Głębokość

$$h_p = k\, H_o = 0,61 \cdot 2,43 = 1,48 \text{ m},$$

wzniesienie

$$a = h_d - p_1 = 2,5 - 0,5 = 2 \text{ m},$$

a więc

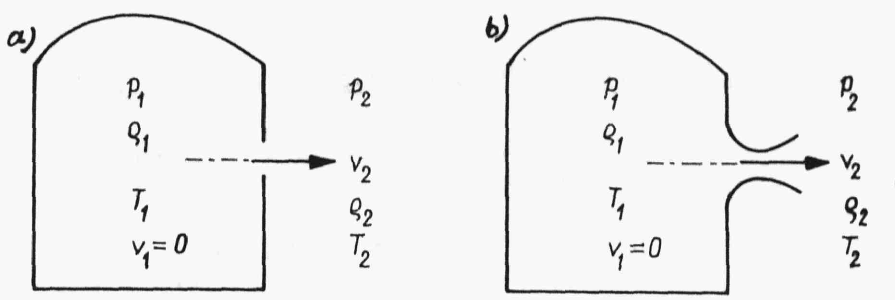
$$a = 2 \text{ m} > h_p = 1,48 \text{ m}.$$

Z tego wynika, że przelew jest zatopiony. Wydatek przelewu obliczamy ze wzoru (5.32):

$$Q = \alpha\, a\, b \sqrt{2g(H_o - a)} = 0,88 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{19,62(2,43 - 2)} = 15,17 \text{ m}^3/\text{s}.$$

5.5. WYPŁYW GAZU PRZEZ OTWÓR

Rozważmy wypływ gazu ze zbiornika przez otwór lub krótkie dysze z obszaru wysokiego ciśnienia do obszaru niższego ciśnienia. W przypadku wypływu gazu ze zbiornika do atmosfery przez otwór (rys.5.41a) lub przez dyszę (rys.5.41b) zakładamy przemianę adiabatyczną.



Rys.5.41

Prędkość wypływu ze zbiornika obliczymy z równania Bernoulliego (4.28), przyjmując $v_1 = 0$, a więc

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_2}{\varrho_2}, \tag{5.35}$$

skąd

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)}.$$

Z równania adiabaty

$$\frac{p_1}{\varrho_1^{\varkappa}} = \frac{p_2}{\varrho_2^{\varkappa}}$$

otrzymujemy

$$\varrho_2 = \varrho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\varkappa} \tag{5.36}$$

lub po przekształceniu

$$\frac{p_2}{\varrho_2} = \frac{p_1}{\varrho_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Podstawiając tę zależność we wzorze (5.36) otrzymujemy

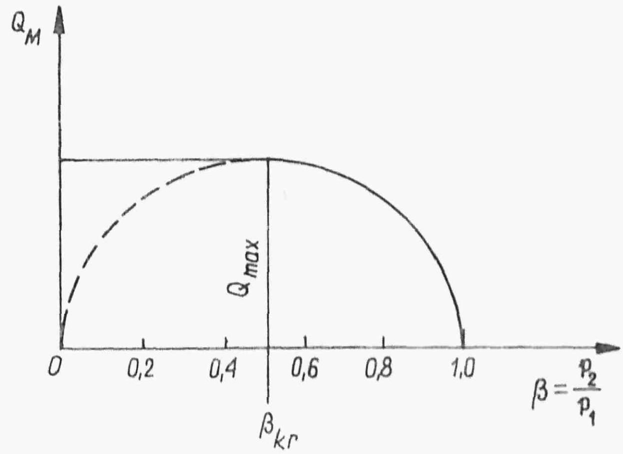
$$v_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{\varrho_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{5.37}$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru St.Venanta-Wantzela.

Podstawiając otrzymane wyrażenie na prędkość wypływu gazu przez otwór do równania ciągłości (4.29) otrzymamy po uwzględnieniu zależności (5.36)

$$Q_M = F_2\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\,p_1\,\varrho_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}. \tag{5.38}$$

Na podstawie tego wzoru podano wykres zależności wydatku Q_M od stosunku ciśnień $\frac{p_2}{p_1}$ (rys.5.42).



Rys.5.42

Z analizy zjawiska wypływu gazu ze zbiornika na podstawie wzoru (5.38) wynika, że dla ciśnienia zewnętrznego $p_2 = 0$ wydatek masowy jest równy zeru $Q_M = 0$. Wynik ten jest niezgodny z rzeczywistym wydatkiem i nosi nazwę paradoksu St.Venanta - Wantzela.

