III. PRAWDOPODOBIEŃSTWO

§ 123. Przestrzeń probabilistyczna

Teoria prawdopodobieństwa ma swoją odrębną terminologię, wywodzącą się i dostosowaną do intuicji związanych z obserwacją i analizą zjawisk przypadkowych. Niemniej jednak opiera się na ogólnej teorii miary.

Zagadnienia probabilistyczne z reguły rozpatrujemy w pewnej ustalonej przestrzeni probabilistycznej. Przestrzenią probabilistyczną nazywamy dowolną przestrzeń z miarą unormowaną, czyli trójkę (X, S, P), gdzie P jest miarą unormowaną o dziedzinie S będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X. Przestrzeń X nazywamy tutaj przestrzenią zdarzeń elementarnych, a jej elementy zdarzeniami elementarnymi. σ-ciało S nazywamy ciałem zdarzeń, a jego elementy zdarzeniami. Każde zdarzenie jest zatem podzbiorem przestrzeni zdarzeń elementarnych i składa się ze zdarzeń elementarnych. Cała przestrzeń zdarzeń elementarnych należy do σ-ciała S, a zatem jest zdarzeniem. Zdarzenie to będziemy nazywali zdarzeniem pewnym. Zbiór pusty też należy do σ-ciała S i jest zdarzeniem. Zdarzenie to będziemy nazywać zdarzeniem niemożliwym. Miarę unormowaną P traktowaną jako funkcję zbioru nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa w danej przestrzeni probabilistycznej, a wartości tej funkcji, tzn. miary konkretnych zbiorów, nazywamy prawdopodobieństwami.

Z powyższych określeń wynika, że ciało zdarzeń S jest klasą wszystkich podzbiorów przestrzeni X, dla których jest określone prawdopodobieństwo. Wynika to stąd, że σ-ciało S jest - zgodnie z § 109 - klasą wszystkich zbiorów mierzalnych P.

Ze względu na interpretację przestrzeni X jako zdarzenia pewnego, możemy traktować dopełnienie A^c dowolnego zdarzenia A jako negację zdarzenia A, tzn. jako zdarzenie polegające na tym, że nie zachodzi zdarzenie A. Ze względu na ten negatywny charakter zdarzenia A^c wprowadzimy oznaczenie

(30) $$A' \stackrel{def}{=} A^c$$

i będziemy nazywać A' zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A. Wobec tego na mocy § 20 otrzymujemy wzory dla dowolnych $A, B \in S$

$$A + A' = X \qquad X - A' = A$$

(31) $$(A')' = A \qquad A \subset B \Longleftrightarrow B' \subset A'$$

$$A - B = A \cap B'$$

a wzory de Morgana z § 21 przyjmują postać

(32) $$\left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A\right)' = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A' \qquad \left(\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A\right)' = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A'$$

(33) $$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)' = \bigcap_{t \in T} A_t' \qquad \left(\bigcap_{t \in T} A_t\right)' = \bigcup_{t \in T} A_t'$$

(34) $$\left(\bigcup_{t=m}^{\infty} A_t\right)' = \bigcap_{t=m}^{\infty} A_t' \qquad \left(\bigcap_{t=m}^{\infty} A_t\right)' = \bigcup_{t=m}^{\infty} A_t'$$

(35) $$\left(\bigcup_{t=m}^{n} A_t\right)' = \bigcap_{t=m}^{n} A_t' \qquad \left(\bigcap_{t=m}^{n} A_t\right)' = \bigcup_{t=m}^{n} A_t'$$

(36) $$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

z tym, że należy pamiętać, że we wzorach tych A, A_t, B nie oznaczają dowolnych podzbiorów przestrzeni X, lecz zdarzenia, tzn. elementy ciała zdarzeń S.

§ 124. Własności prawdopodobieństwa

Biorąc pod uwagę, że rozkład prawdopodobieństwa jest miarą unormowaną, otrzymujemy na mocy (ν1),...,(ν4), (n1),..., (n12) z § 106 następujące własności prawdopodobieństwa P dla dowolnych A, B, $A_1, A_2, \ldots \in S$:

(37) prawdopodobieństwo jest liczbą rzeczywistą

(38) $0 \leq P(A) \leq 1$

(39) $P(X) = 1$

(40) $P(0) = 0$

(41) $P(A') = 1 - P(A)$

(42) $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

(43) $P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

(44) $P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

(45) $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

(46) $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

(47) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k)$

(48) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k)$

(49) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

(50) $P(A \cap B) = P(B) - P(B - A)$

(51) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

§ 125. Zdarzenia prawie pewne i zdarzenia prawie niemożliwe

Wprowadzamy dwa następujące określenia

A jest zdarzeniem prawie pewnym $\overset{\text{def}}{\iff} P(A) = 1$

A jest zdarzeniem prawie niemożliwym $\overset{\text{def}}{\iff} P(A) = 0$.

