Z własności (w3) wnętrza zbioru wynika, że wnętrze zbioru jest zawsze zbiorem otwartym. Z własności (w4) i (w5) wnętrza zbioru wynika, że zbiór pusty i cała przestrzeń X są zbiorami otwartymi. Zatem zbiór pusty i cała przestrzeń X są zarówno zbiorami domkniętymi, jak zbiorami otwartymi.

§ 55. Twierdzenie

Dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym.

D| $A = A^0 \iff A = (\overline{A^c})^c \iff A^c = \overline{A^c}$

§ 56. Twierdzenie

Dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym.

D| $A = \bar{A} \Rightarrow A^c = (\bar{A})^c \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^c)^0 = \left[(\bar{A})^c\right]^0 = (\bar{\bar{A}})^c = (\bar{A})^c = A^c$

§ 57. Twierdzenie

Iloczyn dowolnej mnogości $\mathcal{F}$ zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

D| $\left(A = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\right) \wedge \left(\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}\right) \Rightarrow \left(\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} A \subset F\right) \wedge \left(\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} \bar{A} \subset \bar{F}\right) \wedge \left(\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}\right) \Rightarrow \bigwedge_{F\in\mathcal{F}} \bar{A} \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \Rightarrow \bar{A} \subset A$

skąd na mocy własności (d1) domknięcia zbioru

$$A = \bar{A}$$

§ 58. Twierdzenie

Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

D| Na mocy własności (d6) domknięcia zbioru

$A_k = \bar{A}_k$ dla $k = 1,\dots,n \quad \Rightarrow \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

§ 59. Twierdzenie

Suma dowolnej mnogości $\mathcal{G}$ zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

D| Niech

$$\mathcal{F} = \{ G^c : G \in \mathcal{G} \}$$

$\mathcal{F}$ jest zatem klasą zbiorów domkniętych. Na mocy twierdzeń § 53 i § 55 mamy

$$A = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \iff \overline{A^c} = \overline{\Big(\bigcup_{\mathcal{G}} G\Big)^c} = \overline{\bigcap_{\mathcal{F}} G^c} = \bigcap_{\mathcal{F}} G^c = \Big(\bigcup_{\mathcal{G}} G\Big)^c = A^c \iff A = A^o$$

§ 60. Twierdzenie

Iloczyn skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

D| $$\Big(A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \wedge \Big(\bigwedge_k A_k = A_k^o\Big) \Rightarrow \overline{A^c} = \overline{\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big)^c} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k^c} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c =$$

$$= \Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big)^c = A^c \Rightarrow A = A^o$$

§ 61. Zbiory G_δ i zbiory F_σ

Zbiorami G_δ nazywamy zbiory będące przeliczalnymi iloczynami zbiorów otwartych.

Zbiorami F_σ nazywamy zbiory będące przeliczalnymi sumami zbiorów domkniętych.

Zbiorami $G_{\delta\sigma}$ nazywamy zbiory będące przeliczalnymi sumami zbiorów G_δ, zbiorami $F_{\sigma\delta}$ nazywamy zbiory będące przeliczalnymi iloczynami zbiorów F_σ.

W podobny sposób definiujemy zbiory $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, ...

§ 62. Warunek Cauchy'ego

Ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej X spełnia warunek Cauchy'ego $\overset{\text{def}}{\iff} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{N \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{m,n \in \mathfrak{N} \\ m,n > N}} |x_m - x_n| < \varepsilon.$

§ 63. Twierdzenie

Każdy ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej X zbieżny w tej przestrzeni spełnia warunek Cauchy'ego.

D] $$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{m,n\in\mathfrak{N}\\ m,n>N}} |x_m - x_n| \leqslant |x_m - x| + |x - x_n| < \varepsilon$$

§ 64. Przestrzeń zupełna

Przestrzeń metryczna X jest zupełna $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1, x_2, \ldots \in X} \Big((x_n) \text{ spełnia warunek Cauchy'ego} \Rightarrow \bigvee_{x\in X} x = \lim_{n\to\infty} x_n\Big)$$

Przestrzenie $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Z}$ rozważamy zawsze jako przestrzenie metryczne z metryką równą wartości bezwzględnej (w przypadku przestrzeni $\mathfrak{Z}$ modułowi) różnicy dwu liczb $|x-y|$.

Przestrzeń $\mathfrak{N}$ jest przestrzenią zupełną, ponieważ warunek Cauchy'ego jest dla dowolnego ciągu (x_n) spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} x_n = k \in \mathfrak{N}$$

skąd wynika istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = k \in \mathfrak{N}$$

Analogicznie wykazujemy, że przestrzenie $\mathfrak{N}_0$ i $\mathfrak{I}$ są przestrzeniami zupełnymi. Zupełność przestrzeni $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{I}$ nie jest interesująca, ponieważ zbieżność ciągów w tych przestrzeniach jest trywialna.

Przestrzeń $\mathfrak{W}$ nie jest zupełna, ponieważ każdy ciąg o wyrazach wymiernych zbieżny do granicy niewymiernej spełnia warunek Cauchy'ego w przestrzeni $\mathfrak{W}$, ale nie jest zbieżny w $\mathfrak{W}$, ponieważ jego granica nie należy do $\mathfrak{W}$.

