## § 146. Przykład

W magazynie jest 2500 żarówek, w tym 2000 z fabryki $A_1$, a 500 z fabryki $A_2$. Żarówki są tak wymieszane, że już nie wiadomo, które żarówki z której fabryki pochodzą. Fabryka $A_1$ wypuszcza średnio 2 żarówki wadliwe na 1000, a fabryka $A_2$ 5 żarówek wadliwych na 1000. Wzięto z magazynu żarówkę i okazało się, że jest zła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żarówka pochodziła z fabryki $A_1$, a jakie, że pochodziła z fabryki $A_2$?

Rozwiązanie:

Niech $B$ oznacza zdarzenie, że żarówka okazała się zła. Mamy

$$P(A_1) = \frac{2000}{2500} = 0,8 \qquad P(A_2) = \frac{500}{2500} = 0,2$$

$$P_{A_1}(B) = \frac{2}{1000} = 0,002 \qquad P_{A_2}(B) = \frac{5}{1000} = 0,005$$

Stosując wzór Bayesa otrzymujemy

$$P_B(A_1) = \frac{0,8 \cdot 0,002}{0,8 \cdot 0,002 + 0,2 \cdot 0,005} = \frac{8}{13}$$

$$P_B(A_2) = \frac{0,2 \cdot 0,005}{0,8 \cdot 0,002 + 0,2 \cdot 0,005} = \frac{5}{13}$$

W danym przypadku można było znaleźć prawdopodobieństwo $P_B(A_2)$ ze wzoru

$$P_B(A_2) = 1 - P_B(A_1)$$

## § 147. Zdarzenia niezależne

Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna $(X, S, P)$ i dwa zdarzenia $A, B \in S$ takie, że $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$.

Intuicyjnie wyczuwamy, że zdarzenie $A$ nazwalibyśmy niezależnym od zdarzenia $B$, gdyby

$$P(A) = P_B(A)$$

Ale wtedy mielibyśmy

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

czyli

(*) $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

a stąd

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$$

Wynika, że wtedy również zdarzenie $B$ byłoby niezależne od $A$. Nie zachodziłaby zatem potrzeba określania, które zdarzenie jest niezależne od którego, a można by po prostu mówić o niezależności dwu zdarzeń. Ze względu jednak na możliwość pominięcia założeń $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$ wygodniej jest do zdefiniowania zdarzeń niezależnych użyć równości (*). Otrzymujemy wtedy następującą definicję.

Dwa zdarzenia $A$ i $B$ nazywamy zdarzeniami niezależnymi, wtedy i tylko wtedy, gdy

(93) $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Powyższą definicję uogólnia się następująco na układy o większej liczbie zdarzeń (przez układ zdarzeń rozumiemy tu dowolny zbiór zdarzeń):

Zdarzenia stanowiące skończony lub nieskończony układ zdarzeń $U$ nazywamy <u>zdarzeniami niezależnymi</u> wtedy i tylko wtedy, gdy

(94) $$\bigwedge_{\substack{A_1,\ldots,A_k \in U \\ A_i \neq A_j \text{ dla } i \neq j}} P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

W szczególności dla układu $n$ zdarzeń wzór powyższy musi zachodzić dla każdego naturalnego $k \leqslant n$ i dla każdego podciągu $k$-elementowego.

Zdarzenia, które nie są niezależne, nazywamy <u>zdarzeniami zależnymi</u>.

## § 148. Twierdzenie

Jeśli w danej przestrzeni probabilistycznej mamy dwa układy zdarzeń $U$ i $V$ spełniające warunek

$$U \subset V$$

i jeśli $V$ jest układem zdarzeń niezależnych, to $U$ jest również układem zdarzeń niezależnych.

D| Dowód wynika z definicji (94), ponieważ każdy podciąg układu $U$ jest podciągiem układu $V$.