Jak stąd wynika, zdarzenie pewne jest zdarzeniem prawie pewnym, ale zdarzenie prawie pewne może nie być zdarzeniem pewnym. Podobnie, zdarzenie niemożliwe jest zdarzeniem prawie niemożliwym, ale zdarzenie prawie niemożliwe nie musi być zdarzeniem niemożliwym.

§ 126. Pełny układ zdarzeń

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ tworzą pełny układ zdarzeń, gdy

(*) $$\sum_{k=1}^{n} A_k = X$$

Innymi słowy, zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ tworzą pełny układ zdarzeń, gdy się nawzajem wykluczają i łącznie wyczerpują wszystkie możliwości. Ze wzoru (*) wynika na mocy (43) i (39), że

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1 \tag{52}$$

Analogicznie, mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą pełny układ zdarzeń, gdy

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = X$$

Mamy wtedy na mocy (44) i (39)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = 1 \tag{53}$$

§ 127. Twierdzenie

Z| $A_1, \ldots, A_n$ tworzą pełny układ zdarzeń

$P(A_1) = \ldots = P(A_n)$

$A = A_{k_1} + \ldots + A_{k_m}, \quad k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\}$

T| $P(A) = \frac{m}{n}$

D| Na mocy (52)

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$$

skąd na mocy założenia o równości prawdopodobieństw

$$\bigwedge_k nP(A_k) = 1 \Rightarrow \bigwedge_k P(A_k) = \frac{1}{n}$$

Otrzymujemy stąd na mocy (43)

$$P(A) = P(A_{k_1}) + \ldots + P(A_{k_m}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ razy}} = \frac{m}{n}$$

§ 128. Przestrzeń probabilistyczna skończona

Niech

$$X = \{e_1, \ldots, e_n\}, \quad \bigwedge_{\substack{j,k \in \{1, \ldots, n\} \\ j \neq k}} e_j \neq e_k$$

i niech S będzie klasą wszystkich podzbiorów X. Klasa S zawiera 2^n różnych podzbiorów, ponieważ należy do niej

1 czyli $\binom{n}{0}$ podzbiór pusty

n czyli $\binom{n}{1}$ podzbiorów 1-elementowych

$\frac{n(n-1)}{2}$ czyli $\binom{n}{2}$ podzbiorów 2-elementowych

. . . .

1 czyli $\binom{n}{n}$ podzbiór n-elementowy

Wszystkich podzbiorów należących do S jest

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Niech $A_1, \ldots, A_{2^n}$ oznaczają wszystkie podzbiory X, czyli wszystkie zbiory należące do klasy S. Klasa S jest σ-ciałem, gdyż spełnia wszystkie warunki $(\sigma 1)$, $(\sigma 2)$, $(\sigma 3)$. Możemy napisać

$$X = \sum_{j=1}^{n} \{e_j\} \tag{54}$$

i wobec tego

$$\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,2^n\}} A_k = A_k \cap X = \sum_{j=1}^{n} \left(A_k \cap \{e_j\}\right) \tag{55}$$

Niech teraz będą dane liczby rzeczywiste $p_1, \ldots, p_n$ spełniające warunki

$$p_1, \ldots, p_n \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \tag{56}$$

Wprowadzamy funkcję rzeczywistą P określoną na σ-ciele S wzorem

$$\bigwedge_{k \in \{1,\ldots,2^n\}} P(A_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j \tag{57}$$

gdzie

$$a_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } A_k \cap \{e_j\} \neq 0 \quad \text{czyli} \quad e_j \in A_k \\ 0 & \text{gdy } A_k \cap \{e_j\} = 0 \quad \text{czyli} \quad e_j \notin A_k \end{cases}$$

