

2.12.2. RÓWNOWAGA CIAŁ ZANURZONYCH W CIECZY

Oprócz wyporu działa przeciwnie do niego skierowany ciężar G , zaczepiony w środku ciężkości S_c .

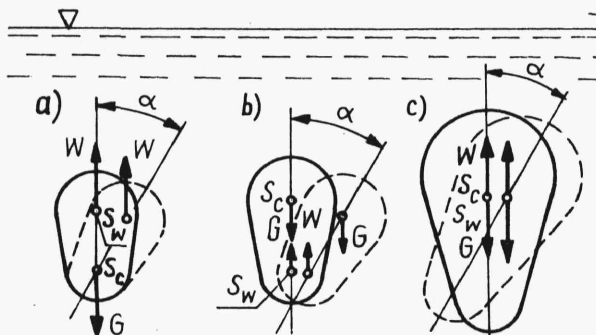
W zależności od wielkości siły ciężenia G w porównaniu z przeciwdziałającym wyporem W można rozważyć trzy przypadki:

a) $G < W$, wówczas siła wypadkowa $W - G$ wypiera ciało w górę do osiągnięcia stanu równowagi, tj. gdy wypór zanurzonej części ciała będzie równy jego ciężarowi.

b) $G = W$, ciało jest całkowicie zanurzone w cieczy i pozostaje w stanie równowagi przy dowolnym zagłębieniu.

c) $G > W$, ciało tonie.

W przypadku ciała zanurzonego w cieczy rozróżniamy trzy warunki równowagi: trwałej, chwiejnej i obojętnej (rys.2.38a,b,c).



Rys.2.38

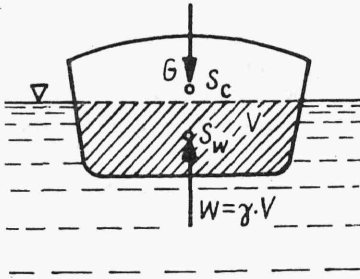
Równowaga trwała (stateczność) ciała zanurzonego w cieczy zachodzi wówczas, jeżeli jego środek ciężkości S_c leży poniżej środka wyporu S_w . W tym przypadku po wychyleniu ciała o niewielki kąt α powstaje moment sił G i W , który przywróci ciało do pierwotnego stanu równowagi, czyli do takiego położenia, kiedy środki ciężkości i wyporu S_c i S_w znajdują się na tej samej osi pionowej.

Jeżeli środek ciężkości leży powyżej środka wyporu, wówczas siła ciężkości i wypór dadzą moment, który zwiększy początkowe wychylenie α . Jest to warunek równowagi chwiejnej (niestateczności) ciała pływającego. Jeśli środek ciężkości pokrywa się ze środkiem wyporu, to siły G i W nie dadzą momentu, a ciało po wychyleniu nie zmieni swego położenia, czyli znajduje się w stanie równowagi obojętnej.

2.12.3. WARUNKI RÓWNOWAGI CIAŁ PŁYWAJĄCYCH

Ogólne warunki równowagi ciał pływających można sformułować następująco: ciało pływające w cieczy pozostaje w stanie równowagi wówczas,

czas, gdy ciężar ciała równy jest wyporowi $G = W$, a środek ciężkości S_c i środek wyporu S_w leżą na wspólnej osi pionowej, zwanej osią pływania (rys.2.39).



Rys.2.39

stateczne tylko w przypadku, gdy środek ciężkości leży poniżej środka wyporu. Ciało pływające na powierzchni cieczy może być w stanie równowagi trwałej (stateczne) również wtedy, gdy środek ciężkości leży nad środkiem wyporu.

Zagadnienie stateczności dla przypadku, gdy środek ciężkości znajduje się powyżej środka wyporu, jest szczególnie istotne w praktyce budowy łodzi i statków w związku z rozmieszczeniem urządzeń i ładunku na statku.

Założmy, że w położeniu początkowym ciało pływające miało pionową płaszczyznę symetrii prostopadłą do płaszczyzny rysunku (rys.2.39). Niech środek ciężkości S_c leży nad środkiem wyporu S_w .

Równowaga trwała (stateczność) zachodzi wówczas, gdy ciało wychylone chwilowym działaniem siły zewnętrznej powróci do pierwotnego stanu równowagi.

