CENTRUM OBLICZENIOWE
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

MIECZYSŁAW WARMUS

WYKŁADY Z PROBABILISTYKI

Tom I

WARSZAWA 1971
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

CENTRUM OBLICZENIOWE
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

MIECZYSŁAW WARMUS

WYKŁADY Z PROBABILISTYKI

Tom I

WARSZAWA 1971
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Skrypt z wykładów, które odbywały się w Centrum Obliczeniowym PAN w roku akademickim 1969/1970. Celem skryptu jest podanie podstaw teoretycznych rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych w formie na tyle rozbudowanej, aby całość mogła byc przyswojona nie tylko przez matematyków, ale również przez wszystkich praktyków, którzy ze względu na liczne zastosowania probabilistyki chcieliby opanować ich teoretyczne podstawy. Niniejszy tom jest pierwszym z kolei. Rachunek prawdopodobieństwa będzie ujęty w 2 tomach, procesy stochastyczne w trzecim.

REDAKTOR WYDAWNICZY
CENTRUM OBLICZENIOWEGO PAN
Jan Lipski

Printed in Poland

Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Oddział w Łodzi 1971

Wydanie I. Nakład 660 + 90 egz. Ark. wyd. 8,75. Ark. druk. 12,00.
Papier offsetowy kl. III, 80 g. 70x100. Podpisano do druku 15. II. 1971 r.
Druk ukończono w lutym 1971 r. Zam. 321. H-11. Cena zł 28.—

Zakład Graficzny PWN
Łódź, ul. Gdańska 162

I. ZBIORY I FUNKCJE

§ 1. Symbolika logiczna

Konstrukcje definicji jak również konstrukcje dowodów twierdzeń stają się bardziej przejrzyste i zrozumiałe, jeśli posługujemy się konsekwentnie symboliką używaną w logice. W niniejszej pracy będziemy tę symbolikę szeroko stosować. Zakładając, że nie wszyscy czytelnicy są z nią zaznajomieni, zaczniemy od sformułowania jej zasad. W miarę czytania tekstu czytelnik będzie w stanie nabierać w niej coraz większej swobody, co ułatwi w dużym stopniu zrozumienie późniejszych twierdzeń i ich dowodów.

Zdania będziemy często oznaczali symbolami literowymi, np. a, A, γ. Dla wyrazistości zapisu będzie wolno ujmować zdania w nawiasy zwykłe lub kwadratowe.

Negację zdania a, czyli zdanie "nieprawda, że a" będziemy również pisać a'.

Implikacją nazywamy zdanie, "jeżeli a, to b", które zapisujemy również w postaci $a \Rightarrow b$. Należy tu zapamiętać, że implikacja $a \Rightarrow b$ jest zdaniem prawdziwym nie tylko wtedy, gdy a i b są prawdziwe, ale również zawsze, gdy a jest fałszywe, czego na ogół nie uwzględnia się w mowie potocznej. A zatem implikacja $a \Rightarrow b$ jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy a jest prawdziwe, a b fałszywe, natomiast we wszystkich pozostałych przypadkach jest zdaniem prawdziwym.

Przykład:

Implikacja

„Liczba a jest mniejsza od 3 $\Rightarrow$ liczba a jest mniejsza od 5"

czyli zdanie

„jeżeli liczba a jest mniejsza od 3, to liczba a jest mniejsza od 5"

jest zdaniem prawdziwym bez względu na to, czy zdanie "liczba a jest mniejsza od 3" jest prawdziwe czy fałszywe.

<u>Uwaga:</u> Implikację podaną w powyższym przykładzie będziemy również pisać krócej

$$a < 3 \Rightarrow a < 5$$

Zdania a i b nazywamy <u>równoważnymi</u>, gdy implikacje $a \Rightarrow b$ i $b \Rightarrow a$ są obie prawdziwe. Piszemy wtedy

$$a \Leftrightarrow b$$

Zauważmy na przykład, że

$$(a')' \Leftrightarrow a$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b' \Rightarrow a')$$

Zdanie "a albo b", które traktujemy jako identyczne ze zdaniem "a lub b", zapisujemy w postaci

$$a \vee b$$

i nazywamy <u>alternatywą</u>.

