprowadźmy do niego prostopadłą N , na której znajduje się jednostkowy wektor normalny \bar{n} .

Oznaczmy kąt nachylenia stycznej T do osi x przez β . Niech wektor prędkości odpowiadający elementowi ds będzie \bar{v} , a jego składowe normalne i styczne do odcinka AB będą odpowiednio \bar{v}_n oraz \bar{v}_t .

Strumień płynu przepływającego przez element ds w jednostce czasu równy jest



Rys.3.12

$$dQ = v_n ds = \bar{v} \bar{n} ds.$$

Natężenie przepływu przez odcinek AB wyrazimy w postaci

$$Q_{AB} = \int_A^B \bar{v} \bar{n} ds = \int_A^B (v_x n_x + v_y n_y) ds,$$