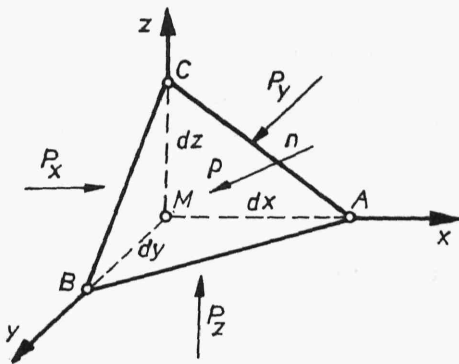


2.2.2. WŁASNOŚCI CIŚNIENIA HYDROSTATYCZNEGO

Ciśnienie hydrostatyczne charakteryzuje się tym, że w danym punkcie nie zależy od kierunku (orientacji) powierzchni przez ten punkt przechodzących zachowując we wszystkich kierunkach tę samą wartość.



Rys.2.2

Tę właściwość możemy uzasadnić jak następuje: wyodrębnimy w otoczeniu punktu $M(x,y,z)$ element cieczy w kształcie czworościanu (rys.2.2) o krawędziach $dx = AM$, $dy = BM$, $dz = CM$, równoległych do odpowiednich osi prostokątnego układu współrzędnych. Rozważmy warunki równowagi tego czworościanu pozostającego pod działaniem sił zewnętrznych, składających się z sił powierzchniowych normalnych (sił ciśnienia hydrostatycznego) dP_x, dP_y, dP_z i dP działających prostopadle do odpowiednich ścian czworościanu $BCM = dS_x$, $ACM =$

$= dS_y$, $ABM = dS_z$, $ABC = dS$ oraz z siły masowej R przypadającej na jednostkę masy. Oznaczmy składowe jednostki siły masowej w kierunku osi współrzędnych przez X, Y, Z oraz ciśnienia hydrostatyczne przez p_x, p_y, p_z, p działające w kierunku osi x, y, z i normalnej n do powierzchni dS .

Siły powierzchniowe normalne można wyrazić następującymi zależnościami:

$$dP_x = p_x dS_x; dP_y = p_y dS_y; dP_z = p_z dS_z; dP = p dS.$$

Mnożąc odpowiednie jednostkowe siły masowe przez masę czworościanu otrzymamy składowe siły masowe w kierunku osi x, y, z :

$$\frac{1}{3} \rho X dS_x dx, \frac{1}{3} \rho Y dS_y dy, \frac{1}{3} \rho Z dS_z dz.$$

Z warunku równowagi czworościanu wynika, że suma rzutów sił powierzchniowych i masowych na dowolny kierunek osi jest równa zeru. Sumując rzuty sił na kierunek osi x otrzymamy

$$p_x dS_x - p dS \cos(n, x) + \frac{1}{3} \rho X dS_x dx = 0.$$

W równaniu tym siłę masową jako wielkość nieskończenie małą wyższego rzędu w porównaniu z siłami ciśnienia hydrostatycznego można pominąć.

W naszym przypadku warunki równowagi czworościanu, którego wymiary dążą do zera, możemy przedstawić w postaci trzech następujących równań odpowiadających kierunkom osi x, y, z :

$$p_x dS_x = p dS \cos(n x),$$

$$p_y dS_y = p dS \cos(n y),$$

$$p_z dS_z = p dS \cos(n z).$$

W równaniach $(n x)$, $(n y)$, $(n z)$ oznaczają kąty zawarte między kierunkiem normalnej n do ściany $ABC = dS$ i odpowiednimi osiami współrzędnych.

Równoległe do odpowiednich rzutni ściany czworościanu są rzutami nachylonej ściany i równe są iloczynowi powierzchni dS i kąta zawartego między normalnymi do nich powierzchniami. Można to wyrazić następującymi związkami:

$$dS_x = dS \cos(n x),$$

$$dS_y = dS \cos(n y),$$

$$dS_z = dS \cos(n z).$$

Podstawiając powyższe zależności w równaniach równowagi elementu cieczy otrzymamy ostatecznie

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

W ten sposób doszliśmy do wniosku, że wymienione ciśnienia hydrostatyczne w danym punkcie M działają w różnych kierunkach, są sobie równe i nie zależą od orientacji elementu powierzchniowego przechodzącego przez ten punkt.

Widzimy więc, że ciśnienie hydrostatyczne jest wielkością bezkierunkową (skalarem) i zależy tylko od współrzędnych $p = p(x, y, z)$. Traktując ciśnienie jako ciągłą i różniczkowalną funkcję współrzędnych punktu można wyrazić zmianę ciśnienia w postaci różniczki zupełnej

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$