Zdanie "a i b", które traktujemy jako identyczne ze zdaniem "a oraz b" zapisujemy w postaci

$$a \wedge b$$

i nazywamy <u>koniunkcją</u>.

Przykłady:

$$[(x = 1) \vee (x = 3)] \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3 = 0)$$

$$[(x > 2) \wedge (x < 5)] \Leftrightarrow (2 < x < 5)$$

Zauważmy, że

$$(a \vee b)' \Leftrightarrow (a' \wedge b')$$

$$(a \wedge b)' \Leftrightarrow (a' \vee b')$$

Aby uniknąć pisania zbyt wielu nawiasów, przyjmuje się, że zdań będących wyrażeniami matematycznymi można w nawiasy nie ujmować, że znak $\wedge$ łączy zdania silniej niż znak $\vee$, a znak $\vee$ silniej niż znaki $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$. Na przykład, zamiast

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

można pisać

$$a \wedge b \vee c \wedge d,$$

zamiast

$$((x \leq 1) \wedge (x \geq 1)) \Leftrightarrow (x = 1)$$

można pisać

$$x \leq 1 \wedge x \geq 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{itp.}$$

Natomiast w zapisie

$$a \wedge (b \vee c)$$

nawiasów nie można opuścić, gdyż

$$a \wedge b \vee c \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$$

Zapis

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$$

oznacza zdanie, że co najmniej jedno ze zdań $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest prawdziwe. Natomiast zapis

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$$

oznacza zdanie, że wszystkie zdania $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są prawdziwe. Zapis

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Leftrightarrow d \Rightarrow e$$

oznacza to samo, co

$$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge (c \Leftrightarrow d) \wedge (d \Rightarrow e)$$

Zgodnie z powyższą umową, jeżeli prawdziwe jest zdanie

$$a_1 \Rightarrow a_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_n$$

to prawdziwe jest również zdanie

$$a_1 \Rightarrow a_n$$

Jeżeli prawdziwe jest zdanie

$$a_1 \Leftrightarrow a_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_n$$

to prawdziwe jest również zdanie

$$a_1 \Leftrightarrow a_n$$

Powyższe implikacje można zapisać krócej

$$(a_1 \Rightarrow a_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a_n) \Rightarrow (a_1 \Rightarrow a_n)$$

$$(a_1 \Leftrightarrow a_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_n) \Rightarrow (a_1 \Leftrightarrow a_n)$$

Bywają napisy zawierające zmienne, na które podstawia się nazwy przedmiotów z określonego zbioru. Dopiero po takim podstawieniu zapis staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym. Tego rodzaju zapisy nazywamy <u>funkcjami zdaniowymi</u> lub <u>warunkami</u>, oznaczamy analogicznie jak funkcje liczbowe jednej lub więcej zmiennych i łączymy znakami logicznymi $'$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ według tych samych reguł co zdania. Na przykład symbol $\alpha(x)$ może oznaczać funkcję zdaniową, która po podstawieniu na x nazwy przedmiotu staje się zdaniem, symbol $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ oznacza, że mają być spełnione oba warunki $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ itp. Napis

$$x + y > 3$$

w którym x i y nie są nazwami konkretnych liczb, lecz zmiennych, przedstawia również funkcję zdaniową czyli warunek.

Mówimy, że przedmiot a spełnia warunek $\alpha(x)$, gdy zdanie $\alpha(a)$ jest prawdziwe. Zbiór tych przedmiotów, które spełniają warunek $\alpha(x)$ oznaczamy symbolem

$$\{x : \alpha(x)\}$$

Analogicznie mówimy, że układ przedmiotów $a_1, \ldots, a_n$ spełnia warunek $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, gdy zdanie $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ jest prawdziwe. Zbiór tych układów, które spełniają warunek $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ oznaczamy symbolem