Wykażemy, że funkcja P jest miarą unormowaną. Istotnie, jest ona funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie S będącej σ-ciałem przestrzeni X, a więc spełnia warunek $(\nu 1)$ dla miary unormowanej. Na mocy (57) i (56) jest nieujemna, a więc spełnia warunek $(\nu 2)$. Następnie na mocy (54), (57) i (56)

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$

czyli jest spełniony warunek $(\nu 3)$. Niech teraz A_{l_1}, A_{l_2}, ... będzie dowolnym ciągiem zbiorów należących do S i rozłącznych, tzn.

$$\bigwedge_{l_j \neq l_k} A_{l_j} \cap A_{l_k} = 0$$

Wobec tego tylko skończona liczba wyrazów ciągu A_{l_1}, A_{l_2} może być zbiorami niepustymi i

(58) $$\bigwedge_{l_1, l_2, \ldots \in \{1, \ldots, 2^n\}} \bigvee_{s \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{j > s} A_{l_j} = 0$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{l_1, l_2, \ldots \in \{1, \ldots, 2^n\}} \bigvee_{s \in \mathfrak{N}} P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{l_k}\right) \underset{(58)}{=} P\left(\sum_{k=1}^{s} A_{l_k}\right) \underset{(55)}{=}$$

$$\underset{(55)}{=} P\left(\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} (A_{l_k} \cap \{e_j\})\right) = P\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} (A_{l_k} \cap \{e_j\})\right) =$$

$$= P\left(\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{s} A_{l_k}\right) \cap \{e_j\}\right]\right) \underset{(57)}{=} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{s} a_{l_k j}\right) p_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} a_{l_k j}\, p_j = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} a_{l_k j}\, p_j = \sum_{k=1}^{s} P(A_{l_k}) \underset{(58)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{l_k})$$

Funkcja P spełnia zatem warunek $(\nu 4)$ i jest miarą unormowaną. Wobec tego trójkę (X, S, P) możemy przyjąć jako przestrzeń probabilistyczną. Będziemy ją nazywać <u>przestrzenią probabilistyczną skończoną.</u>

Zauważmy jeszcze, że wobec definicji (57) wystarczy dla określenia rozkładu prawdopodobieństwa w przestrzeni skończonej określić liczby $p_1, \ldots, p_n$ z warunku

(59) $$p_k = P(\{e_k\}) \quad \text{dla} \quad k = 1, \ldots, n$$

§ 129. Twierdzenie

Z] (X, S, P) jest skończoną przestrzenią probabilistyczną

$$X = \{e_1, \ldots, e_n\}, \quad \bigwedge_{\substack{j,k \in \{1,\ldots,n\} \\ j \neq k}} e_j \neq e_k$$

$$P(\{e_1\}) = \ldots = P(\{e_n\})$$

$$A = \{e_{l_1}, \ldots, e_{l_m}\}, \quad \bigwedge_{\substack{j,k \in \{1,\ldots,m\} \\ j \neq k}} e_{l_j} \neq e_{l_k}$$

T] $P(A) = \frac{m}{n}$

D] Z założenia wynika, że zdarzenia $\{e_1\}, \ldots, \{e_n\}$ tworzą pełny układ zdarzeń, a ponadto, że

$$A = \{e_{l_1}\} + \ldots + \{e_{l_m}\}$$

Wobec tego teza wynika z twierdzenia § 127.

§ 130. Przykłady

I. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucając jeden raz kostką do gry otrzymamy mniej niż 5 oczek.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy jako zdarzenie pewne, że z rzutu kostką dostaliśmy jakąś liczbę oczek, tzn. dostaliśmy jedną z liczb 1,...,6. Możemy zatem przyjąć jako przestrzeń zdarzeń elementarnych

$$X = \{1, \ldots, 6\}$$

Jako ciało zdarzeń S przyjmujemy klasę wszystkich podzbiorów przestrzeni X. Zakładając, że kostka do gry jest regularnym sześcianem, możemy przyjąć, że prawdopodobieństwa

$$P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\})$$

Interesuje nas zdarzenie, które możemy zapisać w postaci

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Na mocy twierdzenia § 129 otrzymujemy

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

II. Znaleźć prawdopodobieństwo, że rzucając trzy razy kostką do gry wyrzucimy łącznie dokładnie 16 oczek.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy jako zdarzenie pewne, że z rzutów kostką dostaliśmy jakąś trójkę liczb, z których każda jest jedną z liczb 1,..., 6. Możemy zatem przyjąć jako przestrzeń zdarzeń elementarnych zbiór trójek uporządkowanych, czyli zbiór ciągów trójelementowych.

