5.6. WYPŁYW GAZU PRZEZ DYSZĘ. DYSZA LAVALA

Rozważmy zjawiska zachodzące przy przepływie gazu w strumieniu lub dyszy o zmiennym przekroju.

Do analizy tego zjawiska wykorzystamy dwa równania dla przepływu jednowymiarowego:

1) równanie Eulera

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}, \tag{5.45}$$

2) równanie zachowania masy

$$\varrho \; v \; F = \text{const.} \tag{5.46}$$

Traktując oś strumienia (przewodu) o zmiennym przekroju jako oś x zróżniczkujemy równanie (5.46) względem x, otrzymując

$$\frac{d\varrho}{dx} v F + \varrho \frac{dv}{dx} F + \varrho v \frac{dF}{dx} = 0.$$

Mnożąc wszystkie człony równania przez $\frac{v}{\varrho F}$, otrzymamy

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dx} v^2 + v \frac{dv}{dx} + \frac{v^2}{F} \frac{dF}{dx} = 0$$

lub

$$v \frac{dv}{dx} = - \left(\frac{v^2}{\varrho} \frac{d\varrho}{dx} + \frac{v^2}{F} \frac{dF}{dx} \right). \tag{5.47}$$

Zastępując w równaniu (5.47) wielkość $\frac{d\varrho}{dx}$ przez

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{d\varrho}{dp} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{a^2} \frac{dp}{dx}$$

oraz wykorzystując równanie (5.45) otrzymujemy

$$\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\varrho} \frac{v^2}{a^2} \frac{dp}{dx} + \frac{v^2}{F} \frac{dF}{dx}$$

lub ostatecznie

$$\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{dp}{dx} = \varrho \frac{v^2}{F}\frac{dF}{dx}. \qquad (5.48)$$

Równania (5.45) i (5.48) wiążą ze sobą trzy wielkości F, v i p. Rozważmy następujące możliwe przypadki:

1. Prędkość przepływu gazu v jest mniejsza od prędkości dźwięku a, czyli $v < a$, wówczas $\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) > 0$, skąd na mocy równania (5.48) znak pochodnej $\frac{dp}{dx}$ jest zgodny ze znakiem pochodnej $\frac{dF}{dx}$. Jeżeli zatem przekrój strugi zmniejsza się $\left(\frac{dF}{dx} < 0\right)$, to i ciśnienie maleje $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$. Prędkość v będzie się przy tym powiększała, co wynika z równania (5.45), ponieważ w tym przypadku $\frac{dv}{dx} > 0$. Analogicznie można wykazać, że przy powiększeniu F ciśnienie p rośnie, a prędkość v maleje.

2. Prędkość przepływu gazu v jest większa od prędkości dźwięku a, tzn. $v > a$.

W tym przypadku $\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) < 0$, a zatem znaki $\frac{dp}{dx}$ i $\frac{dF}{dx}$ nie będą zgodne. Jeśli np. przekrój F zmniejsza się, wówczas ciśnienie rośnie $\left(\frac{dp}{dx} > 0\right)$. Z równania (5.45) widać, że prędkość będzie przy tym malała. Charakter związku pomiędzy prędkością v (lub ciśnieniem) a przekrojem F zależy w sposób istotny od stosunku prędkości przepływu do prędkości dźwięku, czyli od liczby Macha $M = \frac{v}{a}$.

Z powyższych przypadków wynika, że ze wzrostem przekroju F prędkość przepływu v rośnie przy $M > 1 (v > a)$, natomiast v maleje przy $M < 1 (v < a)$.

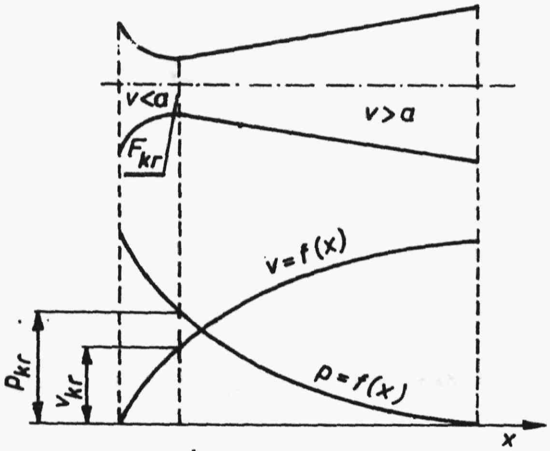
Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla przypadku gdy F maleje. Wówczas prędkość v maleje przy $M > 1$, zaś prędkość ta rośnie przy $M < 1$.

