Mamy

$$B_1 \supset B_1 \supset \dots$$

oraz

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = 0$$

wobec czego na mocy własności (n9) miary unormowanej

$$\lim_{k\to\infty} \nu(B_k) = 0$$

czyli

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left[\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, \eta_k, x_{j+1},\dots,x_n)\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} F(x_1,\dots,x_{j-1}, \eta_k, x_{j+1},\dots,x_n) = 0$$

a ze względu na dowolność ciągu $\eta_1, \eta_2, \dots$

$$\lim_{x_j\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n) = F(x_1,\dots,x_{j-1},-\infty,x_{j+1},\dots,x_n) = 0$$

ponieważ z definicji

$$F(x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n) =$$

$$= \nu\left[\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n)\rangle\right] = 0$$

gdyż przedział

$$\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n)\rangle$$

jest zbiorem pustym. Funkcja F spełnia zatem warunek (F4) dla dystrybuanty.

Na koniec z definicji funkcji F wynika, że

$$F(\infty) = \nu\left[\langle -\infty; \infty)\right] = \nu(\mathfrak{R}^n) = 1$$

czyli jest spełniony ostatni warunek (F5) dla dystrybuanty. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

§ 115. Twierdzenie

Każda miara unormowana, dla której dziedziną jest ciało zbiorów borelowskich w przestrzeni euklidesowej $\mathfrak{R}^n$, określa jednoznacznie dystrybuantę n-wymiarową, będącą dystrybuantą tej miary.

Odwrotnie, każda dystrybuanta n-wymiarowa określa jednoznacznie miarę unormowaną na ciele zbiorów borelowskich i jest dystrybuantą tej miary.

D| Pierwsza część twierdzenia wynika z twierdzenia § 114. Pozostaje udowodnić część drugą.

Niech będzie dana dystrybuanta n-wymiarowa F. Na mocy twierdzenia § 97 funkcja F określa jednoznacznie wzorem (i) w § 104 funkcję addytywną Φ przedziału lewostronnie domkniętego, a następnie na mocy twierdzenia § 99 za pośrednictwem funkcji Φ określa jednoznacznie funkcję addytywną Ψ figury elementarnej lewostronnie domkniętej o dziedzinie Q będącej ciałem wszystkich figur elementarnych lewostronnie domkniętych. Funkcja Ψ jest przeliczalnie addytywna na ciele Q na mocy twierdzenia § 104 i wobec tego na mocy twierdzenia § 112 określa jednoznacznie miarę unormowaną ν na najmniejszym σ-ciele zawierającym ciało Q, czyli na ciele zbiorów borelowskich. Ze wzorów (fi) z § 103, (i) oraz (ii) z § 104, (16) z § 112 wynika, że dystrybuanta F jest dystrybuantą miary ν. W ten sposób twierdzenie zostało udowodnione.

§ 116. Miara zewnętrzna Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej

Niech $\mathcal{P}$ będzie klasą wszystkich ograniczonych przedziałów domkniętych w przestrzeni euklidesowej $\mathfrak{R}^n$. Innymi słowy

$$A \in \mathcal{P} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigvee_{\substack{a,b \in \mathfrak{R}^n \\ a \leqslant b}} A = \langle a;\, b\rangle$$

gdzie

$$\bigwedge_{a \in \mathfrak{R}} \langle a;\, a\rangle = \{a\}$$

i będziemy pisać $\langle a;a\rangle = a$.

Niech

$$a = (a_1, \ldots, a_n), \qquad b = (b_1, \ldots, b_n)$$

Objętością nazwiemy funkcję rzeczywistą vol określoną na klasie $\mathcal{P}$ wzorem

$$(20) \qquad \bigwedge_{a,b \in \mathfrak{R}^n} \operatorname{vol} \langle a,b\rangle \overset{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

Jak wynika z tej definicji,

$$(21) \qquad \bigwedge_{a,b \in \mathfrak{R}^n} \operatorname{vol} \langle a,b\rangle \geqslant 0$$

Funkcję ω_e określoną wzorem

(22) $$\bigwedge_{A\subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(A) \overset{\text{def}}{=\!=} \inf_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_k)$$

będziemy nazywać miarą zewnętrzną Lebesgue'a. Inaczej mówiąc, jeżeli

(23) $$W_A \overset{\text{def}}{=\!=} \Big\{ x: \bigvee_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_k) \Big\}$$

to

(24) $$\bigwedge_{A\subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(A) = \inf W_A$$

§ 117. Twierdzenie

Miara zewnętrzna Lebesgue'a ω_e jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego.