§ 149. Twierdzenie

Jeśli w danej przestrzeni probabilistycznej mamy układy zdarzeń $V, U_1, \dots, U_n$ spełniające warunek

$$V \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

i jeśli $U_1, \dots, U_n$ są układami zdarzeń niezależnych, to $V$ może nie być układem zdarzeń niezależnych.

D| Twierdzenie udowodnimy przez podanie następującego przykładu.

Dane są cztery kule: czerwona, biała, zielona i czerwono-biało-zielona. Niech $A, B, C$ oznaczają odpowiednio wyciągnięcie kuli z kolorem czerwonym, białym, zielonym. Niech

$$V = \{A, B, C\}$$

$$U_1 = \{A, B\}, \quad U_2 = \{A, C\}, \quad U_3 = \{B, C\}$$

Mamy:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

i wobec tego zdarzenia $A$ i $B$, $A$ i $C$, $B$ i $C$ są parami niezależne. Natomiast

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$$

a zatem zdarzenia $A, B, C$ nie są niezależne.

Widzimy, że chociaż

$$\bigcup_{k=1}^{3} U_k \supset V$$

i $U_1$, $U_2$, $U_3$ są układami zdarzeń niezależnych, to $V$ jest układem zdarzeń zależnych.

§ 150. Twierdzenie

Dla każdego zdarzenia $A$ w danej przestrzeni probabilistycznej $(X, S, P)$ zdarzenia $A$ i $X$ oraz zdarzenia $A$ i $0$ są parami niezależne.

D| $P(A \cap X) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(X)$

$P(A \cap 0) = P(0) = 0 = P(A) \cdot P(0)$

## § 151. Twierdzenie

**Niech $A$ będzie dowolnym zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej $(X, S, P)$. Wtedy**

$\bigwedge_{B \in S}$ $A$ i $B$ **są niezależne** $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ $A$ **jest niezależne samo z sobą** $\Longleftrightarrow P(A) = 0 \vee P(A) = 1$.

D| Wykażemy najpierw, że

$A$ jest niezależne samo z sobą $\Longleftrightarrow P(A) = 0 \vee P(A) = 1$

Istotnie,

$A$ jest niezależne samo z sobą $\Longleftrightarrow P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow P(A) = [P(A)]^2 \Longleftrightarrow P(A) = 0 \vee P(A) = 1$

Pozostaje udowodnić równoważność pierwszą. Jeżeli

$$\bigwedge_{B \in S} A \text{ i } B \quad \text{są niezależne}$$

to w szczególności ma to miejsce dla $B = A$, skąd wynika, że $A$ jest niezależne samo z sobą.

Odwrotnie, jeżeli $P(A) = 0$, to z zależności

$$\bigwedge_{B \in S} A \cap B \subset A$$

wynika, że

$$\bigwedge_{B \in S} 0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(A) = 0$$

a stąd

$$\bigwedge_{B \in S} P(A \cap B) = 0 = P(A) \cdot P(B)$$

czyli

$$\bigwedge_{B \in S} A \text{ i } B \quad \text{są niezależne}$$

Jeżeli natomiast $P(A) = 1$, to

$$\bigwedge_{B \in S} P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

a ponieważ $P(A') = 1 - P(A) = 0$, więc $A'$ i $B$ są niezależne, jak to już udowodniliśmy, i $P(A' \cap B) = 0$. Stąd

$$\bigwedge_{B\in S} p(B) = p(A\cap B) = 1\cdot p(B) = p(A)\cdot p(B)$$

czyli również

$$\bigwedge_{B\in S} A \text{ i } B \text{ są niezależne}$$

§ 152. Twierdzenie

Z] $U$ jest dowolnym układem zdarzeń niezależnych w przestrzeni probabilistycznej $(X, S, P)$.

$U^*$ jest układem otrzymanym z układu $U$ przez zastąpienie dowolnego podzbioru zdarzeń z tego układu zbiorem odpowiadających zdarzeń przeciwnych.

T] $U^*$ jest układem zdarzeń niezależnych.

