§ 92. Twierdzenie

Każdy zbiór otwarty G w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ jest sumą co najwyżej przeliczalnej ilości przedziałów wymiernych otwartych albo jest pusty.

D| Wystarczy przeprowadzić dowód, gdy zbiór otwarty G nie jest pusty. Niech $(Q_1, Q_2, \ldots)$ będzie ciągiem wszystkich przedziałów wymiernych otwartych w przestrzeni $\mathcal{R}^n$. Niech λ_k oznacza średnicę przedziału Q_k dla $k = 1,2,\ldots$ Zauważmy, że

$$\bigwedge_{x\in G} \bigvee_{Q_{n_1}, Q_{n_2}, \ldots} \left(\bigwedge_{m\in\mathfrak{N}} x \in Q_{n_m} \right) \wedge \lim_{m\to\infty} \lambda_{n_m} = 0$$

Ponieważ zbiór G^c jest domknięty, czyli $\overline{G^c} = G^c$, więc na mocy własności (d8) domknięcia zbioru mamy

$$\bigwedge_{x\in G} \left(x \notin G^c \Rightarrow \varrho(x, G^c) = d_x > 0 \right)$$

skąd dla $\lambda_{n_m} < d_x$ mamy $Q_{n_m} \subset G$. Zatem

$$\bigwedge_{x\in G} \bigvee_{q(x)\in\mathfrak{N}} x \in Q_{q(x)} \wedge Q_{q(x)} \subset G$$

skąd z kolei wynika, że

$$G = \bigcup_{x\in G} x \subset \bigcup_{x\in G} Q_{q(x)} \subset G$$

czyli

$$G = \bigcup_{x\in G} Q_{q(x)}$$

Ponieważ wszystkich przedziałów $Q_{q(x)}$ jest na mocy twierdzenia § 88 co najwyżej przeliczalnie wiele, więc istnieje taki ciąg $(Q_{r_1}, Q_{r_2}, \ldots)$, że

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{r_j}$$

§ 93. Twierdzenie

Ciało zbiorów borelowskich $\mathcal{B}$ w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ jest najmniejszym σ-ciałem rozpiętym na klasie wszystkich przedziałów postaci $\langle -\infty; x)$, gdzie $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}_0^n$.

D] Niech $a = (a_1,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \Re_0^n$ i niech $a < b$. Wprowadzimy następujące przedziały dla $r = 0,1,\ldots,n$:

$$(11)\quad B^r_{b_1,\ldots,b_r}(a_1,\ldots,a_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \langle (a_1,\ldots,a_r,\ -\infty,\ldots,-\infty);\ (b_1,\ldots,b_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n)\big)$$

W szczególności mamy

$$(12)\quad \begin{aligned} &B^0(x_1,\ldots,x_n) = \langle -\infty;\ x),\\ &B^n_{b_1,\ldots,b_n}(a_1,\ldots,a_n) = \langle a;b) \end{aligned}$$

Dla $r = 1,\ldots,n$ jest

$$(13)\quad B^r_{b_1,\ldots,b_r}(a_1,\ldots,a_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n) =$$

$$= B^{r-1}_{b_1,\ldots,b_{r-1}}(a_1,\ldots,a_{r-1},\ b_r, x_{r+1},\ldots,x_n) -$$

$$- B^{r-1}_{b_1,\ldots,b_{r-1}}(a_1,\ldots,a_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n)$$

a stąd na mocy własności (s7) najmniejszego σ-ciała $\mathcal{B}_0$ rozpiętego na przedziałach $\langle -\infty;\ x)$:

$$\bigwedge_{x\in\Re_0^n} \langle -\infty; x) \in \mathcal{B}_0 \iff \bigwedge_{x\in\Re_0^n} B^0(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{a_1,b_1,x_2,\ldots,x_n\in\Re_0} B^1_{b_1}(a_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow \ldots$$

$$\ldots \Rightarrow \bigwedge_{a,b\in\Re_0^n} B^n_{b_1,\ldots,b_n}(a_1,\ldots,a_n) = \langle a;b) \in \mathcal{B}_0 \underset{(\sigma3)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(\sigma3)}{\Rightarrow} \bigwedge_{a,b\in\Re_0^n} (a;b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle c_k;\ b),\ \text{gdzie}\ \ c_k \in \Re_0^n,\ a < c_k \leqslant b,\ \ c_k \searrow a$$