$$X = \{(1,1,1), (1,1,2),\ldots, (6,6,6)\}$$

Zbiór X zawiera $6^3 = 216$ różnych trójek uporządkowanych. Możemy dla wszystkich trójek założyć równe prawdopodobieństwa. Interesuje nas zdarzenie, które możemy zapisać w postaci

$$A = \{(4,6,6), (5,5,6), (5,6,5), (6,4,6)\ (6,5,5), (6,6,4)\}$$

Na mocy twierdzenia § 129

$$P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

III. Zając skrył się w lesie o kształcie prostokąta długości 600 m i szerokości 400 m. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zając znajduje się na terenie będącym własnością leśniczego, jeżeli wiadomo, że leśniczy ma działkę prostokątną o długości 160 m i szerokości 50 m i że tylko połowa tej działki leży w granicach wspomnianego lasu?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy założenie, że prostokąt lasu leży w przestrzeni euklidesowej dwuwymiarowej $\mathfrak{R}^2$, tzn. na płaszczyźnie euklidesowej. Przyjmijmy, że na tej płaszczyźnie jest określona miara Lebesgue'a. Prostokąt lasu jest na tej płaszczyźnie przedziałem ograniczonym i jego miara Lebesgue'a na mocy twierdzenia § 120 pokrywa się z polem tego prostokąta. Oznaczając symbolem B prostokąt lasu, a symbolem ω miarę Lebesgue'a otrzymujemy

$$\omega(B) = 600 \cdot 400 = 2{,}4 \cdot 10^5$$

Przyjmiemy jako przestrzeń zdarzeń elementarnych X płaszczyznę euklidesową $\mathfrak{R}^2$, jako ciało zdarzeń S ciało zbiorów borelowskich na płaszczyźnie $\mathfrak{R}^2$, czyli w przestrzeni X, a jako prawdopodobieństwo P miarę względem zbioru B, tzn. na mocy definicji podanej w § 122

$$\bigwedge_{A \in S} P(A) = \frac{\omega(A \cap B)}{\omega(B)}$$

Niech A oznacza działkę prostokątną należącą do leśniczego. Z warunków zadania wynika, że

$$\omega(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 50 = 4 \cdot 10^3$$

Wobec tego szukane prawdopodobieństwo otrzymujemy ze wzoru

$$P(A) = \frac{4 \cdot 10^3}{2{,}4 \cdot 10^5} = \frac{1}{60}$$

§ 131. Paradoksy rachunku prawdopodobieństwa

Zanim powstała teoria prawdopodobieństwa jako dział matematyki współczesnej, pojmowano prawdopodobieństwo najczęściej jako stosunek liczby przypadków nas interesujących do ogólnej liczby możliwych przypadków. Tego rodzaju podejście prowadziło do licznych paradoksów, których przykład poznamy w następnym paragrafie. Współczesne traktowanie prawdopodobieństwa jako miary zdarzeń wyświetla naturę wszystkich tych paradoksów. Natomiast twierdzenie § 127 precyzuje warunki dostateczne na to, by prawdopodobieństwo można było liczyć jako stosunek liczby przypadków nas interesujących do ogólnej liczby możliwych przypadków.

§ 132. Przykład paradoksu

Danych jest 100 kwadratów o polach 1,...,100 cm^2. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia spośród tych kwadratów w sposób losowy kwadratu o polu nie większym niż 25 cm^2?

Rozwiązanie:

Aby zilustrować naturę powstawania paradoksów, rozwiążemy najpierw nasze zadanie w sposób naiwny i to na cztery różne sposoby, oznaczając szukane prawdopodobieństwo symbolem p.

I. Ponieważ mamy 25 kwadratów dla nas pomyślnych na 100 możliwych, zatem

$$p = \frac{25}{100} = 0{,}250$$

II. Ponieważ kwadraty nas interesujące mają boki o długościach do 5 cm, a wszystkie kwadraty boki o długościach do 10 cm, zatem

$$p = \frac{5}{10} = 0,500$$

III. Suma długości boków wszystkich 100 kwadratów jest równa

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100} \approx 671,463$$

Suma długości boków kwadratów nas interesujących jest równa

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{25} \approx 85,634$$

Wobec tego

$$p \approx \frac{85,634}{671,463} \approx 0,128$$

IV. Suma pól wszystkich 100 kwadratów jest równa

$$1 + 2 + \ldots + 100 = 5050$$

Suma pól kwadratów nas interesujących jest równa

$$1 + 2 + \ldots + 25 = 325$$

Wobec tego

$$p = \frac{325}{5050} \approx 0,064$$

Paradoks polega na tym, że dla jednego i tego samego zadania otrzymaliśmy cztery wyniki, bardzo różniące się między sobą. Wyjaśnimy ten paradoks na gruncie przyjętej teorii.