Zarówno przesunięcie ciała w kierunku poziomym, jak i obrót dookoła osi pionowej nie wpływają na zmianę stanu równowagi ciała.

Przesunięcie pionowe ciała wpływa na wielkość wyporu, nie zmieniając linii działania wyporu. W tym przypadku ciało zanurza się lub wypływa, po czym powraca do stanu równowagi, kiedy wypór stanie się równy ciężarowi ciała.

Wychylenie z położenia równowagi może nastąpić wówczas, gdy obrócimy ciało dookoła osi poziomej.

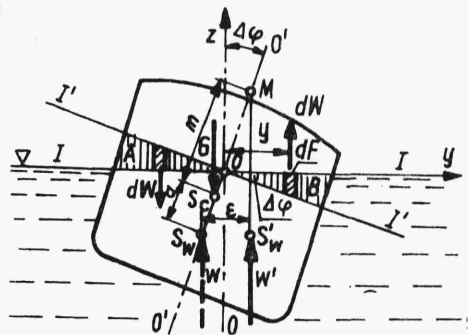
Wychylmy ciało z położenia początkowego za pomocą obrotu o mały kąt $\Delta\varphi$. Ciało obróci się wówczas dookoła chwilowego środka obrotu O , przez który przechodzi oś x prostopadła do płaszczyzny rysunku.

Wypór równy jest iloczynowi objętości V zanurzonej części ciała i ciężaru właściwego cieczy γ . Środek wyporu S_w znajduje się w środku geometrycznym objętości V .

Powierzchnię swobodną cieczy przecinającą ciało pływające nazywamy płaszczyzną pływania.

Kontur przekroju ciała płaszczyzną pływania nazywamy linią wodną.

Warunki równowagi ciał pływających na powierzchni cieczy są zupełnie odmienne od warunków ciał całkowicie zanurzonych, które, jak wykazaliśmy, są



Rys.2.40

szczyzny rysunku (rys.2.40). Wskutek obrotu chwilowa oś pływania $O' - O'$ tworzy z pierwotną osią pływania $O - O$ kąt $\Delta\varphi$. Ten sam kąt zawarty jest między chwilową powierzchnią pływania $I' - I'$ a pierwotną powierzchnią pływania $I - I$.

Przy wychyleniu obrotowym ciała z cieczy wynurzy się klin o objętości A , równocześnie zatopi się klin o tej samej objętości B . W związku z tym objętość zanurzonej części ciała nie ulega zmianie, a wypór w położeniu początkowym równy jest wyporowi po obrocie $W = W' = \gamma V$.

Zmieni się tylko kształt zanurzonej części ciała, co spowoduje przesunięcie się środka wyporu S_w w stronę zatopionego klina do położenia S'_w . Środek ciężkości S_c pozostanie po obrocie ciała w tym samym miejscu.

Po wychyleniu ciała z położenia równowagi wektor wyporu W przejdzie przez nowy środek wyporu S'_w w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pływania $I - I$ i przetnie oś pływania $O' - O'$ w punkcie M . Punkt ten nazywamy metacentrum, a jego odległość od środka ciężkości S_c nosi nazwę wysokości metacentrycznej, $m = MS_c$.

Wskutek obrotu o mały kąt $\Delta\varphi$ ciało pozostanie pod działaniem pary sił, utworzonej przez jego ciężar G oraz wypór W' . Siły G i W' dają, jak widać na rysunku 2.40, moment usiłujący sprowadzić ciało do pierwotnego stanu równowagi. Jest to przypadek równowagi trwałej (stateczności) ciała, która następuje wówczas, gdy metacentrum M leży powyżej środka ciężkości S_c , czyli wysokość metacentryczna jest dodatnia $m > 0$. Rozważmy teraz przesunięcie się punktu M w dół po osi pływania (rys.2.40). Gdy metacentrum M pokryje się ze środkiem ciężkości S_c , tj. $m = 0$, para sił G i W' stanie się równa zeru. W tym przypadku równowaga ciała będzie obojętna. Natomiast równowaga chwiejna (niestateczność) ciała nastąpi w przypadku, gdy metacentrum znajdzie się poniżej środka ciężkości ($m < 0$), wówczas para sił G i W' wychyla coraz bardziej ciało od pierwotnego położenia.