D] ω_e jest funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest klasa wszystkich podzbiorów przestrzeni $\mathfrak{R}^n$. Funkcja ω_e spełnia zatem warunek $(\zeta 1)$ dla miary zewnętrznej Carathéodory'ego.

Dla zbioru pustego $A = 0$ otrzymujemy na mocy (23)

$$W_0 = \Big\{ x: \bigvee_{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D}} x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_k) \Big\}$$

Kładąc $B_k = \langle a, a\rangle$, $a \in \mathfrak{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ otrzymujemy

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}(B_k) \in W_0$$

i na mocy (24)

$$W_e(0) \leqslant 0$$

Z drugiej strony na mocy (21)

$$x \in W_0 \Rightarrow x \geqslant 0$$

skąd

$$W_e(0) = 0$$

Tym samym funkcja ω_e spełnia warunek $(\zeta 2)$ dla miary zewnętrznej Carathéodory'ego.

Na mocy twierdzenia § 37 i wzoru (24)

$$\bigwedge_{A\subset\mathcal{R}^n}\ \bigwedge_{\substack{r\in\mathcal{R}\\ r>\omega_e(A)}}\ \bigvee_{x_0\in W_A} x_0<r$$

czyli na mocy (23)

$$(25)\qquad \bigwedge_{A\subset\mathcal{R}^n}\ \bigwedge_{\substack{r\in\mathcal{R}\\ r>\omega_e(A)}}\ \bigvee_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in\mathcal{P}\\ \bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\supset A}}\ \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{vol}(B_k)<r$$

Niech teraz A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathcal{R}^n$ i A_1, $A_2,\ldots$ takimi podzbiorami tej przestrzeni, że

$$(\mathrm{i})\qquad A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

Na mocy (25)

$$(\mathrm{ii})\qquad \bigwedge_{k\in\mathfrak{N}}\ \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}}\ \bigvee_{\substack{B_{k1},B_{k2},\ldots\in\mathcal{P}\\ \bigcup_{m=1}^{\infty}B_{km}\supset A_k}}\ \sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{vol}(B_{km})\leqslant\omega_e(A_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

a ponadto

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}B_{km}$$

skąd na mocy (23), biorąc pod uwagę, że w dowodzie twierdzenia § 112 wykazaliśmy, że klasa zbiorów B_{km} jest co najwyżej przeliczalna

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{vol}(B_{km})\in W_A$$

Wykorzystując teraz (24) a następnie (ii) mamy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}}\ \omega_e(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{vol}(B_{km})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\omega_e(A_k)+\varepsilon$$

Stąd uwzględniając (i)

$$(26)\qquad A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Rightarrow\omega_e(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\omega_e(A_k)$$

Funkcja ω_e spełnia zatem wszystkie warunki (ζ1), (ζ2), (ζ3) i jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego.

§ 118. Miara Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej

Niech ω_e będzie miarą zewnętrzną Lebesgue'a w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$. Niech $\mathcal{L}$ oznacza klasę podzbiorów przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ zdefiniowaną wzorem

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} \{A\colon A \subset \mathfrak{R}^n \wedge \bigwedge_{Z\subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(Z) = \omega_e(Z\cap A) + \omega_e(Z-A)\} \tag{27}$$

Na mocy twierdzenia § 117 i twierdzenia Carathéodory'ego klasa $\mathcal{L}$ jest σ-ciałem, a funkcja ω określona na $\mathcal{L}$ wzorem

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{L}} \omega(A) \overset{\text{def}}{=} \omega_e(A) \tag{28}$$

jest miarą. Miarę tę będziemy nazywali miarą Lebesgue'a w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ albo po prostu miarą Lebesgue'a. Ponadto na mocy twierdzenia Carathéodory'ego każdy zbiór miary zewnętrznej Lebesgue'a zero należy do $\mathcal{L}$ i ma miarę Lebesgue'a zero.