D] Z założenia dla każdego ciągu $A_1, \ldots, A_k \in U$ $(A_i \neq A_j$ dla $i \neq j)$ jest

$$(*) \qquad p(A_1 \cap \ldots \cap A_k) = p(A_1)\cdot \ldots \cdot p(A_k)$$

Stąd dla każdego $j \in \{1, \ldots, k\}$:

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1} \cap A_j' \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_k) =$$

$$= p(A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_k \cap A_j') =$$

$$= p(A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_k)\, p_{A_1\cap \ldots \cap A_{j-1}\cap A_{j+1}\cap \ldots \cap A_k}(A_j') =$$

$$= p(A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_k)\left[1 - p_{A_1\cap \ldots \cap A_{j-1}\cap A_{j+1}\cap \ldots \cap A_k}(A_j)\right] =$$

$$= p(A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap \ldots \cap A_k) - p(A_1 \cap \ldots \cap A_k) =$$

$$= p(A_1)\cdot \ldots \cdot p(A_{j-1})\, p(A_{j+1})\cdot \ldots \cdot p(A_k) - p(A_1)\cdot \ldots \cdot p(A_k) =$$

$$= p(A_1)\cdot \ldots \cdot p(A_{j-1})\left[1 - p(A_j)\right] p(A_{j+1})\cdot \ldots \cdot p(A_k) =$$

$$= p(A_1)\cdot \ldots \cdot p(A_{j-1})\, p(A_j')\, p(A_{j+1})\cdot \ldots \cdot p(A_k)$$

Stosując otrzymany wzór rekurencyjnie, dochodzimy do wniosku, że po zastąpieniu we wzorze $(*)$ jakichkolwiek spośród zdarzeń $A_1, \ldots, A_k$ odpowiadającymi im zdarzeniami przeciwnymi równość $(*)$ pozostaje prawdziwa. Zatem z niezależności zdarzeń układu $U$ wynika niezależność zdarzeń z układu $U^*$.

§ 153. Twierdzenie

Z] $A, B, A_1, \ldots, A_n$ (lub $A, B, A_1, A_2, \ldots$) są zdarzeniami w przestrzeni probabilistycznej $(X, S, p)$

$$A = A_1 + \ldots + A_n \quad (\text{lub } A = A_1 + A_2 + \ldots)$$

$A_k$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi dla $k = 1, \ldots, n$ (lub $k = 1, 2, \ldots$)

T] $A$ i $B$ są zdarzeniami niezależnymi

D] $p(A \cap B) = p[(A_1 + \ldots + A_n) \cap B] = p(A_1 \cap B + \ldots + A_n \cap B) =$

$= p(A_1 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B) = p(A_1)p(B) + \ldots + p(A_n)\, p(B) =$

$= [p(A_1) + \ldots + p(A_n)]\, p(B) = p(A_1 + \ldots + A_n)p(B) = p(A)p(B)$

W przypadku $A = A_1 + A_2 + \ldots$ dowód jest analogiczny.

Uwaga: Założenia o rozłączności zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ (lub $A_1, A_2, \ldots$) zawartego w sposobie pisania sumy zdarzeń za pomocą znaku +, nie można pominąć, co widać z następującego prostego przykładu. Niech

$X = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\quad p(\{1\}) = \ldots = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$A = \{1, 3, 4\}$ $\quad p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$B = \{1, 5, 6\}$ $\quad p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$C = \{1, 2\}$ $\quad p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Wtedy

$$p(A \cap C) = p(\{1\}) = \frac{1}{6} = p(A) \cdot p(C)$$

$$p(B \cap C) = p(\{1\}) = \frac{1}{6} = p(B) \cdot p(C)$$

Zdarzenia $A$ i $C$ oraz $B$ i $C$ są zatem parami niezależne.

Natomiast

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\} \qquad p(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$$P[(A\cup B)\cap C] = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \neq P(A\cup B)\cdot P(C) = \frac{5}{18}$$

czyli zdarzenia $A\cup B$ i $C$ są zależne.

## § 154. Schemat Bernoulliego

Schematem Bernoulliego nazywamy następujący schemat.