Stąd na mocy twierdzenia § 92 i własności (σ3) σ-ciała każdy zbiór otwarty G należy do $\mathcal{B}_0$. Ponieważ z definicji $\mathcal{B}$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym wszystkie zbiory otwarte, więc mamy $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0$. Ale z drugiej strony przedziały $\langle -\infty;\ x) = (-\infty; x)$ są zbiorami otwartymi i stanowią podklasę klasy wszystkich zbiorów otwartych. Wobec tego najmniejsze σ-ciało rozpięte na wszystkich przedziałach postaci $(-\infty;\ x)$ musi zawierać się w najmniejszym

σ-ciele rozpiętym na wszystkich zbiorach otwartych, czyli $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$. Ostatecznie mamy $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$.

§ 94. Zbiory borelowskie w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$

Wykażemy, że wszystkie przedziały w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ są zbiorami borelowskimi. Otóż z dowodu twierdzenia § 93 wynika, że wszystkie przedziały postaci $(a;b)$ i $\langle a;b)$, gdzie $a = (a_1,\dots,a_n)$, $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathfrak{R}^n_0$ są zbiorami borelowskimi. W szczególności są zatem zbiorami borelowskimi przedziały $(-\infty;\, b)$, $(a;\infty)$, $\langle a;\infty)$ oraz $(-\infty;\infty)$. Ze wzorów

$$(a;b\rangle = \bigcap_{k=1}^{\infty} (a;\, c_k)$$

$$\langle a;b\rangle = \bigcap_{k=1}^{\infty} \langle a;\, c_k)$$

gdzie $c_k = (c_{k1},\dots,c_{kn}) \in \mathfrak{R}^n_0$ oraz $c_{kj} > b_j$, gdy $b_j < \infty$, a $c_{kj} = \infty$, gdy $b_j = \infty$, dla $j = 1,\dots,n$; $k = 1,2,\dots$ a ponadto $c_k \searrow b$, wynika, że również przedziały $(a;b\rangle$ i $\langle a;b\rangle$ są zbiorami borelowskimi. W szczególności są zatem zbiorami borelowskimi przedziały $(-\infty,b\rangle$. W ten sposób wykazaliśmy, że istotnie, wszystkie przedziały w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ są zbiorami borelowskimi.

Figury elementarne jako skończone sumy przedziałów są zbiorami borelowskimi. Analogicznie, figury elementarne lewostronnie domknięte są również zbiorami borelowskimi.

Hiperpłaszczyzny w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ są zbiorami borelowskimi, ponieważ granica ciągu punktów leżących na ustalonej hiperpłaszczyźnie też leży na tej hiperpłaszczyźnie, z czego wynika, że hiperpłaszczyzna jest zbiorem domkniętym, a więc borelowskim.

Analogicznie wykazujemy, że płaszczyzny i proste w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ są zbiorami borelowskimi.

Ściany przedziałów - jako zbiory domknięte - są zbiorami borelowskimi. Ogólnie, każdy zbiór leżący na hiperpłaszczyźnie przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ i domknięty w tej hiperpłaszczyźnie jest również domknięty w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ i jest tym samym zbiorem borelowskim. To samo dotyczy zbiorów domkniętych na płaszczyźnie czy na prostej w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$.

A zatem na mocy § 65 zbiorami borelowskimi w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ m. in. są:

- zbiory otwarte,
- zbiory domknięte,
- zbiór pusty,
- cała przestrzeń $\mathfrak{R}^n$,
- wnętrze dowolnego zbioru,
- domknięcie dowolnego zbioru,
- zbiory skończone,
- zbiory przeliczalne,
- zbiory G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ...,
- przedziały wszystkich postaci,
- ściany przedziałów,
- figury elementarne i figury elementarne lewostronnie domknięte,
- hiperpłaszczyzny, płaszczyzny, proste,
- zbiory domknięte na hiperpłaszczyznach, płaszczyznach i prostych.

II. MIARA

§ 95. Addytywna funkcja zbioru

Addytywną funkcją zbioru w pewnej ustalonej przestrzeni X nazywamy każdą funkcję λ spełniającą następujące warunki:

(α1) λ jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie K będącej ciałem podzbiorów przestrzeni X.