Przyjmijmy, za przestrzeń zdarzeń elementarnych zbiór

$$X = \left\{ e_1, \ldots, e_{100} \right\}$$

gdzie e_k ($k = 1,\ldots,100$) oznacza wyciągnięcie kwadratu o polu k cm^2. Niech klasa wszystkich podzbiorów przestrzeni X będzie ciałem zdarzeń S. Ustalając prawdopodobieństwa

$$(*) \qquad P(\left\{ e_k \right\}) \quad \text{dla} \quad k = 1,\ldots,100$$

otrzymujemy przestrzeń probabilistyczną skończoną (X, S, P). W każdym z wymienionych czterech sposobów rozwiązania zadania inaczej ustalaliśmy prawdopodobieństwa $(*)$. W sposobie I przyjęliśmy założenie, że wszystkie prawdopodobieństwa $(*)$ są równe, czyli

$$(I) \qquad P(\left\{ e_k \right\}) = \frac{1}{100} \quad \text{dla} \quad k = 1,\ldots,100$$

W sposobie drugim przyjęliśmy, że

$$P(\{e_1,\ldots,e_k\}) = P(\{e_1\} + \ldots + \{e_k\}) =$$

$$= P(\{e_1\}) + \ldots + P(\{e_k\}) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{k}}{10}$$

czyli tym samym przyjęliśmy

(II) $$P(\{e_k\}) = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}}{10} \quad \text{dla} \quad k = 1,\ldots,100$$

W sposobie trzecim przyjęliśmy, że

$$P(\{e_1,\ldots,e_k\}) = P(\{e_1\}) + \ldots + P(\{e_k\}) = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{k}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100}}$$

czyli przyjęliśmy

(III) $$P(\{e_k\}) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100}} \approx \frac{\sqrt{k}}{671{,}463}$$

Wreszcie w sposobie czwartym przyjęliśmy, że

$$P(\{e_1,\ldots,e_k\}) = P(\{e_1\}) + \ldots + P(\{e_k\}) = \frac{1 + \ldots + k}{1 + \ldots + 100} = \frac{1 + \ldots + k}{5050}$$

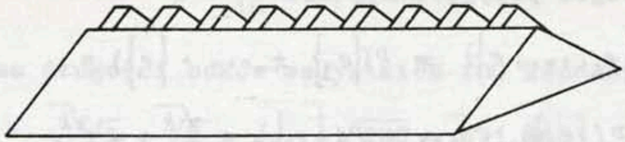
czyli przyjęliśmy

(IV) $$P(\{e_k\}) = \frac{k}{5050}$$

Paradoks powstał dlatego, że do jednego i tego samego zdarzenia przykładaliśmy różne miary. Skoro tekst zadania to umożliwiał, oznacza to, że zadanie nie było jednoznacznie postawione. Aby nadać mu jednoznaczny sens, można na przykład określić, w jaki to sposób losowy będziemy kwadraty wybierać. Do każdego z opisanych czterech sposobów rozwiązania można zaproponować taki sposób losowego wybierania kwadratu, aby ten właśnie sposób rozwiązania był właściwy.

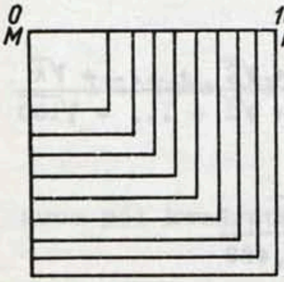
Załóżmy na przykład, że wszystkie kwadraty w nieznanym nam porządku zostały rogami nanizane na pręt i widoczne są tylko same górne rogi wszystkich kwadratów (rys. 3). Wybieramy kwadrat wskazując którykolwiek z występujących rogów. Przy takim schemacie wybierania właściwym sposobem rozwiązania zadania jest sposób pierwszy.

