

## SKOROWIDZ NAZW

(Liczby oznaczają stronicę)

Addytywna funkcja figury elementarnej lewostronnie domkniętej 83

- - przedziału lewostronnie domkniętego 78

- - zbioru 77

Alternatywa 4

A priori prawdopodobieństwo 161

A posteriori prawdopodobieństwo 161

Argument funkcji 13

Bayesa reguła 161

- wzór 161

Bernoulliego schemat 168

- - uogólniony 173

- wzór 169

Borelowski zbiór 51

Borelowskich zbiorów ciało 51

Całkowite prawdopodobieństwo 161

Carathéodory'ego miara zewnętrzna 100

- twierdzenie 101

Ciało przeliczalnie addytywne zbiorów 26

Ciało zbiorów 25

Ciało zbiorów borelowskich 51

Ciało zdarzeń 129

Ciąg 14

-  $k$ -elementowy 15

- liczbowy 16

- - malejący 16

- - monotoniczny 16

- - niemalejący 16

- - nierosnący 16

- - rosnący 16

- monotoniczny zbiorów 15

- nieskończony 14

- skończony 15

- Ciąg wstępujący zbiorów 15
  - zbiorów 15
  - zstępujący zbiorów 15
- Ciągła funkcja rzeczywista 56
  - lewostronnie funkcja rzeczywista 56
  - prawostronnie funkcja rzeczywista 56
- Ciągu liczbowego granica 39
  - - - dolna 37
  - - - górna 37
  - punktów granica w przestrzeni metrycznej 42
  - - - -  $\mathcal{K}_0^n$  54
  - zbiorów granica 39
  - - - dolna 36
  - - - górna 36
- Co najwyżej przeliczalna przestrzeń probabilistyczna 148
- Co najwyżej przeliczalny zbiór 18
- Części normalne przedziału 64
- Dolny kres 32
- Dolna granica ciągu liczbowego 37
  - - - zbiorów 36
- Domknięcie zbioru 43
- Domknięty lewostronnie przedział 57
  - prawostronnie przedział 57
  - przedział 57
  - zbiór 47
- Dopełnienie zbioru 21
- Dystrybuanta 88
  - miary 114
  - $n$ -wymiarowa 88
  - $n$ -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa 149
  - rozkładu prawdopodobieństwa 149
  - - - w przestrzeni probabilistycznej euklidesowej 149
- Dziedzina funkcji 13
- Elementarna figura 65
  - - lewostronnie domknięta 67
- Elementarne figury nie zachodzące na siebie 66
- Elementarnej figury lewostronnie domkniętej funkcja addytywna 83



Elementarne zdarzenie 129

Elementarnych zdarzeń przestrzeni 129

Euklidesowa przestrzeń  $n$ -wymiarowa 51

Euklidesowa przestrzeń probabilistyczna 149

- - -  $n$ -wymiarowa 149

Figura elementarna 65

- - lewostronnie domknięta 67

Figury elementarnej lewostronnie domkniętej funkcja addytywna 83

Figury elementarne nie zachodzące na siebie 66

Funkcja 13

- addytywna figury elementarnej lewostronnie domkniętej 83

- - przedziału lewostronnie domkniętego 78

- - zbioru 77

- malejąca 17

- monotoniczna 17

- niemalejąca 17

- nierosnąca 17

-  $n$ -wymiarowo niemalejąca 59

-  $n$ -zmiennych 16

- odwracalna 14

- odwrotna 14

- rosnąca 17

- różnowartościowa 14

- rzeczywista 17

- - ciągła 56

- - - w punkcie 56

- - lewostronnie ciągła 56

- - - - w punkcie 56

- - ograniczona 17

- - prawostronnie ciągła 56

- - - - w punkcie 56

- - skończona 17

- - zbioru 17

- - - monotoniczna 17

- - - niemalejąca 17

- - - nierosnąca 17

- - - skończona 17

- zbioru addytywna 77

- - przeliczalnie addytywna 35

- Funkcja zdaniowa 6
- Funkcji przyrost 59
  - - w przedziale 59
  - rzeczywistej granica w punkcie 55
  - - lewostronna granica w punkcie 55
  - - prawostronna granica w punkcie 55
- Górna granica ciągu liczbowego 37
  - - - zbiorów 36
- Górny kres 32
- Granica ciągu liczbowego 39
  - - punktów w przestrzeni metrycznej 42
  - - - -  $\mathcal{R}_0^n$  54
  - - zbiorów 39
  - dolna ciągu liczbowego 37
  - - - zbiorów 36
  - funkcji rzeczywistej w punkcie 55
  - górna ciągu liczbowego 37
  - - - zbiorów 36
  - lewostronna funkcji rzeczywistej w punkcie 55
  - prawostronna funkcji rzeczywistej w punkcie 55
- Hipergeometryczny schemat 170
- Iloczyn zbiorów 21
- Implikacja 3
- Infimum 32
- Inkluzja zbiorów 11
- Kartezjański produkt 16
- $k$ -elementowy zbiór 18
- Klasa zbiorów 11
- Koniunkcja 4
- Końce przedziału 57
- Kres dolny 32
  - górny 32
- Kwantyfikator 7
- Lebesgue'a miara 120
  - - w przestrzeni  $\mathcal{R}^n$  120
  - - zewnętrzna 117
- Lewostronna granica funkcji rzeczywistej w punkcie 55
  - ściana przedziału 58