(α2) $\bigvee_{A\in K} |\lambda(A)|<\infty$

(α3) $\bigwedge_{A,B\in K} \lambda(A+B) = \lambda(A) + \lambda(B)$*)

A oto własności addytywnej funkcji zbioru:

(a1) $\lambda(0) = 0$

D] $\bigvee_{A\in K} |\lambda(A)|<\infty \Rightarrow \big(\lambda(A) = \lambda(A+0) = \lambda(A) + \lambda(0) \Rightarrow \lambda(0) = 0\big)$

(a2) $\bigwedge_{A_1,\dots A_n\in K} \lambda(A_1 + \dots + A_n) = \lambda(A_1) + \dots + \lambda(A_n)$

D] Wynika z (α3) przez indukcję.

(a3) $\bigvee'_{A,B\in K} \lambda(A) = \infty \wedge \lambda(B) = -\infty$

D] Gdyby $\bigvee_{A,B\in K} \lambda(A) = \infty \wedge \lambda(B) = -\infty$, to równość $\lambda(A+B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ nie miałaby sensu.

(a4) λ jest skończoną addytywną funkcją zbioru $\Leftrightarrow |\lambda(X)|<\infty$

D] λ jest skończoną addytywną funkcją zbioru $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bigwedge_{A\in K} |\lambda(A)|<\infty \Rightarrow |\lambda(X)|<\infty$

Z drugiej strony

$$\bigwedge_{A\in K} X = A + A^c \Rightarrow \lambda(X) = \lambda(A) + \lambda(A^c)$$

a zatem

$$\lambda(A) = \infty \wedge |\lambda(X)|<\infty \Rightarrow \lambda(A^c) = -\infty$$

co jest sprzeczne z (a3),

---

* Przypominamy, że symbol $A+B$ zawiera w sobie założenie, że $A\cap B = 0$.

$$\lambda(A) = -\infty \wedge |\lambda(X)| < \infty \Rightarrow \lambda(A^c) = \infty$$

co jest sprzeczne z (a3), skąd

$|\lambda(X)| < \infty \Rightarrow \bigwedge_{A \in K} |\lambda(A)| < \infty \Leftrightarrow \lambda$ jest skończoną funkcją zbioru.

(a5) λ jest niemalejąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{A \in K} \lambda(A) \geqslant 0$

D| λ jest niemalejąca $\Rightarrow \bigwedge_{A \in K} \left(0 \subset A \Rightarrow \lambda(0) \leqslant \lambda(A)\right) \underset{(\alpha 1)}{\Rightarrow} \bigwedge_{A \in K} \lambda(A) \geqslant 0$

$\bigwedge_{A \in K} \lambda(A) \geqslant 0 \Rightarrow \bigwedge_{A,B \in K} \Big(A \subset B \Rightarrow B = A + (B - A) \Rightarrow \lambda(B) =$

$= \lambda(A) + \lambda(B - A) \geqslant \lambda(A)\Big) \Rightarrow \lambda$ jest niemalejąca

(a6) $\bigwedge_{\substack{A,B \in K \\ |\lambda(B)| < \infty}} \lambda(B - A) = \lambda(B - A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$

D| $B = A \cap B + (B - A) \underset{(\alpha 3)}{\Rightarrow} \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B - A)$

Gdy $|\lambda(B)| < \infty$, wtedy na mocy (a3) $|\lambda(A \cap B)| < \infty$, $|\lambda(B - A)| < \infty$ i otrzymujemy (a6).

(a7) $\bigwedge_{\substack{A,B \in K \\ |\lambda(B)| < \infty}} \lambda(A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(B - A \cap B)$

D| Analogiczny do dowodu (a6).

§ 96. Funkcja addytywna przedziału lewostronnie domkniętego

Funkcją addytywną przedziału lewostronnie domkniętego w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ będziemy nazywać każdą funkcję ϕ spełniającą następujące warunki:

(λ1) ϕ jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{P}_l$ będącej klasą wszystkich przedziałów lewostronnie domkniętych w $\mathfrak{R}^n$

(λ2) $\bigvee_{A \in \mathcal{P}_l} |\phi(A)| < \infty$

(λ3) $\bigwedge_{A,B,C \in \mathcal{P}_l} A = B + C \Rightarrow \phi(A) = \phi(B) + \phi(C)$

A oto własności funkcji addytywnej przedziału lewostronnie domkniętego:

(l1) $\phi(0) = 0$

D| $\bigvee_{A \in \mathcal{P}_l} |\phi(A)| < \infty \underset{(\lambda 3)}{\Rightarrow} \Big(\phi(A + 0) = \phi(A) + \phi(0) = \phi(A) \Rightarrow \phi(0) = 0\Big)$