Rozpatrujemy $n$ niezależnych realizacji działania, dla którego rozróżniamy tylko dwa możliwe wyniki: pomyślny albo niepomyślny, z tym że prawdopodobieństwo wyniku pomyślnego jest w każdej realizacji równe $p$. Szukamy prawdopodobieństwa, że na $n$ powyższych realizacji będzie dokładnie $k$ sukcesów, czyli wyników pomyślnych $(0\leqslant k\leqslant n)$.

Rozwiązanie:

Za przestrzeń zdarzeń elementarnych $X$ przyjmujemy zbiór $2^n$ możliwych ciągów $n$-elementowych, których wyrazami mogą być tylko 0 lub 1, z tym że 1 na $j$-tym miejscu oznacza, że $j$-ta realizacja dała wynik pomyślny, a 0 na $j$-tym miejscu oznacza, że $j$-ta realizacja dała wynik niepomyślny $(j = 1,\ldots,n)$. Możemy zatem napisać

$$X = \{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{n\ razy},\ (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1\ razy},1),\ldots,\ \underbrace{(1,\ldots,1)}_{n\ razy}\}$$

Niech $A_j$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że w $j$-ej realizacji wynik jest pomyślny, a $A_j'$ zdarzenie, że w $j$-ej realizacji wynik jest niepomyślny $(j = 1,\ldots,n)$. Wynika stąd, że $A_j$ jest zbiorem tych wszystkich ciągów z przestrzeni $X$, których $j$-ty wyraz jest 1, a $A_j'$ jest zbiorem tych wszystkich ciągów z przestrzeni $X$, których $j$-ty wyraz jest 0. Z założenia $P(A_j) = p$ dla $j = 1,\ldots,n$.

Niech $B_k$ oznacza zdarzenie polegające na uzyskaniu dokładnie $k$ sukcesów na $n$ realizacji. Mamy

$$B_k = \sum_{E} A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\cap A'_{i_{k+1}}\cap,\ldots\cap A'_{i_n}$$

gdzie

$$E = \{(i_1,\ldots,i_n) : \{i_1,\ldots,i_n\} = \{1,\ldots,n\} \wedge i_1<\ldots<i_k \wedge i_{k+1}<\ldots<i_n\}$$

Zbiór $E$ zawiera

(95) $$\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

ciągów. Istotnie, wszystkich możliwych ciągów $i_1, \ldots, i_n$ utworzonych z liczb $1, \ldots, n$ jest $n!$, ponieważ na obsadzenie pierwszego wyrazu ciągu mamy $n$ możliwości, dla każdej z nich na obsadzenie drugiego wyrazu ciągu już tylko $n-1$ możliwości, dla każdej pary pierwszych dwu wyrazów ciągu na obsadzenie trzeciego wyrazu ciągu $n-2$ możliwości itd., aż na obsadzenie ostatniego wyrazu ciągu pozostaje tylko 1 możliwość. W ten sposób liczba możliwych ciągów jest $n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Również liczba możliwych ciągów $i_1, \ldots, i_k$ jest $k!$, a liczba możliwych ciągów $i_{k+1}, \ldots, i_n$ jest $(n-k)!$ Ponieważ z każdych $k!$ ciągów różniących się jedynie uporządkowaniem wyrazów $i_1, \ldots, i_k$ włączamy do zbioru $E$ tylko jeden, a mianowicie spełniający warunek $i_1 < \ldots < i_k$, oraz z każdych $(n-k)!$ ciągów różniących się jedynie uporządkowaniem wyrazów $i_{k+1}, \ldots, i_n$ włączamy do zbioru $E$ tylko jeden, a mianowicie spełniający warunek $i_{k+1} < \ldots < i_n$, wobec tego liczba ciągów w zbiorze $E$ redukuje się do podanej wzorem (95).