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : \alpha(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Zauważmy, że oznaczając symbolem x układ przedmiotów $x_1, \ldots, x_n$ możemy zbiór układów, które spełniają warunek $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, również oznaczać symbolem

$$\{x : \alpha(x)\}$$

Zamiast "istnieje takie x spełniające warunek $\alpha(x)$, że $f(x)$", będziemy pisać

$$\bigvee_{\alpha(x)} f(x)$$

Zamiast "dla każdego x spełniającego warunek $\alpha(x)$ jest $f(x)$" będziemy pisać

$$\bigwedge_{\alpha(x)} f(x)$$

Znaki $\bigvee$ i $\bigwedge$ nazywamy kwantyfikatorami logicznymi lub po prostu <u>kwantyfikatorami</u>. Zamiast "nie istnieje takie x spełniające warunek $\alpha(x)$, że $f(x)$" będziemy pisać

$$\bigvee_{\alpha(x)}' f(x)$$

Zamiast "nie dla każdego x spełniającego warunek $\alpha(x)$ jest $f(x)$" będziemy pisać

$$\bigwedge_{\alpha(x)}' f(x)$$

Z powyższych definicji wynika, że

$$\bigvee_{\alpha(x)}' f(x) \iff \Big(\bigvee_{\alpha(x)} f(x)\Big)' \iff \bigwedge_{\alpha(x)} (f(x))'$$

$$\bigwedge_{\alpha(x)}' f(x) \iff \Big(\bigwedge_{\alpha(x)} f(x)\Big)' \iff \bigvee_{\alpha(x)} (f(x))'$$

Przyjmujemy umowę, że kwantyfikatory łączą się z następującą po nich funkcją zdaniową słabiej niż znaki logiczne $\wedge$ i $\vee$, ale mocniej niż znaki logiczne $\Rightarrow$ i $\iff$, tzn. na przykład

$$\Big(\bigvee_{\alpha(x)} f(x) \vee a\Big) \iff \bigvee_{\alpha(x)}\Big(f(x) \vee a\Big)$$

$$\Big(\bigvee_{\alpha(x)} f(x) \Rightarrow a\Big) \iff \Big(\Big[\bigvee_{\alpha(x)} f(x)\Big] \Rightarrow a\Big)$$

Przykłady:

(i) Zdanie "równanie $x^2 - 3x + 2 = 0$ ma dodatni pierwiastek" jest równoważne zdaniu "istnieje liczba dodatnia x taka, że $x^2 - 3x + 2 = 0$". Fakt ten możemy zapisać następująco:

(równanie $x^2 - 3x + 2 = 0$ ma dodatni pierwiastek) $\iff \bigvee_{x>0} x^2 - 3x + 2 = 0$

(ii) Zdanie "dla każdej dodatniej liczby a istnieje taka ujemna liczba b, że jej kwadrat jest równy liczbie a" można napisać w postaci

$$\bigwedge_{a>0} \bigvee_{b<0} b^2 = a$$

(iii) Zdanie "dla każdej pary nierównych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a < b$ albo nierówność $a > b$" można napisać w postaci

$$\bigwedge_{a \neq b} a < b \vee a > b$$

(iv) Zdanie "nie istnieje liczba wymierna dodatnia, której kwadrat byłby równy 2" można napisać w postaci

$$\bigvee_{p,q \text{ naturalne}}' \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

albo w postaci

$$\bigvee_{p,q \text{ nat.}}' p^2 = 2q^2$$

albo w postaci

$$\bigwedge_{p,q \text{ nat.}} p^2 \neq 2q^2$$

Jeśli definiujemy znaczenie zdania (lub funkcji zdaniowej) a przez podanie równoważnego zdania (lub funkcji zdaniowej) b, to piszemy

$$a \overset{\text{def}}{\iff} b$$

W takim zapisie zawsze prawa strona równoważności określa znaczenie lewej.

Przykład:

Definicja logarytmu

$$\bigwedge_{\substack{a,b>0 \\ a \neq 1}} \left(c = \log_a b \overset{\text{def}}{\iff} a^c = b\right)$$

W przykładzie tym przyjęliśmy umowę, która będzie stale obowiązywać, że zapis

$$\bigwedge_{\substack{\alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x)}} \quad \text{lub} \quad \bigvee_{\substack{\alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_n(x)}}$$

oznacza to samo, co odpowiednio

$$\bigwedge_{\alpha_1(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_n(x)} \quad \text{lub} \quad \bigvee_{\alpha_1(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_n(x)}$$

Jest w zwyczaju niektóre zdania lub warunki numerować lub oznaczać specjalnymi symbolami. Będziemy traktować takie symbole czy numery na równi z symbolami literowymi oznaczającymi zdania czy warunki. Na przykład, jeśli a, b, c, d, e, f, g oznaczają zdania i dany jest zapis

$$\begin{array}{ll} & a \\ (13) & b \\ & c \\ & d \\ (**) & e \\ & f \end{array}$$

to implikację $b \wedge e \Rightarrow g$ będziemy również pisać w postaci

$$(13) \wedge (**) \Rightarrow g$$

umawiając się, że numer czy symbol specjalny oznacza to zdanie czy warunek, które się bezpośrednio po nim zaczyna.