(12) $$\bigwedge_{A,A_1,\ldots,A_m\in\mathcal{P}_l} A=\sum_{k=1}^{m}A_k \Longrightarrow \Phi(A)=\sum_{k=1}^{m}\Phi(A_k)$$

D| Wzór powyższy nie wynika bezpośrednio z $(\lambda 3)$, ponieważ z założenia, że $A=\sum_{k=1}^{m}A_k$, nie wynika np. dla $m>2$, że A_1+A_2 jest przedziałem lewostronnie domkniętym. Natomiast w przypadku, gdy przedstawienie

(*) $$A=\sum_{k=1}^{m}A_k$$

jest podziałem normalnym przedziału A, można tę sumę uporządkować do postaci (***) z § 83, gdzie

$$\bigwedge_{\substack{l_1,\ldots,l_n\\ l_j\in\{1,\ldots,k_j\}\ \text{dla}\ j=1,\ldots,n}} A_{l_1,\ldots,l_n}\in\{A_1,\ldots,A_m\}$$

Wtedy każda z sum

$$\sum_{l_n=1}^{1}A_{l_1,\ldots,l_n},\ldots,\sum_{l_n=1}^{k_n}A_{l_1,\ldots,l_n}$$

jest przedziałem lewostronnie domkniętym, następnie każda z sum

$$\sum_{l_{n-1}=1}^{1}\sum_{l_n=1}^{k_n}A_{l_1,\ldots,l_n},\ldots,\sum_{l_{n-1}=1}^{k_{n-1}}\sum_{l_n=1}^{k_n}A_{l_1,\ldots,l_n}$$

jest przedziałem lewostronnie domkniętym itd., aż wreszcie każda z sum

$$\sum_{l_1=1}^{1}\sum_{l_2=1}^{k_2}\cdots\sum_{l_n=1}^{k_n}A_{l_1,\ldots,l_n},\ldots,\sum_{l_1=1}^{k_1}\sum_{l_2=1}^{k_2}\cdots\sum_{l_n=1}^{k_n}A_{l_1,\ldots,l_n}$$

jest przedziałem lewostronnie domkniętym. Stosując rekurencyjnie wzór $(\lambda 3)$ otrzymujemy

$$\Phi(A)=\sum_{l_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{l_n=1}^{k_n}\Phi(A_{l_1,\ldots,l_n})$$

czyli – po innym uporządkowaniu tej sumy –

(**) $$\Phi(A)=\sum_{k=1}^{m}\Phi(A_k)$$

Pozostaje dowieść tę równość w przypadku ogólnym, gdy przedstawienie (*) może nie być podziałem normalnym. Wtedy wykorzystujemy twierdzenie § 84, gdzie na mocy przypadku już udowodnionego mamy ze wzorów (i)i(ii)

$$\Phi(A_k) = \sum_{l=1}^{m_k} \Phi(B_{kl})$$

$$\Phi(A) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m_k} \Phi(B_{kl})$$

skąd wynika wzór (**).

Zauważmy, że własność (12) pozostaje prawdziwa, gdy niektóre z przedziałów $A_1,\ldots,A_m$ będą zbiorami pustymi. Wynika to z własności (11).

(13) Jeżeli

(***) $$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}_l} \Phi(A) \geqslant 0$$

to $$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{P}_l} \Big(A\supset B \Rightarrow \Phi(A) \geqslant \Phi(B)\Big)$$

D| W przypadku $A\supset B$ istnieje podział normalny przedziału A taki, że przedział B jest jedną z części normalnych przedziału A, tzn. $A = \sum_{k=1}^{m} A_k$, $A_k\in\mathcal{P}_l$, $\bigvee_{k_0} A_{k_0} = B$, skąd $\Phi(A) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(A_k)$ i na mocy (***) $\Phi(A) \geqslant \Phi(A_{k_0}) = \Phi(B)$.

§ 97. Twierdzenie

Przyrost funkcji jest funkcją addytywną przedziału lewostronnie domkniętego.