W analizie matematycznej dowodzi się, że każdy ciąg liczb rzeczywistych lub liczb zespolonych, który spełnia warunek Cauchy'ego, jest zbieżny. Wynika stąd, że przestrzenie $\mathfrak{R}$ i $\mathfrak{Z}$ są zupełne.

§ 65. Ciało zbiorów borelowskich

Ciałem zbiorów borelowskich w dowolnej metrycznej przestrzeni X nazywamy najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie zbiory otwarte w tej przestrzeni.

Zbiorem borelowskim nazywamy każdy element ciała zbiorów borelowskich.

Ciało zbiorów borelowskich przestrzeni X będziemy oznaczać $\mathcal{B}_X$ albo po prostu $\mathcal{B}$. Między innymi, zbiorami borelowskimi są:
- zbiory otwarte - z definicji,
- zbiory domknięte - jako dopełnienia zbiorów otwartych,
- zbiór pusty - jako zbiór otwarty,
- cała przestrzeń X - jako zbiór otwarty,
- wnętrze dowolnego zbioru $A \subset X$ - jako zbiór otwarty,
- domknięcie dowolnego zbioru $A \subset X$ - jako zbiór domknięty,
- zbiory skończone - jako zbiory domknięte,
- zbiory przeliczalne - jako przeliczalne sumy zbiorów skończonych jednoelementowych,
- zbiory G_δ - jako przeliczalne iloczyny zbiorów otwartych,
- zbiory F_σ - jako przeliczalne sumy zbiorów domkniętych,
- zbiory $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, ... - jako przeliczalne sumy lub przeliczalne iloczyny zbiorów borelowskich.

§ 66. Przestrzeń euklidesowa $\mathfrak{R}^n$

Przestrzenią euklidesową n-wymiarową nazywamy przestrzeń

$$\mathfrak{R}^n = \underbrace{\mathfrak{R} \times \ldots \times \mathfrak{R}}_{n \text{ razy}}$$

Przestrzeń $\mathfrak{R}^n$ rozpatrujemy zawsze jako przestrzeń metryczną z metryką

$$\rho(x, y) = |x - y| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \tag{9}$$

gdzie

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \qquad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{R}^n,$$

$$x_1, \ldots, x_n, \qquad y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{R}$$

Dla $n=1$ przestrzeń $\mathfrak{R}^n$ jest identyczna z przestrzenią $\mathfrak{R}$. Liczby $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy współrzędnymi punktu $x \in \mathfrak{R}^n$.

Niech a, b, c będą dowolnymi punktami przestrzeni $\mathfrak{R}^n$, λ dowolną liczbą rzeczywistą i niech

$$a = (a_1,\dots,a_n),\quad b = (b_1,\dots,b_n),\quad c = (c_1,\dots,c_n)$$

gdzie $a_1,\dots,a_n,\ b_1,\dots,b_n,\ c_1,\dots,c_n \in \mathfrak{R}$. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$c = \lambda a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j = \lambda a_j \qquad c = 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j = 0$$

$$c = a + b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j = a_j + b_j \qquad c = a - b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} c_j = a_j - b_j$$

$$a < b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} a_j < b_j \qquad a \leqslant b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} a_j \leqslant b_j$$

§ 67. Twierdzenie

Z] $x,\ x_1,\ x_2,\dots \in \mathfrak{R}^n$

$$x = (\xi_1,\dots,\xi_n),\quad x_1 = (\xi_{11},\dots,\xi_{1n}),\quad x_2 = (\xi_{21},\dots,\xi_{2n}),\dots$$

$$\xi_1,\dots,\xi_n,\ \xi_{11},\dots,\xi_{1n},\ \xi_{21},\dots,\xi_{2n},\dots \in \mathfrak{R}$$

T] $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \Longleftrightarrow \bigwedge\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} \xi_j = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj}$

D] $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |x - x_k| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} (\xi_l - \xi_{kl})^2} = 0$

$$\xi_j = \lim_{k\to\infty} \xi_{kj} \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} |\xi_j - \xi_{kj}| = 0$$

Ponieważ

$$\sqrt{\sum_{l=1}^{n} (\xi_l - \xi_{kl})^2} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{n} |\xi_l - \xi_{kl}|\right)^2} = \sum_{l=1}^{n} |\xi_l - \xi_{kl}| = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \xi_{kj}|$$

więc

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \xi_j = \lim_{k\to\infty} \xi_{kj} \Rightarrow x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} |\xi_j - \xi_{kj}| = \sqrt{(\xi_j - \xi_{kj})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{l=1}^{n} (\xi_l - \xi_{kl})^2}$$

więc - na odwrót -

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \Rightarrow \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \xi_j = \lim_{k\to\infty} \xi_{kj}$$

§ 68. Twierdzenie

Z] $\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} x_k = (\xi_{k1},\ldots,\xi_{kn}) \in \mathfrak{R}^n \wedge \xi_{k1},\ldots,\xi_{kn} \in \mathfrak{R}$

I] Ciąg $(x_1, x_2, \ldots)$ spełnia warunek Cauchy'ego $\Longleftrightarrow \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ ciąg $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ spełnia warunek Cauchy'ego.