Przyjmujemy umowę, że numery (1), (2),... i symbole literowe numerowane, np. (a1), (a2),... czy (γ1), (γ2)... reprezentują pewne zdania czy warunki w całej niniejszej pracy, natomiast pozostałe symbole, na przykład (*), (**) czy (i), (ii), (iii) mają znaczenie lokalne, to znaczy reprezentują pewne zdania czy warunki w granicach jednego tylko paragrafu, a w innych paragrafach mogą być użyte w innych znaczeniach.

Na zakończenie niniejszego paragrafu zauważmy, że twierdzenia mają najczęściej postać implikacji $a \Rightarrow b$, gdzie a, b są zdaniami lub funkcjami zdaniowymi. W takich przypadkach a nazywamy <u>założeniem</u>, b <u>tezą</u>. Twierdzenia będziemy nieraz zapisywać w postaci

Twierdzenie

Z| a

T| b

D| c

gdzie c jest zdaniem lub układem zdań stanowiącym dowód twierdzenia, a litery Z, T, D są początkowymi literami wyrazów "Założenie", "Teza", "Dowód". Jeżeli założenie składa się z kilku zdań lub warunków, tzn.

$$a \Leftrightarrow a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$$

to albo piszemy je ze znakami $\wedge$ w jednym wierszu

Z| $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$

albo bez znaków $\wedge$ jedno pod drugim

$$\underline{Z}| \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array}$$

Analogiczną umowę przyjmujemy dla zapisu tezy.

Zauważmy, że implikacja $a \Rightarrow b$ jest równoważna każdemu ze zdań:

b wtedy, gdy a

a tylko wtedy, gdy b

b jest warunkiem koniecznym na to, że a

a jest warunkiem wystarczającym na to, że b

natomiast równoważność $a \Leftrightarrow b$ każdemu ze zdań:

a wtedy i tylko wtedy, gdy b

a jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, że b

Gdy twierdzenie ma postać równoważności $a \Leftrightarrow b$, to dowód najczęściej albo ma postać zdania $a \Leftrightarrow c_1 \Leftrightarrow c_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c_n \Leftrightarrow b$, albo dzieli się na dwie części:

I. Dowód twierdzenia, że $a \Rightarrow b$.

II. Dowód twierdzenia, że $b \Rightarrow a$.

Implikacje postaci zdania "jeżeli a, to na mocy b wnioskujemy, że c" piszemy również $a \underset{b}{\Rightarrow} c$. Używamy takiej symboliki głównie w dowodach twierdzeń.

§ 2. Zbiór i jego elementy

Zbiór elementów jest w teorii zbiorów pojęciem podstawowym. Elementy zbioru nazywamy również punktami.

Zdanie "a jest elementem zbioru A" piszemy również w postaci

$$a \in A$$

a zdanie "a nie jest elementem zbioru A" w postaci

$$a \notin A$$

Zachodzi równoważność

$$a \notin A \Leftrightarrow (a \in A)'$$

Równość elementów zbioru

$$a = b, \qquad a, b \in A$$

rozumiemy jako ich identyczność, tzn. symbole a i b oznaczają ten sam element zbioru A.

Zdarza się nieraz, że elementy pewnego zbioru same są zbiorami. Zbiór zbiorów nazywamy klasą zbiorów.

§ 3. Inkluzja zbiorów

Inkluzją zbiorów nazywamy relację między dwoma zbiorami A i B, określoną następująco:

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

$$B \supset A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset B$$

Zbiór A nazywamy tutaj podzbiorem zbioru B, a zbiór B nadzbiorem zbioru A.