Na mocy założonej niezależności zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ i na mocy twierdzenia § 152 zdarzenia $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, $A'_{i_{k+1}}, \ldots, A'_{i_n}$ są niezależne i wobec tego

$$P(B_k) = \sum_E P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A'_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap A'_{i_n}) =$$

$$= \sum_E P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \cdot P(A'_{i_{k+1}}) \cdot \ldots \cdot P(A'_{i_n}) =$$

$$= \sum_E p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Czasem piszemy wyraźniej

$$P_n(B_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

lub upraszczamy zapis do postaci

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{96}$$

Wzór (96) nosi nazwę wzoru Bernoulliego.

## § 155. Przykłady

I. Strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem $p = 0,9$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a) na 10 strzałów trafi dokładnie 6 razy,

b) na $n$ strzałów trafi za każdym strzałem,

c) na $n$ strzałów trafi co najmniej jeden raz.

Rozwiązanie:

Ad a): Według wzoru (96)

$$P_{10}(6) = \binom{10}{6} 0{,}9^6 \cdot 0{,}1^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \cdot 0{,}531441 \cdot 0{,}0001$$

$$= 210 \cdot 0{,}0000531441 = 0{,}011160261 \approx 0{,}0112$$

Ad b):

$$P_n(n) = \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 = \frac{n!}{n!\,0!}\, p^n = p^n$$

Ad c): Zdarzenie polegające na trafieniu co najmniej jeden raz jest zaprzeczeniem zdarzenia polegającego na nietrafieniu ani razu, którego prawdopodobieństwo na mocy (96) jest równe

$$P_n(0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = \frac{n!}{0!\,n!}(1-p)^n = (1-p)^n$$

Wobec tego szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$1 - (1-p)^n$$

II. Zbiór zawiera $N$ elementów, w tym $K$ dobrych, a $N-K$ złych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągając z tego zbioru $n$ razy po jednym elemencie, za każdym razem po oglądnięciu zwracając go do zbioru, napotkamy dokładnie $k$ elementów dobrych, jeśli prawdopodobieństwo wyciągnięcia jest dla wszystkich elementów to samo, a elementy wybieramy w sposób przypadkowy?

Rozwiązanie:

Mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego dla $p = \frac{K}{N}$. Na mocy wzoru (96) otrzymujemy

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \frac{K^k}{N^k}\left(1-\frac{K}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{K^k(N-K)^{n-k}}{N^n} \tag{97}$$

## § 156. Schemat hipergeometryczny

Schematem hipergeometrycznym nazywamy schemat następujący. Zbiór zawiera $N$ elementów, w tym $K$ dobrych i $N-K$ złych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągając z tego zbioru w sposób przypadkowy $n$ elementów (nie zwracając ich po obejrzeniu do zbioru) napotkamy dokładnie $k$ elementów dobrych? $(1 \leq n \leq N;\ k \leq n:, k \leq K)$.

Rozwiązanie:

Ponumerujmy elementy zbioru w ten sposób, aby elementy dobre miały numery od 1 do $K$, a złe od $K+1$ do $N$. Jako przestrzeń zdarzeń elementarnych $X$ przyjmijmy zbiór wszystkich ciągów $n$-elementowych złożonych z numerów możliwych do wyciągnięcia elementów. Przestrzeń $X$ składa się zatem z

$$N(N-1)\ \dots\ (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

ciągów, w których numery nie mogą się powtarzać (por. przykład z § 143). Zakładamy równe prawdopodobieństwa dla wszystkich ciągów. Niech $B_{i_1,\dots,i_k}$ oznacza wyciągnięcie $n$ elementów, w tym $k$ dobrych, w ten sposób, że dobre elementy zostały wyciągnięte za $i_1,\dots,i_k$ razem $(i_1 < \dots < i_k)$. Interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia

$$B_k = \sum_E B_{i_1,\dots,i_k}$$

gdzie

$$E = \left\{ (i_1,\dots, i_k) : \left\{ i_1,\dots, i_k \right\} \subset \left\{ 1,\dots, n \right\} \wedge i_1 < \dots < i_k \right\}$$