D| Niech będzie dana funkcja rzeczywista

$$F(x) = F(x_1,\ldots,x_n)$$

określona dla każdego $x = (x_1,\ldots,x_n)\in \mathfrak{R}_0^n$, gdzie $x_1,\ldots,x_n \in \mathfrak{R}_0$, i funkcja rzeczywista przedziału lewostronnie domkniętego określona wzorem

(*) $$\bigwedge_{x,y\in\mathfrak{R}_0^n} \Phi\Big(\langle x\,;\,y)\Big) \overset{\text{def}}{=} \Delta_y^n F(x)$$

gdzie $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathfrak{R}_0^n$, $y_1,\dots,y_n\in\mathfrak{R}_0$. Z definicji wynika, że funkcja Φ spełnia warunek $(\lambda 1)$ dla funkcji addytywnej przedziału lewostronnie domkniętego. Dla $x=y$ przedział $\langle x;y)$ jest zbiorem pustym i na mocy $(*)$ $\Phi(0)=0$. Tym samym funkcja Φ spełnia warunek $(\lambda 2)$.

Niech teraz będą dane dowolne takie przedziały lewostronnie domknięte

$$A=\langle a;\alpha),\qquad B=\langle b;\beta),\qquad C=\langle c;\gamma)$$

gdzie

$$a=(a_1,\dots,a_n),\quad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\dots,\ \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathfrak{R}_0^n,$$

$$a_1,\dots,a_n,\dots,\ \gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathfrak{R}_0,$$

że

$$A=B+C$$

Wobec tego istnieje taka liczba $s\in\{1,\dots,n,\}$ że

$(**)$ $\quad a_j=b_j=c_j\leq\alpha_j=\beta_j=\gamma_j$ dla $j\neq s$, $j\in\{1,\dots,n\}$,

oraz

$(***)$ $$a_s=b_s<\beta_s=c_s\leq\alpha_s=\gamma_s$$

albo

$$a_s=c_s\leq\gamma_s=b_s\leq\alpha_s=\beta_s$$

Ze względu na symetrię wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek $(***)$. Mamy wtedy

$$F(b)=F(a)=F(a_1,\dots,a_n)$$

$$F(c)=F(a_1,\dots,a_{s-1},c_s,a_{s+1},\dots,a_n)$$

Wynika stąd, że

$$\Delta^1_{(\alpha_s)_s}F(a)=F(a_1,\dots,a_{s-1},\alpha_s,a_{s+1},\dots,a_n)-F(a_1,\dots,a_n)$$

$$\Delta^1_{(\beta_s)_s}F(b)=F(a_1,\dots,a_{s-1},c_s,a_{s+1},\dots,a_n)-F(a_1,\dots,a_n)$$

$$\Delta^1_{(\gamma_s)_s}F(c)=F(a_1,\dots,a_{s-1},\alpha_s,a_{s+1},\dots,a_n)-$$

$$-F(a_1,\dots,a_{s-1},c_s,a_{s+1},\dots,a_n)$$

W takim razie na mocy twierdzenia § 82 i wzorów (**)

$$\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}\Delta^1_{(\alpha_s)_s}F(a)=$$

$$=\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_{s-1},\alpha_s,a_{s+1},\ldots,a_n)-$$

$$-\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_n)=$$

$$=\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_{s-1},c_s,a_{s+1},\ldots,a_n)-$$

$$-\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_n)+$$

$$+\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_{s-1},\alpha_s,a_{s+1},\ldots,a_n)-$$

$$-\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}F(a_1,\ldots,a_{s-1},c_s,a_{s+1},\ldots,a_n)=$$

$$=\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}\Delta^1_{(\beta_s)_s}F(b)+$$

$$+\Delta^{n-1}_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_{s-1})_{s-1}(\alpha_{s+1})_{s+1},\ldots,(\alpha_n)_n}\Delta^1_{(\gamma_s)_s}F(c)=$$

$$=\Delta^{n-1}_{(\beta_1)_1,\ldots,(\beta_{s-1})_{s-1}(\beta_{s+1})_{s+1},\ldots,(\beta_n)_n}\Delta^1_{(\beta_s)_s}F(b)+$$

$$+\Delta^{n-1}_{(\gamma_1)_1,\ldots,(\gamma_{s-1})_{s-1}(\gamma_{s+1})_{s+1},\ldots,(\gamma_n)_n}\Delta^1_{(\gamma_s)_s}F(c)$$

czyli na mocy wzoru ($\Delta 2$) z § 77 i twierdzenia § 79

$$\Delta^n_{(\alpha_1)_1,\ldots,(\alpha_n)_n}F(a)=\Delta^n_{(\beta_1)_1,\ldots,(\beta_n)_n}F(b)+\Delta^n_{(\gamma_1)_1,\ldots,(\gamma_n)_n}F(c)$$