Zdanie $A \subset B$ jest równoważne każdemu z następujących zdań:

zbiór A zawiera się w zbiorze B

zbiór A jest zawarty w zbiorze B

zbiór B zawiera w sobie zbiór A

Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów A, B, C

$$A \subset A$$

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$$

§ 4. Równość zbiorów

Równość zbiorów określamy następująco

$$A = B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Zauważmy, że dla dowolnych zbiorów A, B, C

$$A = A$$

$$A = B \Longleftrightarrow B = A$$

$$(A = B) \wedge (B = C) \Rightarrow A = C$$

§ 5. Zbiór pusty

Zdarza się nieraz, że zbiór jest zdefiniowany, ale nie istnieje przedmiot, który by spełniał warunki należenia do tego zbioru. Zbiór taki nazywamy zbiorem pustym. Oto przykład zbioru pustego:

$$\{x : (x \text{ jest liczbą rzeczywistą}) \wedge x^2 + 1 = 0\}$$

Każdy zbiór pusty Q zawiera się w każdym zbiorze A, tzn.

$$Q \subset A$$

Istotnie, powyższe zdanie jest z definicji równoważne zdaniu

$$a \in Q \Rightarrow a \in A$$

które, zgodnie z umową przyjętą dla implikacji - jest zawsze prawdziwe, ponieważ zdanie $a \in Q$ jest zawsze fałszywe.

Wszystkie zbiory puste są sobie równe. Istotnie, niech będą dwa zbiory puste Q_1 i Q_2. Dla dowolnego zbioru A jest zatem

$$Q_1 \subset A \wedge Q_2 \subset A$$

Między innymi powyższe implikacje są spełnione, jeśli za A podstawić Q_1 lub Q_2. Są więc spełnione implikacje

$$Q_1 \subset Q_2 \wedge Q_2 \subset Q_1$$

co z definicji oznacza, że $Q_1 = Q_2$.

Ze względu na to, że wszystkie zbiory puste są sobie równe, nie rozróżnia się ich i mówi się tylko o jednym zbiorze pustym, który będziemy oznaczać symbolem 0.

Dla dowolnego zbioru A mamy zatem

$$0 \subset A$$

Implikacja ta zachodzi w szczególności, gdy A jest klasą zbiorów.

§ 6. Przestrzeń

Jeżeli wszystkie zbiory rozpatrywane w określonym zagadnieniu są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru niepustego A, to X nazywamy przestrzenią.

Należy zapamiętać, że w pojęciu przestrzeni X jest zawsze zawarte założenie, że zbiór X nie jest pusty.

W tej pracy najczęściej spotykanymi przestrzeniami będą:

zbiór wszystkich liczb naturalnych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{N}$,

zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{N}_o$,

zbiór wszystkich liczb całkowitych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{I}$,

zbiór wszystkich liczb wymiernych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{W}$,

zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{R}$,

zbiór wszystkich liczb zespolonych, który będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{Z}$.

Jeśli do zbioru wszystkich liczb rzeczywistych dołączyć jeszcze dwa elementy ∞ i $-\infty$ otrzymujemy przestrzeń, którą będziemy oznaczać symbolem $\mathfrak{R}_o$.

§ 7. Funkcja

Jeśli każdemu elementowi x pewnego zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y, to takie przyporządkowanie nazywamy funkcją odwzorującą zbiór X w zbiór Y i jeśli f jest symbolem tej funkcji, piszemy $y = f(x)$. Element $x \in X$ nazywamy argumentem funkcji f, a przyporządkowany mu element $y \in Y$ wartością funkcji f w punkcie x. Należy zwrócić uwagę, że w symbolu $f(x)$ symbolem funkcji jest tylko f, natomiast $f(x)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie x. W praktyce często odchodzimy jednak od tej reguły, gdy nie powoduje to zamieszania, i mówimy np. o funkcjach $\log x$, $\sin x$, $3x^2 + 1$ itp., pomimo że - ściśle biorąc - symbole powyższe oznaczają wartości tych funkcji w punkcie x.

Funkcję odwzorującą zbiór X w zbiór Y będziemy również nazywać odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y albo przekształceniem zbioru X w zbiór Y.