Każdy zbiór $A \in \mathcal{L}$ będziemy nazywali zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Zatem klasa (27) jest klasą wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

§ 119. Twierdzenie

Każdy zbiór borelowski w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

D| Na mocy definicji zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a należy wykazać, że

$$A \text{ jest zbiorem borelowskim} \Rightarrow \bigwedge_{Z\subset\mathfrak{R}^n} \omega_e(Z) = \omega_e(Z\cap A) + \omega_e(Z - A) \tag{29}$$

Dowód podzielimy na 3 części T1, T2, T3 stanowiące dowody 3 kolejnych twierdzeń, składających się na twierdzenie (29).

T1| $\bigwedge_{\substack{A,B\subset\mathfrak{R}^n \\ A\neq 0 \\ B\neq 0}} \left(\rho(A,B) > 0 \Rightarrow \omega_e(A + B) = \omega_e(A) + \omega_e(B)\right)$

gdzie $\rho(A,B)$ oznacza odstęp zbiorów A i B, a założenie $A \neq 0, B\neq 0$ jest potrzebne dla istnienia $\rho(A,B)$.

D| Niech $d(A)$ oznacza średnicę dowolnego zbioru $A \subset \mathfrak{R}^n$. Na mocy (25) i twierdzenia § 90

(i) $\bigwedge\limits_{\substack{A,B \in \mathcal{R}^n \\ \varrho(A,B)>0}} \bigwedge\limits_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee\limits_{\substack{B_1,B_2,\ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A+B \\ \bigwedge_k d(B_k)<\varrho(A,B)}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) \leqslant \omega_e(A+B) + \varepsilon$

Wprowadzamy określenia:

$$U_1 = \{x\colon x \in \mathfrak{N} \wedge B_x \cap A \neq 0\}$$

$$U_2 = \{x\colon x \in \mathfrak{N} \wedge B_x \cap B \neq 0\}$$

$$U_1 \cap U_2 \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{x \in \mathfrak{N}} B_x \cap A \neq 0 \wedge B_x \cap B \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\substack{B_x \in \mathcal{P} \\ d(B_x)<\varrho(A,B)}} \Big(\bigvee_{a \in A} a \in B_x \wedge \bigvee_{b \in B} b \in B_x\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{\substack{B_x \subset \mathcal{P} \\ d(B_x)<\varrho(A,B)}} \bigvee_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \varrho(A,B) \leqslant |a-b| < d(B_x) < \varrho(A,B)$$

co jest sprzeczne. Mamy zatem

(ii) $$U_1 \cap U_2 = 0$$

Ponadto z definicji zbiorów U_1 i U_2 wynika, że

$$A \subset \bigcup_{k \in U_1} B_k \qquad B \subset \bigcup_{k \in U_2} B_k$$

skąd na mocy (26)

$$\omega_e(A) \leqslant \sum_{k \in U_1} \mathrm{vol}\,(B_k) \qquad \omega_e(B) \leqslant \sum_{k \in U_2} \mathrm{vol}\,(B_k)$$

i po uwzględnieniu (i) oraz (ii)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \omega_e(A) + \omega_e(B) \leqslant \sum_{k \in U_1} \mathrm{vol}\,(B_k) +$$

$$+ \sum_{k \in U_2} \mathrm{vol}\,(B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) \leqslant \omega_e(A+B) + \varepsilon$$

Otrzymujemy stąd

$$\omega_e(A) + \omega_e(B) \leqslant \omega_e(A+B)$$

i na podstawie własności (z6) miary zewnętrznej Carathéodory'ego

$$\omega_e(A + B) = \omega_e(A) + \omega_e(B)$$

T2| $A \in \mathscr{P} \Rightarrow A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

D| Niech

$$A = \langle a; b\rangle \quad \text{i} \quad B = \langle a-d; b+d\rangle$$

gdzie $a, b, d \in \mathfrak{R}^n$ oraz

$$d = \underbrace{(\delta, \ldots, \delta)}_{n \text{ razy}}$$

gdzie $\delta \in \mathfrak{R}$ i $\delta > 0$. Zauważmy, że

(iii) $$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \mathrm{vol}(B) - \mathrm{vol}(A) < \varepsilon$$

i że odstęp zbiorów A i B^c jest

$$\rho(A, B^c) = \delta > 0$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} (Z \cap A \neq 0 \wedge Z - B \neq 0) \Rightarrow \rho(Z \cap A,\ Z - B) \geqslant \delta > 0$$

ponieważ $(Z \cap A) \subset A$ i $(Z - B) \subset B^c$. Stąd na mocy T1

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} (Z \cap A \neq 0 \wedge Z - B \neq 0) \Rightarrow \omega_e[(Z \cap A) + (Z - B)] =$$
$$= \omega_e(Z \cap A) + \omega_e(Z - B)$$

