

3.5. PRZESTRZENNY RUCH POTENCJALNY (BEZWIROWY) PŁYNU

3.5.1. POTENCJAŁ PRĘDKOŚCI

Równania (3.10) określają ruch potencjalny (bezwirowy) wówczas, gdy wszystkie składowe prędkości kątowej chwilowego obrotu, będą równe zeru. A więc z zależności (3.9) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Z zależności tych wynika, że rzuty wektora prędkości v_x, v_y, v_z w dowolnym punkcie obszaru bezwirowego przepływu można przedstawić w postaci cząstkowych pochodnych pewnej funkcji $\varphi(x, y, z)$, zwanej potencjałem prędkości:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.\tag{3.12}$$

Łatwo wykazać, że zależności (3.12) spełniają równania (3.11), które stanowią konieczne i wystarczające warunki istnienia potencjału prędkości:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}.\end{aligned}$$

A zatem pole potencjalne określa jednoznacznie potencjał prędkości $\varphi(x, y, z, t)$, spełniający warunki (3.12). Rozwijając różniczkę potencjału prędkości, otrzymamy

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Wektor prędkości \vec{v} w danym punkcie obszaru płynu, poruszającego się ruchem potencjalnym przedstawimy w postaci

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$$

lub po uwzględnieniu zależności (3.12)

$$\vec{v} = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad } \varphi. \quad (3.13)$$

Wektor prędkości \vec{v} w ruchu potencjalnym cieczy doskonałej równy jest gradientowi potencjału prędkości czyli stanowi pochodną, kierunkową potencjału prędkości wzdłuż łuku linii prądu, a więc

$$\vec{v} = \frac{d\varphi}{ds} \vec{s}_0.$$

Symbol \vec{s}_0 oznacza wersor wektora \vec{s} .

Wartość bezwzględna wektora prędkości \vec{v} wynosi

$$v = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)^{0,5} = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]^{0,5}.$$

3.5.2. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI RUCHU POTENCJALNEGO

Uwzględniając warunki (3.12) w równaniu ciągłości ruchu ustalonego (3.6) płynu nieściśliwego otrzymamy równanie ciągłości ruchu potencjalnego w postaci równania Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.14)$$