Zbiór wszystkich argumentów funkcji f nazywamy dziedziną tej funkcji, zbiór wszystkich wartości funkcji f nazywamy przeciwdziedziną tej funkcji.

Jeżeli zbiór A jest zawarty w dziedzinie funkcji f, będziemy mówić, że funkcja f jest określona na zbiorze A. Zatem zwrot "funkcja f jest określona na zbiorze A" nie musi oznaczać, że A jest dziedziną funkcji f. Umowa ta nie jest ściśle przestrzegana w innych książkach i dlatego należy o niej specjalnie pamiętać.

Jeśli funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y a ponadto $\bigwedge_{y\in Y} \bigvee_{x\in X} y = f(x)$, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y.

Jest to jedyny przypadek, w którym wyrażenia "w zbiór" i "na zbiór" mają odmienne znaczenia.

Jeśli funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y, $A \subset X$ oraz

$$B = \left\{ y : y = f(x) \wedge x \in A \right\}$$

to mówimy również, że funkcja f odwzorowuje zbiór A na zbiór B i piszemy

$$f(A) = B$$

Zbiór B nazywamy tu obrazem zbioru A, a zbiór A przeciwobrazem zbioru B. W szczególności, jeśli X jest zbiorem wszystkich argumentów funkcji f, a Y zbiorem wszystkich wartości tej funkcji, piszemy

$$f(X) = Y$$

W tym przypadku Y jest obrazem zbioru X, a zbiór X przeciwobrazem zbioru Y, czyli przeciwdziedzina jest obrazem dziedziny, a dziedzina przeciwobrazem przeciwdziedziny funkcji f.

Jeśli funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, a ponadto

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$$

to funkcję f nazywamy odwzorowaniem jedno-jednoznacznym albo funkcją różnowartościową albo funkcją odwracalną. W tym przypadku każdemu elementowi $y \in Y$ jest przyporządkowany dokładnie jeden element $x \in X$, czyli istnieje funkcja odwzorująca zbiór Y na X. Funkcję tę oznaczamy symbolem f^{-1} i nazywamy funkcją odwrotną dla funkcji f.

Odwzorowanie zbioru w klasę zbiorów nazywamy rodziną zbiorów. Gdy rodzina zbiorów jest odwzorowaniem zbioru T w klasę zbiorów $\mathcal{A}$, to zbiór A z klasy $\mathcal{A}$ przyporządkowany elementowi $t \in T$ będziemy również oznaczać symbolem A_t, a rodzinę zbiorów symbolem $\left\{A_t\right\}_{t\in T}$ albo po prostu $\left\{A_t\right\}$.

§ 8. Ciąg

Ciągiem nieskończonym albo po prostu ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest przestrzeń $\mathfrak{N}$ albo $\mathfrak{N}_o$. Funkcję taką oznaczamy odpowiednio symbolem

$$(a_1, a_2, \dots) \quad \text{albo} \quad (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

gdzie a_n oznacza wartość funkcji w punkcie n i nazywa się n-tym wyrazem ciągu ($n = 1,2,\dots$ albo $n = 0,1,2,\dots$).

Ciągiem skończonym albo ciągiem k-elementowym nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $1,2,\dots,k$. Ciąg skończony oznaczamy symbolem

$$(a_1, \dots, a_k)$$

gdzie a_n również oznacza wartość funkcji w punkcie n i nazywa się n-tym wyrazem ciągu ($n = 1,\dots,k$).

Zarówno ciąg nieskończony jak skończony oznaczamy nieraz krótko (a_n).

Zbiór wyrazów ciągu nieskończonego lub skończonego będziemy oznaczać odpowiednio symbolami

$$\{a_1, a_2, \dots\} \quad \text{lub} \quad \{a_1, \dots, a_k\}$$

Zwróćmy uwagę na różnicę między ciągiem nieskończonym lub skończonym a zbiorem jego wyrazów. Pojęcie ciągu nieskończonego lub skończonego zawiera w sobie warunek uporządkowania jego wyrazów poprzez przyporządkowanie każdemu numerowi n odpowiedniego wyrazu a_n. Pojęcie zbioru warazów takiego warunku uporządkowania nie zawiera. Na przykład ciągi (a_1,a_2) i (a_2,a_1) dla $a_1 \neq a_2$ są różne, natomiast zbiory $\{a_1,a_2\}$ i $\{a_2,a_1\}$ są identyczne. Ciągi $(0,1,1,0)$ i $(0,1)$ są różne, natomiast $\{0,1,1,0\} = \{0,1\}$.