Ponieważ w przypadku $Z \cap A = 0$ albo $Z - B = 0$ równość ostatnia jest spełniona, więc

(iv) $$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \omega_e[(Z \cap A) + (Z - B)] = \omega_e(Z \cap A) + \omega_e(Z - B)$$

Ponieważ dalej

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} Z = (Z \cap A) + (Z - A) \supset (Z \cap A) + (Z - B)$$

więc na mocy własności (z1) miary Carathéodory'ego

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(Z) \geqslant \omega_e[(Z \cap A) + (Z - B)]$$

i na mocy (iv)

(v) $$\bigwedge_{Z\subset\mathfrak{R}^n}\omega_e(Z) \geqslant \omega_e(Z\cap A) + \omega_e(Z - B)$$

Zauważmy teraz, że zbiór

$$B - A^{o}$$

gdzie A^{o} jest wnętrzem przedziału A, jest figurą elementarną będącą sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych $Q_1,\ldots,Q_m$, nie zachodzących na siebie i takich, że

$$\text{vol}\,(Q_1) + \ldots + \text{vol}\,(Q_m) = \text{vol}\,(B) - \text{vol}\,(A)$$

Na mocy definicji (22)

$$\bigwedge_{j\in\{1,\ldots,m\}}\omega_e(Q_j) \leqslant \text{vol}\,(Q_j)$$

i wobec tego

$$\omega_e(Q_1) + \ldots + \omega_e(Q_m) \leqslant \text{vol}\,(B) - \text{vol}\,(A)$$

Ponieważ dalej

$$B - A^{o} = \bigcup_{j=1}^{m} Q_m$$

więc na mocy własności (z5) miary zewnętrznej Carathéodory'ego

$$\omega_e(B - A^{o}) \leqslant \sum_{j=1}^{m}\omega_e(Q_j) \leqslant \text{vol}\,(B) - \text{vol}\,(A)$$

i na mocy własności (z1), biorąc pod uwagę, że

$$B - A \subset B - A^{o}$$

otrzymujemy

$$\omega_e(B - A) \leqslant \text{vol}\,(B) - \text{vol}\,(A)$$

Stąd na mocy (iii)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}}\ \bigvee_{\substack{\delta\in\mathfrak{R}\\ \delta>0}}\ \omega_e(B - A) < \varepsilon$$

i biorąc pod uwagę, że

$$\bigwedge_{Z\subset\mathfrak{R}^n}\left[Z \cap (B - A)\right] \subset (B - A)$$

na mocy własności (zi) miary zewnętrznej Carathéodory'ego

$$\text{(vi)} \qquad \bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \omega_e\left[Z \cap (B - A)\right] < \varepsilon$$

Następnie

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} Z - A = (Z - B) + Z \cap (B - A) \underset{(z6)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(z6)}{\Rightarrow} \bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(Z - A) \leqslant \omega_e(Z - B) + \omega_e\left[Z \cap (B - A)\right] \underset{(vi)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(vi)}{\Rightarrow} \bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{\delta \in \mathfrak{R} \\ \delta > 0}} \omega_e(Z - A) \leqslant \omega_e(Z - B) + \varepsilon \underset{(v)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(v)}{\Rightarrow} \bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \omega_e(Z) \geqslant \omega_e(Z \cap A) + \omega_e(Z - A) - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(Z) \geqslant \omega_e(Z \cap A) + \omega_e(Z - A)$$

skąd na mocy własności (z7) miary zewnętrznej Carathéodory'ego

$$\bigwedge_{Z \subset \mathfrak{R}^n} \omega_e(Z) = \omega_e(Z \cap A) + \omega_e(Z - A)$$

Na mocy (27) A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a.