Z rozważań tych wynika, że stateczność lub niestateczność ciała pływającego na powierzchni cieczy zależy od wzajemnego położenia na osi pływania metacentrum M i środka ciężkości S_c . Stateczność ciała pływającego wymaga, aby metacentrum leżało powyżej środka ciężkości ($m > 0$).

Wysokość metacentryczną m obliczymy na zasadzie działania momentów w wyniku obrotu ciała dokoła osi x o kąt $\Delta\varphi$.

Oznaczmy na rysunku 2.40 wielkość przesunięcia środka wyporu S_w do S'_w przez ε , odległość środka ciężkości S_c od środka wyporu S_w literą a . Przyjmujemy dodatnią wartość $a > 0$, gdy środek ciężkości leży powyżej środka wyporu.

Przesunięcie środka wyporu S_w do położenia S'_w zostało spowodowane wynurzeniem klina A i zanurzeniem klina B . Wobec tego moment $W'\varepsilon$ równy jest momentowi M_x , jaki dają oba kliny A i B względem osi obrotu x ($W'\varepsilon = M_x$).

W celu wyznaczenia tego momentu podzielmy objętość klinów na elementarne słupki pionowe o podstawach dF w płaszczyźnie pływania i o wysokościach równych iloczynowi $y\Delta\varphi$. Na każdy taki słupek działa

elementarny wypór $dW = \gamma y \Delta\varphi dF$. Elementarny moment wywołany wyporem tego słupka względem osi x równy jest: $dM_x = y dW = \gamma \Delta\varphi y^2 dF$. Całkowity moment M_x wyrazi się sumą elementarnych momentów w postaci

$$M_x = \gamma \Delta\varphi \int_F y^2 dF = \gamma \Delta\varphi J_x,$$

gdzie $\int_F y^2 dF = J_x$ oznacza moment bezwładności pola przekroju ciała płaszczyzną pływania względem osi x .

Suma momentów wszystkich sił jest równa $W'\varepsilon = M_x$, zaś wypór $W' = \gamma V$.

Po uwzględnieniu powyższych zależności mamy

$$\gamma V \varepsilon = \gamma \Delta\varphi J_x,$$

gdzie V - objętość zanurzonej części ciała, czyli

$$\varepsilon = \Delta\varphi \frac{J_x}{V}.$$

Przyjmując kąt $\Delta\varphi$ jako mały, wyznaczmy z trójkąta $S_w M S'_w$

$$\varepsilon = (m + a) \Delta\varphi.$$

Porównując dwie ostatnie zależności otrzymujemy

$$m = \frac{J_x}{V} - a. \quad (2.46)$$

Z zależności tej wynika, że wysokość metacentryczna m , która stanowi kryterium stateczności, zależy od kształtu i wielkości ciała częściowo zanurzonego.

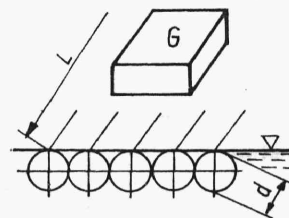
Z zależności (2.46) wynika, że ciało częściowo zanurzone jest zawsze stateczne, gdy środek ciężkości leży poniżej środka pływania. W tym przypadku odległość metacentryczna jest zawsze dodatnia ($m > 0$),

ponieważ $a < 0$ i $\frac{J_x}{V} > 0$.

Jeżeli środek ciężkości znajduje się nad środkiem wyporu, to ciało może pozostać w równowadze trwałej tylko wówczas gdy $0 < a < \frac{J_x}{V}$.

Jeżeli $a = \frac{J_x}{V}$, to $m = 0$, równowaga jest obojętna. Gdy $a > \frac{J_x}{V}$, wówczas $m < 0$, równowaga staje się chwiejna.

Przykład 2.11. Obliczyć n drewnianych pali o jednakowych średnicach $d = 300$ mm i długościach $L = 10$ m, potrzebną do wykonania tratwy, na której ma być przewożony ciężar $G = 2100$ kG. Ciężar właściwy mokrego drewna $\gamma_d = 800$ kG/m³. Pale pod obciążeniem są całkowicie zanurzone w ten sposób, że stykają się górną częścią ze zwierciadłem wody (rys.2.41).