Jeśli wyrazy ciągu nieskończonego lub skończonego są zbiorami, to ciąg ten nazywamy ciągiem zbiorów. Ciąg zbiorów jest szczególnym przypadkiem rodziny zbiorów.

Ciąg nieskończony albo skończony zbiorów (A_n) nazywamy ciągiem wstępującym zbiorów, jeśli $\bigwedge_{n\in\mathfrak{N}} A_n \subset A_{n+1}$, a ciągiem zstępującym zbiorów, jeśli $\bigwedge_{n\in\mathfrak{N}} A_n \supset A_{n+1}$. Ciąg wstępujący zbiorów (A_n) oznaczamy symbolem $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, a ciąg zstępujący zbiorów (A_n) symbolem $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ Skończony ciąg wstępujący k zbiorów (A_n) oznaczamy symbolem $A_1 \subset \dots \subset A_k$, a skończony ciąg zstępujący k zbiorów (A_n) symbolem $A_1 \supset \dots \supset A_k$. Ciągi nieskończone lub skończone zbiorów, będące ciągami wstępującymi albo zstępującymi zbiorów, nazywamy ciągami monotonicznymi zbiorów.

<u>Ciągiem liczbowym</u> nieskończonym lub skończonym nazywamy ciąg, którego wyrazy są elementami przestrzeni $\mathfrak{R}_0$, tzn. są liczbami rzeczywistymi, które będziemy także nazywać <u>liczbami skończonymi</u>, albo elementami ∞, $-\infty$, które będziemy nazywać <u>liczbami nieskończonymi</u>. Przyjmujemy dla liczb nieskończonych umowę, że wszystkie następujące nierówności i równości są prawdziwe dla każdego $a \in \mathfrak{R}$:

$$-\infty < a < \infty, \quad a+\infty = \infty + a = \infty, \quad -\infty + a = a - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$|\pm\infty| = \infty, \quad \infty \cdot \infty = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty, \quad \infty\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot\infty = -\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad 0\cdot(\pm\infty) = 0,$$

$$a > 0 \Rightarrow a\cdot\infty = \infty \wedge a\cdot(-\infty) = -\infty, \quad a < 0 \Rightarrow a\cdot\infty = -\infty \wedge a\cdot(-\infty) = \infty,$$

$$a > 0 \Rightarrow \infty^a = \infty.$$

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy rosnącym, gdy $\bigwedge_n a_n < a_{n+1}$.

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy malejącym, gdy $\bigwedge_n a_n > a_{n+1}$.

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy niemalejącym, gdy $\bigwedge_n a_n \leqslant a_{n+1}$.

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy nierosnącym, gdy $\bigwedge_n a_n \geqslant a_{n+1}$.

Ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym, a ciąg malejący ciągiem nierosnącym. Ciągi liczbowe nierosnące i ciągi liczbowe niemalejące obejmujemy łączną nazwą <u>ciągów liczbowych monotonicznych</u>.

§ 9. Produkt kartezjański

<u>Produktem kartezjańskim</u> zbiorów $X_1, \ldots, X_n$, oznaczanym symbolem

$$X_1 \times \ldots \times X_n$$

nazywamy zbiór wszystkich ciągów $x = (x_1, \ldots, x_n)$, gdzie $x_k \in X_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. Analogicznie produktem kartezjańskim ciągu zbiorów $X_1, X_2, \ldots$ oznaczanym symbolem

$$X_1 \times X_2 \times \ldots$$

nazywamy zbiór wszystkich ciągów $x = (x_1, x_2, \ldots)$, gdzie $x_k \in X_k$ dla $k = 1, 2, \ldots$

§ 10. Funkcja n zmiennych

<u>Funkcją n zmiennych</u> nazywamy funkcję o dziedzinie $X \subset (X_1 \times \ldots \times X_n)$. Zamiast $f[(x_1, \ldots, x_n)]$ piszemy krócej $f(x_1, \ldots, x_n)$ albo $f(x)$, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n)$.