to znaczy

$$\Delta^n_\alpha F(a)=\Delta^n_\beta F(b)+\Delta^n_\gamma F(c)$$

i na mocy (*)

$$\Phi(\langle a;\alpha\rangle)=\Phi(\langle b;\beta\rangle)+\Phi(\langle c;\gamma\rangle)$$

co można również zapisać w postaci

$$\Phi(A)=\Phi(B)+\Phi(C)$$

Tym samym funkcja Φ spełnia także warunek $(\lambda 3)$ i jest funkcją addytywną przedziału lewostronnie domkniętego.

§ 98. Funkcja addytywna figury elementarnej lewostronnie domkniętej

Funkcją addytywną figury elementarnej lewostronnie domkniętej w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ będziemy nazywać każdą addytywną funkcję zbioru o dziedzinie Q będącej ciałem wszystkich figur elementarnych lewostronnie domkniętych w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ (patrz § 87).

Z powyższej definicji wynika, że funkcja λ jest funkcją addytywną figury elementarnej lewostronnie domkniętej wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki $(\alpha 1)$, $(\alpha 2)$, $(\alpha 3)$ z § 95 dla

$$X = \mathfrak{R}^n, \quad K = Q.$$

Funkcja taka ma wtedy wszystkie własności (a1),...,(a7).

§ 99. Twierdzenie

Każda funkcja addytywna Φ przedziału lewostronnie domkniętego daje się w dokładnie jeden sposób przedłużyć do funkcji addytywnej figury elementarnej lewostronnie domkniętej, tzn. istnieje dokładnie jedna taka funkcja addytywna Ψ figury elementarnej lewostronnie domkniętej, że

$$\text{(i)} \qquad \bigwedge_{A \in \mathfrak{P}_l} \Psi(A) = \Phi(A)$$

gdzie $\mathfrak{P}_l$ oznacza klasę wszystkich przedziałów lewostronnie domkniętych.

D] Niech A będzie dowolną figurą elementarną lewostronnie domkniętą. Na mocy własności (q6) z § 87 mamy

$$\bigvee_{A_1,\dots,A_m \in \mathfrak{P}_l} A = \sum_{j=1}^{m} A_j$$

Na mocy (i) przedłużenie Ψ funkcji Φ może być określone zatem tylko wzorem

$$\text{(ii)} \qquad \Psi(A) = \sum_{j=1}^{m} \Phi(A_j)$$

Inaczej funkcji ϕ przedłużyć nie można ze względu na żądaną addytywność funkcji ψ. Przedłużenie dane wzorem (ii) będzie możliwe, jeśli udowodnimy, że wartość $\psi(A)$ nie zależy od sposobu podziału figury A na przedziały lewostronnie domknięte.

Niech będą dane dwa rozkłady figury A na rozłączne przedziały lewostronnie domknięte

$$A = A_1 + \dots + A_m$$

$$A = B_1 + \dots + B_r$$

Wykażemy, że

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(A_j) = \sum_{l=1}^{r} \phi(B_l)$$

Otóż mamy

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,m\}} A_j = A_j \cap A = A_j \cap \left(\sum_{l=1}^{r} B_l\right) = \sum_{l=1}^{r} A_j \cap B_l$$

$$\bigwedge_{l\in\{1,\dots,r\}} B_l = B_l \cap A = B_l \cap \left(\sum_{j=1}^{m} A_j\right) = \sum_{j=1}^{m} A_j \cap B_l$$

Każdy ze zbiorów $A_j \cap B_l$, $j = \{1,\dots,m\}$, $l = \{1,\dots,r\}$ jest przedziałem lewostronnie domkniętym, zatem na mocy własności (12) funkcji addytywnej przedziału lewostronnie domkniętego jest

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,m\}} \phi(A_j) = \sum_{l=1}^{r} \phi(A_j \cap B_l)$$

$$\bigwedge_{l\in\{1,\dots,r\}} \phi(B_l) = \sum_{j=1}^{m} \phi(A_j \cap B_l)$$

skąd

$$\sum_{j=1}^{m} \phi(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{r} \phi(A_j \cap B_l) = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{m} \phi(A_j \cap B_l) = \sum_{l=1}^{r} \phi(B_l)$$

Wykazaliśmy tym samym, że wzór (ii) określa wartość funkcji $\psi(A)$ jednoznacznie, niezależnie od sposobu rozkładu figury A na przedziały lewostronnie domknięte. To kończy dowód twierdzenia.