Rys.2.41

Rozwiązanie. Zastosujemy równanie równowagi sił

$$Q + G = W.$$

Ciężar belek

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \gamma_d L n.$$

Wypór

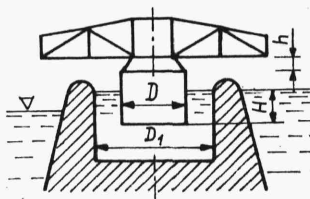
$$W = \frac{\pi d^2}{4} \gamma L n.$$

Po podstawieniu do równania równowagi sił otrzymamy

$$\frac{\pi d^2}{4} \gamma_d L n + G = \frac{\pi d^2}{4} \gamma L n,$$

stąd

$$n = \frac{4G}{\pi d^2 L (\gamma - \gamma_d)} = \frac{4 \cdot 2100}{\pi \cdot 0,3^2 \cdot 10(1000 - 800)} = 15.$$



Rys.2.42

Przykład 2.12. Obrotowe przęsło mostu opiera się na cylindrycznym pływaku o średnicy $D = 3,4$ m, który pływa w komorze o średnicy $D_1 = 3,6$ m. Określić:

1) głębokość zanurzenia pływaka H , jeśli ciężar całkowity przęsła wraz z pływakiem wynosi $G = 30\,000$ kG,

2) obniżenie się jezdni przęśła h przy dodatkowym obciążeniu siłą $P = 10\,000\text{ kG}$ (rys.2.42).

Rozwiązanie 1. Z równania, określającego wypór równy ciężarowi znajdziemy głębokość zanurzenia H ,

$$G = W = \gamma_{H_2O} \frac{\pi D^2}{4} H$$

stąd

$$H = \frac{4G}{\gamma_{H_2O} \pi D^2} = \frac{4 \cdot 30\,000}{\pi 3,4^2 \cdot 1000} = 3,3\text{ m.}$$

2. Przy dodatkowym obciążeniu $P = 10\,000\text{ kG}$, pływak zwiększy swoje zagłębienie o H_1

$$P = W_1 = \gamma_{H_2O} \frac{\pi D^2}{4} H_1,$$

stąd

$$H_1 = \frac{4P}{\gamma_{H_2O} \pi D^2} = \frac{4 \cdot 10\,000}{1000 \cdot \pi \cdot 3,4^2} = 1,1\text{ m.}$$

Opuszczenie się jezdni h obliczamy z równości wypartej cieczy przez pływak

$$V_p = \frac{\pi D^2}{4} h,$$

gdzie h - różnica poziomów jezdni.

Z drugiej strony objętość wypartej wody V_p równa się objętości wody zawartej w pierścieniu

$$V_p = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D^2) H_1.$$

Porównując te wielkości określimy h

$$\frac{\pi}{4} D^2 h = \frac{\pi}{4} (D_1^2 - D^2) H_1,$$

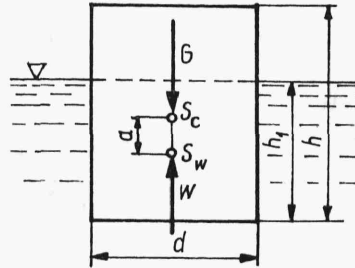
stąd

$$h = \frac{(D_1^2 - D^2)H_1}{D^2} = \frac{(3,6^2 - 3,4^2)1,1}{3,4^2} = 0,13 \text{ m.}$$

Przykład 2.13. Jednorodny walec z drewna o ciężarze właściwym $\gamma_d = 700 \text{ kg/m}^3$ pływa w wodzie w sposób pokazany na rysunku 2.43. Obliczyć stosunek średnicy do wysokości (d/h) walca, przy którym będzie on w stanie równowagi trwałej.

Rozwiązanie. Warunkiem równowagi trwałej jest spełnienie nierówności

$$\frac{J_x}{V} - a > 0.$$



Rys. 2.43

Obliczamy poszczególne wielkości. Moment bezwładności płaszczyzny pływania względem osi poziomej wynosi

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Objętość zanurzona

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h_1,$$

gdzie h_1 - głębokość zanurzenia.

