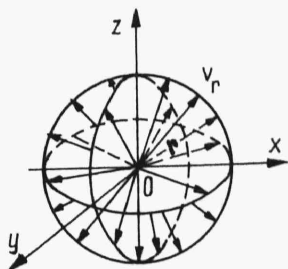


3.5.4. ŹRÓDŁO I UPUST

Zródłem nazywamy punkt osobliwy w przestrzeni o wydajności Q jednostek objętości w jednostce czasu. Linia prądu stanowi przestrzenny pęk promieni wychodzących ze źródła punkowego. Powierzchnie ekwipotencjalne prędkości są kulami współśrodkowymi o wspólnym środku O , zwanym źródłem punktowym. Prędkości wszystkich cząstek skierowane są od źródła na zewnątrz, gdy źródło jest dodatnie, lub do środka, gdy źródło jest ujemne, czyli stanowi tzw. upust (rys.3.9).



Rys.3.9

Rozważmy w przestrzeni kulę o promieniu r . Środkiem kuli jest źródło lub upust. Prędkość przepływu przez dowolny element na powierzchni kuli wynosi

$$v = v_r = \pm \frac{Q}{F} = \pm \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (3.17)$$

Prędkość w kierunku radialnym można przedstawić w postaci

$$v_r = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{Q}{4\pi r^2}$$

lub

$$d\varphi = \pm \frac{Q}{4\pi r^2} dr,$$

skąd otrzymamy potencjał prędkości

$$\varphi = \pm \frac{Q}{4\pi r} = \pm \frac{q}{r}. \quad (3.18)$$

W zależności (3.18) $q = \frac{Q}{4\pi}$ nazywamy natężeniem źródła.

Jeżeli źródło znajduje się w początku prostokątnego układu współrzędnych x, y, z , to promień r będzie równy

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{0,5},$$

a składowe prędkości wynoszą:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{q}{r} \right) = +\frac{q}{r^3} x, \\v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{q}{r} \right) = +\frac{q}{r^3} y, \\v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{q}{r} \right) = +\frac{q}{r^3} z.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Przykład 3.2. Wyznaczyć pole prędkości cieczy doskonałej, określone potencjałem prędkości

$$\varphi = a x + b y + c z.$$

Współczynniki a , b , c nie zależą od x , y , z .

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że funkcja ta spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Funkcja $\varphi(x, y, z)$ jest więc funkcją harmoniczną i określa ruch potencjalny.

Składowe prędkości \bar{v} wyznaczmy następująco:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = c.$$

Ponieważ rzuty wektora prędkości nie zależą od współrzędnych x, y, z , to w tym samym czasie prędkości wszystkich cząstek płynu będą jednakowe, zarówno co do bezwzględnej wartości, jak i kierunku.

Z równania linii prądu (3.1) wynika:

$$v_y dx = v_x dy; \quad v_z dy = v_y dz$$

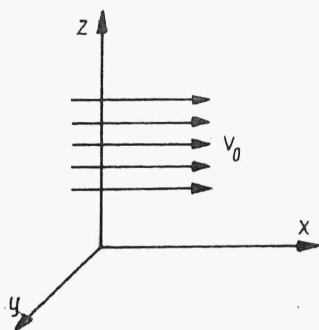
lub po podstawieniu:

$$b dx = a dy; \quad c dy = b dz.$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$y = \frac{b}{a} x + c_1; \quad z = \frac{c}{b} y + c_2.$$

A więc linie prądu w tym przypadku stanowią linie proste równoległe.



Rys.3.10

Przykład 3.3. Wyznaczyć powierzchnie ekwipotencjalne prędkości w równoległym do osi x strumieniu płynu o prędkości $v_0 = \text{idem}$ (rys.3.10).

Rozwiązanie. Składowe prędkości:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 = \text{const},$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Stąd różniczkowe równanie powierzchni ekwipotencjalnej prędkości

$$d\varphi = v_0 dx = 0$$

lub

$$\varphi = v_0 x + C.$$

Powierzchnie ekwipotencjalne prędkości stanowią w tym przypadku płaszczyzny prostopadłe do osi x .

3.6. PŁASKI RUCH POTENCJALNY

W zastosowaniach praktycznych szczególne znaczenie posiada płaski ustalony ruch potencjalny płynu nieściśliwego.

W przypadku płaskiego ruchu płynu doskonałego, odbywającego się w płaszczyźnie xy , składowa prędkość w kierunku osi z

$$v_z = 0.$$