§ 100. Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru

Przeliczalnie addytywną funkcją zbioru w pewnej ustalonej przestrzeni X nazywamy każdą funkcję λ spełniającą następujące warunki:

(π1) λ jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie K będącej ciałem podzbiorów przestrzeni X.

(π2) $\bigvee\limits_{A\in K} |\lambda(A)|<\infty$

(π3) $\bigwedge\limits_{A_1,A_2,\ldots\in K}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in K \Rightarrow \lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k)\right)$

Uwaga: Z powyższej definicji wynika, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k)$ musi być bezwzględnie zbieżny. Wartość $\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ – na mocy definicji sumy zbiorów – nie zależy bowiem od kolejności zbiorów A_1, $A_2,\ldots$, natomiast suma szeregu liczbowego $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k)$ – jak to się dowodzi w kursie analizy matematycznej – nie zależy od kolejności składników wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(A_k)$ jest bezwzględnie zbieżny, tzn. gdy jest również zbieżny szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda(A_k)|$.

§ 101. Twierdzenie

Z| λ jest addytywną funkcją zbioru o dziedzinie $\mathcal{K}$ będącej ciałem podzbiorów przestrzeni X

T| λ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{K} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{A_1\subset A_2\subset\ldots\in\mathcal{K}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\in\mathcal{K}\Rightarrow\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(A_k)\right)$$

D| Mamy najpierw

λ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{K} \Rightarrow \bigwedge\limits_{\substack{A_1\subset A_2\subset\ldots\in\mathcal{K}\\ \bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{K}}}\lambda\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(A_k-\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}A_j\right)\right)=$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda\left(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)\underset{\substack{(p2)\\ \text{str}86}}{=}$$

$$\underset{\substack{(p2)\\ \text{str.}86}}{=}\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\left(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)$$

Z drugiej strony

$$\bigwedge_{\substack{A_1\subseteq A_2\subset\ldots\in\mathcal{K}\\ \bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{K}}}\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(A_k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in\mathcal{K}\\ \sum_{k=1}^{\infty} B_k\in\mathcal{K}}} \lambda\Big(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big)=\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_1+\ldots+B_k)\Big)=\lim_{k\to\infty}\lambda(B_1+\ldots+B_k)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda(B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{K}$.

§ 102. Własności przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru

Funkcja przeliczalnie addytywna λ o dziedzinie $\mathcal{K}$ będącej ciałem podzbiorów ustalonej przestrzeni X ma następujące własności:

(p1) $\lambda(0) = 0$

D| $\bigvee_{A\in\mathcal{K}} |\lambda(A)| < \infty \Rightarrow \big(\lambda(A) = \lambda(A + 0 + 0 + \ldots) =$
$= \lambda(A) + \lambda(0) + \lambda(0) + \ldots \Rightarrow \lambda(0) = 0\big)$

(p2) λ jest przeliczalnie addytywna na ciele $\mathcal{K} \Rightarrow \lambda$ jest addytywna na $\mathcal{K}$.

D| Na mocy (π1) i (π2) funkcja przeliczalnie addytywna λ spełnia warunki (α1) i (α2). Ponadto na mocy (p1) jest

$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{K}} \lambda(A+B) = \lambda(A+B+0+0+\ldots) = \lambda(A) + \lambda(B) + \lambda(0) + \lambda(0) + \ldots =$
$= \lambda(A) + \lambda(B)$

a zatem funkcja λ spełnia również warunek (α3) i jest addytywna na $\mathcal{K}$.

(p3) $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{K}} \lambda(A_1 + \ldots + A_n) = \lambda(A_1) + \ldots + \lambda(A_n)$

D| Wynika z (p2) i (a2).

(p4) $\bigvee'_{A,B\in\mathcal{K}} \lambda(A) = \infty \wedge \lambda(B) = -\infty$

D| Wynika z (p2) i (a3).

(p5) λ jest skończona $\Leftrightarrow |\lambda(X)| < \infty$

D| Wynika z (p2) i (a4).

(p6) λ jest niemalejąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{A\in\mathcal{K}} \lambda(A) \geq 0$.

D| Wynika z (p2) i (a5).