Odległość środka ciężkości S_c od środka wyporu S_w

$$a = \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}.$$

Wartość h_1 obliczamy z równania równowagi $G = W$.
Ciężar walca

$$G = \gamma_d \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Wypór

$$W = \gamma V = \gamma \frac{\pi d^2}{4} h_1.$$

Ponieważ $G = W$, to

$$\gamma_d \frac{\pi d^2}{4} h = \gamma \frac{\pi d^2}{4} h_1,$$

czyli

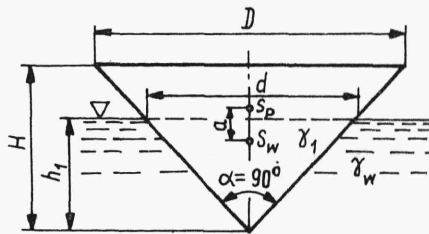
$$h_1 = \frac{\gamma_d}{\gamma} h = \frac{750}{1000} h = 0,75 h.$$

Podstawiając otrzymane zależności do wzoru wyrażającego warunek równowagi otrzymujemy:

$$\frac{\pi d^4}{64} : \frac{\pi d^2}{4} 0,75 h - \frac{h}{2} + \frac{0,75 h}{2} > p.$$

Rozwiązując tę nierówność, znajdziemy szukany stosunek

$$\frac{d}{h} > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$



Rys.2.44

Przykład 2.14. Dany jest stożek prosty o podstawie kołowej. Wymiary stożka: średnica D , kąt wierzchołkowy $\alpha = 90^\circ$. Jaki musi być stosunek ciężaru właściwego wody γ_{H_2O} , aby

stożek pływał w położeniu wierzchołkiem w dół (rys.2.44)?

Rozwiązanie. Zakładamy, że stożek jest zanurzony na głębokość h_1 oraz wyznaczamy położenie środków ciężkości stożka i wypartej cieczy. Warunkiem pływania stożka w żądanym położeniu jest spełnienie nierówności

$$\frac{J_x}{V} - a > 0.$$

Moment bezwładności płaszczyzny pływania

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Objętość zanurzona

$$V = \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} h_1.$$

Odległość środka ciężkości S_c od środka wyporu S_w

$$a = \frac{3}{4} (H - h_1).$$

We wzorach tych występuje dodatkowa nieznana wielkość h_1 ; obliczamy ją z warunku

$$G = W,$$

gdzie: G - ciężar stożka,
 W - wypór,

$$G = \gamma_1 \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} H,$$

$$W = \gamma_{H_2O} \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} h_1.$$

W naszym przypadku $D = 2H$; $d = 2h_1$.
Z porównania tych zależności znajdziemy

$$h_1 = H \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{\gamma_{H_2O}}}.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie do nierówności otrzymamy

$$\frac{\pi (2h_1)^4 12}{\pi (2h_1)^2 h_1 64} - \frac{3}{4} (H - h_1) > 0.$$

Po rozwiązaniu tej nierówności otrzymamy

$$h_1 > \frac{H}{2}$$

Podstawiając wyrażenie na h_1 otrzymamy

$$H \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{\gamma_{H_2O}}} > \frac{H}{2},$$

stąd

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_{H_2O}} > \frac{1}{8}.$$

3. KINEMATYKA PŁYNÓW

3.1. ANALITYCZNE METODY BADANIA RUCHU PŁYNÓW

Przedmiotem kinematyki płynów jest ustalenie ogólnych praw ruchu płynu względem danego układu odniesienia. Ruch ten będzie opisany, gdy znane będą położenia elementów płynu uzależnione od ich przemieszczenia w czasie i przestrzeni. Z ruchem elementu wiążą się zmiany takich wielkości wektorowych i skalarnych jak np. prędkość, przyspieszenie, gęstość, ciśnienie.

W mechanice płynów stosowane są dwie podstawowe metody badania ruchu: metoda Lagrange'a i metoda Eulera.

3.1.1. METODA LAGRANGE'A

Metoda ta polega na badaniu zmiany położenia poszczególnych elementów, rozpatrywanych indywidualnie w danym ośrodku.

Rozważmy w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z element płynu A , którego położenie początkowe w chwili początkowej t_0 okreś-