T3| A jest zbiorem borelowskim w $\mathfrak{R}^n \Rightarrow A$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

D| Na mocy (27) klasa $\mathcal{L}$ jest zbiorem wszystkich zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i jest σ-ciałem w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$. W części T2 wykazaliśmy, że wszystkie przedziały domknięte należą do klasy $\mathcal{L}$. Ponieważ ściany przedziałów są przedziałami domkniętymi i tym samym należą do $\mathcal{L}$, więc na mocy (10) wszystkie przedziały otwarte należą do $\mathcal{L}$. Na podstawie twierdzenia § 92 wynika stąd, że wszystkie zbiory otwarte w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ należą do $\mathcal{L}$. Ponieważ z definicji ciało zbiorów borelowskich jest najmniejszym σ-ciałem rozpiętym na klasie wszystkich zbiorów otwartych, więc ciało zbiorów borelowskich jest zawarte w $\mathcal{L}$, co oznacza prawdziwość tezy T3 i całego twierdzenia § 119.

§ 120. Twierdzenie

Z| A jest przedziałem ograniczonym

T| $\omega(A) = \text{vol}\ (\bar{A})$

D| Ponieważ wykazaliśmy w paragrafie poprzednim, że wszelkie przedziały jako zbiory borelowskie są mierzalne w sensie Lebesgue'a, więc na mocy (22) i (28) wystarczy wykazać, że

$$(\mathrm{i})\qquad \inf_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \sum_{k=1} \mathrm{vol}\,(B_k) = \mathrm{vol}\,(\bar{A})$$

Równość tę wykażemy najpierw w przypadku, gdy A jest przedziałem domkniętym. Mamy wtedy $A = \bar{A}$. Niech $\varkappa$ oznacza klasę wszystkich przedziałów otwartych. Mamy

$$\bigwedge_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \ \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \ \bigvee_{C_1, C_2, \ldots \in \varkappa} \ \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} (B_k \subset C_k) \wedge \left(\mathrm{vol}\,(\bar{C}_k) \leqslant \mathrm{vol}\,(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \ \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \ \bigvee_{\substack{C_1, C_2, \ldots \in \varkappa \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \supset A}} \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(\bar{C}_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) + \varepsilon$$

Na mocy twierdzenia § 91 między zbiorami $C_1, C_2, \ldots$ istnieje skończona liczba zbiorów $C_{k_1}, \ldots, C_{k_m}$ takich, że

$$\bigcup_{j=1}^{m} C_{k_j} \supset A$$

Zatem

$$(\mathrm{ii})\qquad \bigwedge_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \ \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \ \bigvee_{\substack{C_{k_1}, \ldots, C_{k_m} \in \varkappa \\ \bigcup_{j=1}^{m} C_{k_j} \supset A}} \ \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}\,(\bar{C}_{k_j}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) + \varepsilon$$

Ale

$$\bigcup_{j=1}^{m} C_{k_j} \supset A \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \mathrm{vol}\,(\bar{C}_{k_j}) \geqslant \mathrm{vol}\,(\bar{A})$$

więc na mocy (ii)

$$\bigwedge_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \ \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{R} \\ \varepsilon > 0}} \mathrm{vol}\,(\bar{A}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \mathrm{vol}\,(\bar{A}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) \Rightarrow \inf_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{P} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) \geqslant \mathrm{vol}\,(\bar{A})$$

Z drugiej strony biorąc $B_1 = A$, $B_2 = B_3 = \ldots = P$, gdzie P jest którąkolwiek ze ścian przedziału A, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k) = \mathrm{vol}\,(\bar{A}) \geqslant \inf_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{Q} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{vol}\,(B_k)$$

Z dwu ostatnich nierówności wynika równość (i). W ten sposób wykazaliśmy, że dla przedziałów domkniętych A jest

$$\omega(A) = \mathrm{vol}(\bar{A})$$

Wynika stąd, że dla dowolnej ściany P przedziału jest

$$\omega(P) = 0$$

skąd na mocy wzorów (10) prawdziwość tezy dla wszystkich przedziałów ograniczonych.

§ 121. Twierdzenie

Miara Lebesgue'a jest półskończona.