Analogicznie jak w § 143 obliczamy, że zbiór $E$ zawiera

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

ciągów. Mamy na mocy definicji zbiorów $B_{i_1,\dots,i_k}$

$$p(B_{i_1,\dots,i_k}) = \frac{1}{\frac{N!}{(N-n)!}} \Big( (N-K)(N-K-1)\dots$$

$$\dots(N-K-i_1+2)K(N-K-i_1+1)\dots(N-K-i_2+2)(K-1)(N-K-i_2+1)\dots$$

$$\dots(N-K-i_k+2)(K-k+1)(N-K-i_k+1)\ \dots\ (N-K-n+k+1)\Big) =$$

$$= \frac{(N-K)(N-K-1)\ \dots\ (N-K-n+k+1)K(K-1)\ \dots\ (K-k+1)}{\frac{N!}{(N-n)!}} =$$

$$= \frac{(N-K)!\ K!\ (N-n)!}{(N-K-n+k)!\ (K-k)!\ N!}$$

Wobec tego

$$p(B_{k.}) = \sum_{\varepsilon} p(B_{i_1,\ldots,i_k}) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(N-K)!\,K!\,(N-n)!}{(N-K-n+k)!\,(K-k)!\,N!}$$

co można napisać w postaci

$$(98) \qquad P_n(k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Gdy $N$, $K$ i $N-K$ są duże w porównaniu do $n$, $k$ i $n-k$, wzory (97) i (98) dają wyniki zbliżone. Istotnie, wzór (98) można przekształcić do postaci

$$P_n(k) = \binom{n}{k}\frac{(N-n)!\,K!\,(N-K)!}{(K-k)!\,(N-K-n+k)!\,N!} =$$

$$= \binom{n}{k}\frac{K(K-1)\,\ldots\,(K-k+1)(N-K)(N-K-1)\ldots\,(N-K-n+k+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)} =$$

$$= \binom{n}{k}\frac{K^k(N-K)^{n-k}}{N^n}\;\frac{\left(1-\frac{1}{K}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{K}\right)\left(1-\frac{1}{N-K}\right)\ldots\left(1-\frac{n-k-1}{N-K}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)} \approx$$

$$\approx \binom{n}{k}\frac{K^k(N-K)^{n-k}}{N^n}$$

Błąd względny przybliżenia jest równy

$$\varepsilon = \left|\,1 - \frac{\left(1-\frac{1}{K}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{K}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{N-K}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-k-1}{N-K}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}\right|$$

## § 157. Przykład

Partia towaru na 100 sztuk zawiera 3 sztuki wadliwe. Pobrano próbkę złożoną z 10 sztuk. Jakie jest prawdopodobieństwo, że próbka będzie zawierać 1 sztukę wadliwą: a) w przypadku, gdy próbkę pobieramy ze zwracaniem obejrzanej sztuki z powrotem do partii towaru, b) w przypadku bez zwracania. Zakładamy losowe pobieranie próbki i jednakowe prawdopodobieństwa wyciągnięcia dla wszystkich elementów pozostających w partii towaru.

Rozwiązanie:

a) Według wzoru (97) mamy

$$p_{10}(1) = \binom{10}{1} \frac{3^1 \cdot 97^9}{100^{10}} = 0,3 \cdot 0,97^9 \approx 0,228$$

b) Według wzoru (98) mamy

$$p_{10}(1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{10 \cdot \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{90 \cdot 89}{10 \cdot 33 \cdot 98} = \frac{267}{1078} \approx 0,248$$

## § 158. Uogólnienie schematu Bernoulliego

Rozpatrujemy $n$ niezależnych realizacji działania, dla którego w każdej realizacji rozróżnia się $m$ możliwych wyników $A_1, \dots, A_m$ tworzących pełny układ zdarzeń i występujących odpowiednio z prawdopodobieństwami $p_1, \dots, p_m$ $(p_1 + \dots + p_m = 1)$. Szukane jest prawdopodobieństwo, że na danych $n$ realizacji wystąpi $k_1$ razy wynik $A_1, \dots, k_m$ razy wynik $A_m$ $(k_1 + \dots + k_m = n)$.