3. Prędkość v równa jest prędkości dźwięku, tzn. $v = a$.

W tym przypadku $1 - \frac{v^2}{a^2} = 0$, z równania (5.48) wynika, że $\frac{dF}{dx} = 0$.

Z analizy wynika, że przy ciągłym wzroście prędkości przepływu v powierzchnie przekrojów strumienia będą początkowo malały przy przepływach poddźwiękowych ($M < 1$) a następnie zwiększały się przy przepływach naddźwiękowych (M > 1). Jak widać z powyższego równania $\frac{dF}{dx} = 0$ przy $\frac{v}{a} = 1$, tzn. prędkość przepływu osiąga prędkość dźwięku, czyli $v = v_{kr}' = a$ w najmniejszym przekroju strugi.

Na tej zasadzie skonstruowano dyszę Lavala (rys. 5.43), za pomocą której uzyskuje się prędkości poddźwiękowe w konfuzorze, prędkości krytyczne w najwęższym przekroju oraz prędkości naddźwiękowe w dyfuzorze. Na rys.5.43 podano charakter zmiany prędkości i ciśnień wzdłuż takiej dyszy.



Rys.5.43

Prędkość strumienia gazu, wypływającego z dyszy Lavala oblicza się ze wzoru (5.37).

Przykład 5.10. Obliczyć prędkość wypływu powietrza ze zbiornika przez dyszę Lavala do atmosfery oraz temperaturę powietrza na wylocie, jeżeli ciśnienie w zbiorniku $p_1 = 250$ ata $= 245,25$ bar, a temperatura $T_1 = 288$ K.

Rozwiązanie. Prędkość na wylocie dyszy obliczamy ze wzoru (5.37):

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\varrho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]},$$

$$\frac{p_1}{\varrho_1} = R\,T_1 .$$

Podstawiając zadane wartości otrzymamy

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,41}{1,41 - 1}\,287,04 \cdot 288\left[1 - \left(\frac{1}{250}\right)^{\frac{1,41-1}{1,41}}\right]} = 678 \text{ m/s} .$$

Ze wzoru (5.44) obliczymy

$$T_2 = T_1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}\,\frac{v_2^2}{g} = 288 - \frac{1,41 - 1}{1,41 \cdot 287,04} \cdot \frac{678^2}{2} = 59\ \mathrm{K}\,.$$

5.7. ZASTOSOWANIE ZASADY ILOŚCI RUCHU

Z zasady ilości ruchu wynika, że siłę zewnętrzną działającą na strumień płynu o masie m można przedstawić w postaci

$$\bar{P} = m\,\frac{d\bar{v}}{dt}\,.$$

Masę płynu, ulegającą zmianie pędu w czasie dt można określić

$$m = \rho\, Q\, dt\,,$$

gdzie Q - wydatek objętościowy rozpatrywanego strumienia.

Uwzględniając powyższą zależność w równaniu (5.35) otrzymamy

$$\bar{P} = \rho\, Q\, d\bar{v}\,. \tag{5.49}$$

Zakładając, że w przedziale czasu od 0 do t siła $P = \mathrm{const}$ a prędkość zmienia się od v_1 do v_2, zależność (5.49) napiszemy w postaci

$$\bar{P} = \rho Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \rho Q\,\bar{v}_2 - \rho Q\,\bar{v}_1\,. \tag{5.50}$$

Z równania (5.50) wynika, że zmiana ilości ruchu strumienia płynu jest równa działającej na niego sile zewnętrznej.

Jeżeli rozważymy ruch ustalony cieczy doskonałej, to reakcja $\bar{R}$ wywierana przez swobodny strumień na powierzchnię ciała stałego jest równa

$$\bar{R} = -\bar{P}$$

lub po uwzględnieniu zależności (5.49)

$$\bar{R} = \rho Q(\overline{v_1 - v_2}) = \rho Q\,\bar{v}_1 - \rho Q\,\bar{v}_2\,. \tag{5.51}$$