D| Niech

$$A_{k_1,\ldots,k_n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle a_{k_1,\ldots,k_n};\ b_{k_1,\ldots,k_n})$$

gdzie

$$a_{k_1,\ldots,k_n},\ b_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathfrak{R}^n$$

$$a_{k_1,\ldots,k_n} = (k_1, \ldots, k_n), \qquad b_{k_1,\ldots,k_n} = (k_1 + 1, \ldots, k_n + 1)$$

oraz

$$k_1, \ldots, k_n \in \mathfrak{N}$$

Wynika stąd, że

$$\mathfrak{R}^n = \sum_{k_1,\ldots,k_n} A_{k_1,\ldots,k_n}$$

$$\bigwedge_{k_1,\ldots,k_n} \mathrm{vol}\,(\bar{A}_{k_1,\ldots,k_n}) = 1$$

czyli na mocy twierdzenia § 120

$$\bigwedge_{k_1,\ldots,k_n} \omega\,(A_{k_1,\ldots,k_n}) = 1 < \infty$$

Oznacza to, że cała przestrzeń $\mathcal{R}^n$ jest zbiorem miary ω półskończonej, co na mocy definicji implikuje, że miara Lebesgue'a ω jest miarą półskończoną.

§ 122. Miara względem zbioru i miara zredukowana do zbioru

Niech będzie dana przestrzeń z miarą $(X, \mathcal{S}, \mu)$ i dowolny zbiór mierzalny $B \in \mathcal{S}$ spełniający warunek

$$0 < \mu(B) < \infty$$

Funkcję rzeczywistą zbioru określoną wzorem

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mu_B(A) \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

będziemy nazywali <u>miarą względem zbioru</u> B.

Wykażemy, że miara względem zbioru B jest miarą unormowaną. Funkcja μ_B jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X, spełniającą tym samym warunek $(\nu 1)$ dla miary unormowanej. Z definicji wynika, że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mu_B(A) \geqslant 0$$

co oznacza, że funkcja μ_B spełnia również warunek $(\nu 2)$. Mamy następnie

$$\mu_B(X) = \frac{\mu(X \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1$$

co oznacza, że funkcja μ_B spełnia także warunek $(\nu 3)$. Wreszcie dla $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ mamy

$$\mu_B\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \frac{\mu\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B\right]}{\mu(B)} = \frac{\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cap B)\right)}{\mu(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B)}{\mu(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_B(A_k)$$

co oznacza, że funkcja μ_B spełnia warunek $(\nu 4)$. Zatem funkcja μ_B, istotnie, jest miarą unormowaną.

Z definicji miary względem zbioru B wynika, że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} (A \cap B = 0 \Rightarrow \mu_B(A) = 0)$$

oraz

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} \left(A\subset B \Rightarrow \mu_B(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(B)}\right)$$

Niech teraz ν będzie funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}|B$ będącej σ-ciałem (por. § 25 i § 26) przestrzeni B określoną wzorem

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}|B} \nu(A) \overset{\text{def}}{=\!=} \mu_B(A)$$

Definicja taka jest możliwa z uwagi na to, że na mocy § 25

$$A\in\mathcal{S}|B \Rightarrow \bigvee_{C\in\mathcal{S}} A = C\cap B \Rightarrow A\in\mathcal{S}$$

Innymi słowy, funkcja ν jest funkcją μ_B zredukowaną do σ-ciała $\mathcal{S}|B$. Wykażemy, że funkcja ν jest miarą unormowaną w przestrzeni B. Z definicji wynika, że ν jest nieujemną funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}|B$ będącej σ-ciałem przestrzeni B, co oznacza, że spełnia warunki (ν1) i (ν2) dla miary unormowanej. Następnie

$$\nu(B) = \mu_B(B) = \frac{\mu(B\cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1$$

co oznacza, że funkcja ν spełnia również warunek (ν3). Wreszcie

$$\bigwedge_{A_1, A_2, \ldots \in\mathcal{S}|B} \nu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu_B\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_B(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$$

co oznacza, że funkcja ν spełnia także warunek (ν4). Funkcja ν jest zatem miarą unormowaną w przestrzeni B, a trójka $(B, \mathcal{S}|B, \nu)$ tworzy przestrzeń z miarą unormowaną.

Miarę ν będziemy nazywać miarą zredukowaną do zbioru B.