Załóżmy teraz, że kwadraty zostały ułożone tak jak na rys. 4, ale wybierający o tym nie wie, natomiast ma wybrać dowolny punkt



Rys. 3

na odcinku MN o długości 10 cm, tzn. odcinka o długości równej długości boku największego z kwadratów. Po wybraniu punktu zostaje wyciągnięty ten kwadrat, którego wierzchołek jest najbliższy wybranemu punktowi z prawej jego strony. Przy takim schemacie wybierania właściwym sposobem rozwiązania zadania jest sposób drugi.

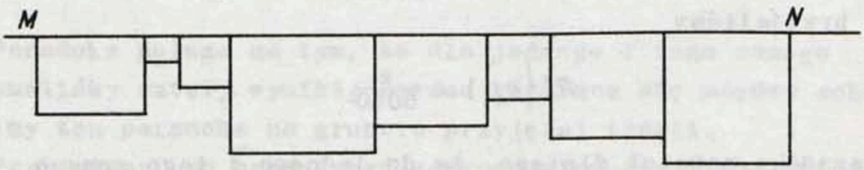


Rys. 4

Z kolei załóżmy, że kwadraty zostały zawieszone obok siebie, jak na rys. 5.

Wybierający nie zna kolejności zawieszenia kwadratów i wybiera jakikolwiek punkt odcinka MN obejmującego wszystkie kwadraty, tzn. odcinka o długości w cm równej

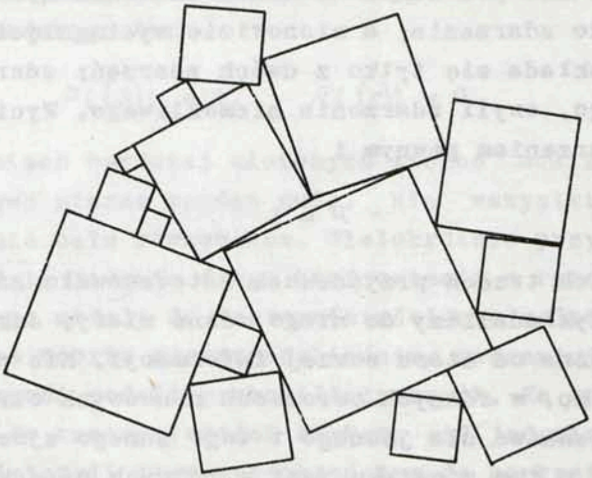
$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100} \approx 671{,}463$$



Rys. 5

Punkt wybrany wskazuje kwadrat podlegający wyciągnięciu. Przy takim schemacie wybierania właściwym sposobem rozwiązania zadania jest trzeci sposób.

Na koniec załóżmy, że kwadraty są porozkładane na płaszczyźnie w nieznanej dla wybierającego konfiguracji (rys. 6), a więc są np. przed nim zasłonięte. Wybierający wybiera punkt na płaszczyźnie. Jeśli punkt ten wypada poza kwadratami, wybór zostaje powtarzany aż do czasu, gdy wybrany punkt wskazuje konkretny kwadrat. Przy takim schemacie wybierania właściwym sposobem rozwiązania zadania jest sposób czwarty.



Rys. 6

§ 133. Prawdopodobieństwo jako miara zależna od naszej informacji o zdarzeniu

Do probówki wsypano 10 kul o średnicach niewiele mniejszych od średnicy probówki. Między tymi kulami jest jedna kula biała i 9 czarnych. Obliczymy prawdopodobieństwo p, że biorąc pierwszą kulę z probówki natrafimy na kulę białą, w trzech następujących przypadkach:

I. Nie mamy żadnej informacji o kolejności kul w probówce,

II. Udało się nam podejrzeć, że na dnie probówki są trzy kule czarne.

III. Udało się nam podejrzeć, że na wierzchu wszystkich kul jest kula biała.

W przypadku I wszystkie kule są dla nas równoprawdopodobne i wobec tego obliczamy, że

$$p = \frac{1}{10}$$

W przypadku II trzy kule czarne zostały wyeliminowane z naszego rachunku, a każda z pozostałych 7 kul jest dla nas równoprawdopodobna. Wobec tego

$$p = \frac{1}{7}$$

W przypadku III przestrzeń zdarzeń elementarnych redukuje się do jednego tylko zdarzenia, a mianowicie wyciągnięcia kuli białej. Ciało zdarzeń składa się tylko z dwóch zdarzeń: zdarzenia pewnego i zbioru pustego, czyli zdarzenia niemożliwego. Wyciągnięcie kuli białej jest zdarzeniem pewnym i

$$p = 1$$

We wszystkich trzech przypadkach interesowało nas to samo zdarzenie, ale przykładaliśmy do niego różne miary. Jak widzimy, miara była tu zależna od stanu naszej informacji. Nie powinno nas zatem dziwić, że np. w różnych ośrodkach naukowych otrzymuje się różne prawdopodobieństwa dla jednego i tego samego zjawiska, jeżeli stan informacji o tym zjawisku jest w różnych ośrodkach różny.