D] Analogiczny do dowodu twierdzenia § 67.

§ 69. Twierdzenie

Przestrzeń $\mathfrak{R}^n$ jest zupełna.

D] Wynika bezpośrednio z twierdzeń § 67 i § 68 oraz zupełności przestrzeni $\mathfrak{R}$.

§ 70. Przestrzeń $\mathfrak{R}^n_o$

Przestrzenią $\mathfrak{R}^n_o$ będziemy nazywać przestrzeń określoną wzorem

$$\mathfrak{R}^n_o = \underbrace{\mathfrak{R}_o \times \ldots \times \mathfrak{R}_o}_{n \text{ razy}}$$

Przestrzeń $\mathfrak{R}^n_o$ rozpatrujemy jako przestrzeń niemetryczną ze względu na punkty o współrzędnych nieskończonych. Natomiast $\mathfrak{R}^n_o$ zawiera w sobie przestrzeń metryczną $\mathfrak{R}^n$.

Niech

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \quad b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{R}^n_o$$

$$a_1, \ldots, a_n, \quad b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{R}_o.$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$a < b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j < b_j$$

$$a \leqslant b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j \leqslant b_j$$

$$a = 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j = 0$$

$$a = -\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j = -\infty, \qquad a = \infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j = \infty$$

a ponadto, jeśli $\lambda \in \mathfrak{R}$ to

$$b = \lambda a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} b_j = \lambda a_j$$

z tym, że przyjęliśmy w § 8 następujące umowy:

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\cdot(-\infty) = -\infty \wedge \lambda\cdot\infty = \infty$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\cdot(-\infty) = \infty \wedge \lambda\cdot\infty = -\infty$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \lambda\cdot(-\infty) = 0 \wedge \lambda\cdot\infty = 0$$

§ 71. Granica ciągu punktów w przestrzeni $\mathfrak{R}_o^n$

Chociaż przestrzeń $\mathfrak{R}_o^n$ nie jest przestrzenią metryczną, wprowadzimy w niej pojęcie granicy ciągu punktów jako przedłużenie analogicznego pojęcia z przestrzeni $\mathfrak{R}^n$, wykorzystując do tego celu twierdzenie § 67.

Niech

$$x = (\xi_1,\ldots,\xi_n),\ x_1 = (\xi_{11},\ldots,\xi_{1n}),\ x_2 = (\xi_{21},\ldots,\xi_{2n}),\ldots \in \mathfrak{R}_o^n$$

$$\xi_1,\ldots,\xi_n,\ \xi_{11},\ldots,\xi_{1n},\ \xi_{21},\ldots,\xi_{2n},\ldots \in \mathfrak{R}_o$$

Granicę ciągu punktów w przestrzeni $\mathfrak{R}_o^n$ określamy następująco:

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \iff \bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} \xi_j = \lim_{k\to\infty} \xi_{kj}$$

Należy zauważyć, że dopuszcza się tu przypadki, gdy

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{kj} = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{k\to\infty} \xi_{kj} = \infty$$

Zamiast

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

piszemy również

$$x_k \longrightarrow x$$

W szczególności, gdy ciąg (x_k) jest niemalejący, tzn.

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$$

piszemy

$$x_k \nearrow x$$

a gdy jest nierosnący, tzn.

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots$$

piszemy

$$x_k \searrow x$$

Z definicji granicy ciągu punktów w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$ wynika, że każdy monotoniczny ciąg (x_k) jest zbieżny.

§ 72. Granica lewostronna i granica prawostronna funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$

Niech będzie dana funkcja rzeczywista F o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}_0^n$. Jeżeli istnieje taki punkt $x \in \mathfrak{R}_0^n$ i taka liczba $g \in \mathfrak{R}_0$, że

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \ldots \in Z \\ x_k \nearrow x}} \lim_{k \to \infty} F(x_k) = g$$

to liczbę g (skończoną lub nieskończoną) będziemy nazywać granicą lewostronną funkcji F w punkcie x.

Analogicznie określamy granicę prawostronną funkcji F w punkcie x.

Ze względu na wygodę zapisu będziemy oznaczać granicę lewostronną funkcji F w punkcie x symbolem

$$F(x-)$$

a granicę prawostronną funkcji F w punkcie x symbolem

$$F(x+)$$

§ 73. Granica funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$

Liczbę rzeczywistą skończoną lub nieskończoną g będziemy nazywać granicą funkcji rzeczywistej F w punkcie x^* wtedy i tylko wtedy, gdy F jest funkcją rzeczywistą o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}_0^n$, istnieją granice lewostronna $F(x^*-)$ i prawostronna $F(x^*+)$, a ponadto

$$g = F(x^*-) = F(x^*+)$$

Będziemy wtedy pisać

$$g = \lim_{x \to x^*} F(x)$$

albo

$$F(x) \xrightarrow[x \to x^*]{} g$$