Różniczkując Q_M względem $\frac{p_2}{p_1}$ otrzymamy warunek na maksymalny wydatek Q_{max}

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} . \tag{5.39}$$

Lewą część tej zależności $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr}$ nazywamy krytycznym stosunkiem ciśnień, któremu odpowiada wydatek maksymalny (rys.5.42).

Krytyczny stosunek ciśnień dla powietrza przy $\varkappa = 1{,}41$ wynosi

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0{,}528.$$

Z równania adiabaty (5.36) i po uwzględnieniu warunku krytycznego (5.39) otrzymamy stosunek krytyczny odpowiednich gęstości gazu

$$\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)_{kr} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} . \tag{5.40}$$

Podstawiając (5.39) do (5.37) otrzymujemy wzór na prędkość krytyczną wypływu, równą prędkości dźwięku a w danym ośrodku

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{p_1}{\varrho_1}} . \tag{5.41}$$

Wyrażając iloraz $\frac{p_1}{\varrho_1}$ w zależności od $\frac{p_2}{\varrho_2}$ dla warunków krytycznych można powyższy wzór przedstawić w postaci

$$v_{kr} = a = \sqrt{\varkappa \frac{p_2}{\varrho_2}} . \tag{5.42}$$

Wydatek maksymalny osiąga się przy krytycznej prędkości wypływu, tj. po uwzględnieniu zależności (5.40) i (5.41)

$$G_{max} = F \varrho_{kr} v_{kr} = F \cdot \sqrt{\varkappa p_1 \varrho_1 \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}} . \tag{5.43}$$

Nawiązując do paradoksu St.Venanta-Wantzela należy zauważyć, że ciśnienie wylotowe jest większe od ciśnienia otoczenia ($p_{wyl} > p_2$), a rozprężenie następuje z dala od otworu. Przy zmniejszaniu p_2 poniżej p_{kr} prędkość wypływu nie ulega zmianie, zachowując stale wartość krytyczną.

Przy obliczaniu wypływu gazu przez otwory i dysze należy więc stosować następujące kryteria:

1. Jeżeli $0 \leqslant \frac{p_2}{p_1} \leqslant \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr}$, to w tym zakresie prędkość i wydatek gazu są stałe ($v_2 = v_{kr}$, $Q_M = Q_{max}$) i obliczamy je ze wzorów (5.40) i (5.43).

2. Jeżeli $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} < \frac{p_2}{p_1} \leqslant 1$, to prędkość i wydatek obliczamy ze wzorów (5.37) i (5.38).

Korzystając z równania Clapeyrona $\frac{p}{\varrho} = R\,T$ obliczamy z równania Bernoulliego (5.35)

$$T_2 = T_1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}\,\frac{v_2^2}{2}. \tag{5.44}$$

Przykład 5.9. Przez otwór w zbiorniku wypływa powietrze. Ciśnienie wewnątrz zbiornika wynosi $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m^2, a temperatura w nim $T_1 = 3000$ K. Obliczyć prędkość wypływu powietrza, jeżeli ciśnienie zewnętrzne wynosi $p_2 = 10^5$ N/m^2 oraz temperaturę wypływającego powietrza. Współczynnik prędkości $\alpha = 0{,}706$.

Rozwiązanie. Stosunek ciśnień wynosi:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{10^5}{2 \cdot 10^5} = 0{,}5\,,$$

a więc

$$\frac{p_2}{p_1} < \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr}\,,$$

gdyż dla powietrza $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_{kr} = 0{,}528.$

Obliczamy więc prędkość krytyczną ze wzoru (5.41) z uwzględnieniem współczynnika α

$$v_2 = v_{kr} = \alpha\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\,\frac{p_1}{\varrho_1}} = \alpha\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\,g\,R\,T_1}\,.$$

Po podstawieniu zadanych wartości

$$v_2 = v_{kr} = 0{,}706\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}41}{1{,}41 + 1}\,9{,}81 \cdot 29{,}28 \cdot 300} = 222 \text{ m/s}.$$

Temperaturę wypływającego powietrza obliczymy ze wzoru (5.44)

$$T_2 = 300 - \frac{1{,}41 - 1}{1{,}41 \cdot 29{,}28 \cdot 9{,}81}\,\frac{222^2}{2} = 275 \text{ K}.$$