§ 134. Różnorodność modeli probabilistycznych

Obserwując zdarzenia zachodzące w otaczającym nas świecie staramy się wytłumaczyć niektóre z nich drogą zbudowania odpowiedniego modelu probabilistycznego, a więc np. drogą skonstruowania przestrzeni probabilistycznej. Widzieliśmy jednak, że konstrukcja takiej przestrzeni zależy od wielu czynników, np. od znajomości mechanizmu zachodzących zjawisk, od stanu naszej informacji itp. Ponadto z reguły mamy możność wyboru między różnymi modelami i to w sposób subiektywny. Na przykład w paragrafie poprzednim w przypadku III, gdy wyciągnięcie kuli białej było pewne, przyjęliśmy jednoelementową przestrzeń zdarzeń elementarnych. Ale równie dobrze można było przyjąć przestrzeń zdarzeń elementarnych złożoną z dziesięciu zdarzeń elementarnych:

$$X = \{e_1, \ldots, e_{10}\}$$

gdzie e_k $(k = 1, \ldots, 10)$ oznaczałoby wyciągnięcie k-tej – licząc od góry – kuli, a e_1 oznaczałoby wyciągnięcie kuli białej, a następnie przyjąć prawdopodobieństwa

$$P(\{e_1\}) = 1, \qquad P(\{e_2\}) = \ldots = P(\{e_{10}\}) = 0$$

Można było również postąpić inaczej: przyjąć dwuelementową przestrzeń zdarzeń elementarnych

$$X = \{b, c\}$$

gdzie b oznacza wyciągnięcie kuli białej, a c kuli czarnej, a następnie prawdopodobieństwa

$$P(\{b\}) = 1, \qquad P(\{c\}) = 0$$

W zagadnieniach bardziej złożonych liczba możliwych do przyjęcia modeli bywa nieraz bardzo duża. Nie wszystkie modele są z punktu widzenia celu równoważne. Wielokrotnie przydatność modelu można sprawdzić jedynie drogą konfrontacji z rzeczywistością.

Dopasowywanie modeli do rzeczywistości nie należy do matematyki. Matematyczna teoria prawdopodobieństwa gwarantuje jedynie wewnętrzną poprawność modeli probabilistycznych. Ze sprawą dopasowywania modeli do rzeczywistości stykamy się jedynie w przykładach zastosowań teorii prawdopodobieństwa do konkretnych zagadnień.

§ 135. Przestrzeń probabilistyczna przeliczalna

Niech

$$X = \{e_1, e_2, \ldots\}, \qquad \bigwedge_{\substack{j,k \in \mathfrak{N} \\ j \neq k}} e_j \neq e_k$$

i niech S będzie klasą wszystkich podzbiorów przestrzeni X. Klasa S jest nieprzeliczalna. Gdyby bowiem była co najwyżej przeliczalna, to tym bardziej byłaby co najwyżej przeliczalna klasa wszystkich nieskończonych podzbiorów przestrzeni X, czyli byłaby co najwyżej przeliczalna klasa wszystkich nieskończonych podciągów ciągu $(e_1, e_2, \ldots)$. Ale wtedy wszystkie takie podciągi dałyby się ustawić w ciąg

$$\text{(i)} \qquad \begin{matrix} (e_{l_{1,1}}, & e_{l_{1,2}}, \ldots) \\ (e_{l_{2,1}}, & e_{l_{2,2}}, \ldots) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{matrix}$$

gdzie

$$\bigwedge_{j,k \in \mathfrak{N}} l_{j,k+1} > l_{j,k}$$

Rozpatrzmy ciąg

$$\text{(ii)} \qquad (e_{l_{1,2}}, \quad e_{(l_{1,2} + l_{2,3})}, \quad e_{(l_{1,2} + l_{2,3} + l_{3,4})} \ldots)$$