Rozwiązanie:

Za przestrzeń zdarzeń elementarnych $X$ przyjmujemy zbiór $m^n$ możliwych ciągów $n$-elementowych, których wyrazami mogą być liczby całkowite $1, \dots, m$, z tym że liczba będąca $j$-tym wyrazem ciągu wskazuje numer wyniku w $j$-tej realizacji $(j = 1, \dots, n)$. Możemy zatem napisać

$$X = \Big\{ \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n \text{ razy}}, \ \underbrace{(1, \dots, 1}_{n-1 \text{ razy}}, 2), \ \dots, \ \underbrace{(m, \dots, m)}_{n \text{ razy}} \Big\}$$

Niech $A_{ij}$ oznacza zdarzenie polegające na tym, że w $j$-tej realizacji występuje $i$-ty wynik $A_i$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$. Niech $B_{k_1, \dots, k_m}$ oznacza zdarzenie, polegające na tym, że wynik $A_1$ wystąpił $k_1$ razy, ..., wynik $A_m$ wystąpił $k_m$ razy $(k_1 + \dots + k_m = n)$.

Jak z powyższego wynika, $A_{ij}$ jest zbiorem tych wszystkich ciągów z przestrzeni $X$, których $j$-ty wyraz jest równy $i$. Z założenia jest

$$(*) \qquad p(A_{ij}) = p_i \qquad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n)$$

$$p_1 + \dots + p_m = 1$$

Mamy

$$B_{k_1, \dots, k_m} = \sum_E A_{1 i_1} \cap \dots \cap A_{1 i_{k_1}} \cap A_{2 i_{k_1+1}} \cap \dots \cap A_{2 i_{k_1+k_2}} \cap \dots \cap \dots \cap A_{m i_n}$$

gdzie

$$E = \left\{ (i_1, \ldots, i_n) : \{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\} \wedge i_1 < \ldots < i_{k_1} \wedge i_{k_1+1} < \ldots \right.$$
$$\left. \ldots < i_{k_1+k_2} \wedge \ldots \wedge i_{k_1+\ldots+k_{n-1}+1} < \ldots < i_n \right\}$$

Rozumując analogicznie jak w § 154 dochodzimy do wniosku, że liczba różnych ciągów w zbiorze $E$ jest równa

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$$

Na mocy (*) i założonej niezależności danych realizacji otrzymujemy

$$p(B_{k_1,\ldots,k_m}) = \sum_E p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}\, p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

Wzór ten zapiszemy w postaci uproszczonej

$$(99) \qquad p_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}\, p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

$$(k_1 + \ldots + k_m = n;\ p_1 + \ldots p_m = 1)$$

Dla $m = 2$ mamy $k_2 = n - k_1$ i $p_2 = 1 - p_1$ i otrzymujemy z (99) wzór Bernoulliego (96).

## § 159. Przykład

Rzucamy 20 razy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucimy 2 razy 6 oczek, 4 razy 5 oczek, 8 razy 4 oczka?

Rozwiązanie:

Niech $A_1$ oznacza wyrzucenie 6 oczek, $A_2$ wyrzucenie 5 oczek, $A_3$ wyrzucenie 4 oczek, a $A_4$ wyrzucenie mniej niż 4 oczek. Wobec tego

$$p_1 = P(A_1) = \frac{1}{6}, \qquad k_1 = 2,$$

$$p_2 = P(A_2) = \frac{1}{6}, \qquad k_2 = 4,$$

$$p_3 = P(A_3) = \frac{1}{6}, \qquad k_3 = 8,$$

$$p_4 = P(A_4) = \frac{1}{2}, \qquad k_4 = 6$$

i według wzoru (99)

$$p_{20}(2,4,8,6) = \frac{20!}{2!\ 4!\ 8!\ 6!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0,000348$$