Lewostronnie ciągła funkcja rzeczywista 56

- domknięta figura elementarna 67
- domkniętego przedziału funkcja addytywna 78
- - - podział normalny 63
- domkniętej figury elementarnej funkcja addytywna 83
- domknięty przedział 57

Liczba nieskończona 16

- skończona 16

Liczbowy ciąg 16

Limes inferior 36

- superior 36

Malejąca funkcja 17

Malejący ciąg liczbowy 16

Maksimum 35

Metryczna przestrzeń 41

Metryka 41

Miara 96

- Lebesgue'a 120
- - w przestrzeni  $\mathcal{R}^n$  120
- półskończona 99
- skończona 99
- unormowana 97
- względem zbioru 127
- zewnętrzna Caratheodory'ego 100
- - Lebesgue'a 117
- zredukowana do zbioru 128

Miary dystrybuanta 114

- półskończonej zbiór 99

Mierzalny zbiór 100

- - w sensie Lebesgue'a 120

Minimum 35

Moc zbioru 18

Monotoniczna funkcja 17

- - rzeczywista zbioru 17

Monotoniczny ciąg liczbowy 16

- - zbiorów 15

Morgana (de) wzory 24

- Nadzbior 11
- Negacja zdania 3
- Niemalejąca funkcja 17
  - - rzeczywista zbioru 17
  - $n$ -wymiarowo funkcja 59
- Niemalejący ciąg liczbowy 16
- Nieosiągalne zdarzenie 129
- Nieograniczony przedział 57
- Nieprzeliczalny zbiór 18
- Nierosnąca funkcja 17
  - - rzeczywista zbioru 17
- Nierosnący ciąg liczbowy 16
- Nieskończona liczba 16
- Nieskończony zbiór 18
- Nie zachodzące na siebie figury elementarne 66
  - - - przedziały 58
- Niezależne zdarzenia 162
- Normalne części przedziału 64
- Normalny podział przedziału lewostronnie domkniętego 63
- $n$ -ty wyraz ciągu 15
- $n$ -wymiarowa dystrybucja 88
  - przestrzeń euklidesowa 51
  - - probabilistyczna euklidesowa 149
- $n$ -wymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa dystrybucja 149
- $n$ -wymiarowo niemalejąca funkcja 59
- Objętość 117
- Obraz 14
- Odległość punktów 41
  - punktu od zbioru 41
- Odstęp 42
- Odwzorowanie 13
  - jedno-jednoznaczne 14
- Ograniczona funkcja rzeczywista 17
- Ograniczony przedział 57
  - zbiór 41
- Otwarty przedział 57
  - zbiór 47
- Pełny układ zdarzeń 131



- Pewne zdarzenie 129
- Podzbiór 11
- Podział normalny przedziału lewostronnie domkniętego 63
- Pokrycie zbioru 25
- Półskończona miara 99
- Półskończonej miary zbiór 99
- Prawdopodobieństwo 129
  - a posteriori 161
  - a priori 161
  - całkowite 161
  - warunkowe 156
- Prawdopodobieństwa rozkład 129
- Prawie niemożliwe zdarzenie 131
- Prawie pewne zdarzenie 131
- Prawostronna granica funkcji rzeczywistej w punkcie 55
  - ściana przedziału 58
- Prawostronnie ciągła funkcja rzeczywista 56
  - domknięty przedział 57
- Probabilistyczna przestrzeń 129
  - - co najwyżej przeliczalna 148
  - - euklidesowa 149
  - - -  $n$ -wymiarowa 149
  - - prosta 152
  - - przeliczalna 143
  - - skończona 132
  - - zredukowana do zdarzenia 156
- Produkt kartezjański 16
- Prosta przestrzeń probabilistyczna 152
- Przeciwdziedzina 13
- Przeciwnie zdarzenie 130
- Przeciwobraz 14
- Przedział 56
  - domknięty 57
  - lewostronnie domknięty 57
  - nieograniczony 57
  - ograniczony 57
  - otwarty 57
  - prawostronnie domknięty 57
  - wymierny 57

Przedział zdegenerowany 58

Przedziału części normalne 64

- końce 57
- lewostronnie domkniętego funkcja addytywna 78
- - - podział normalny 63
- ściana 58
- - lewostronna 58
- - prawostronna 58

Przedziały nie zachodzące na siebie 58

Przekształcenie 13

Przeliczalna przestrzeń probabilistyczna 143

Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru 85

- addytywne ciało zbiorów 26

Przeliczalny zbiór 18

Przestrzeń 12

- euklidesowa 51
- -  $n$ -wymiarowa 51
- metryczna 41
- probabilistyczna 129
- - co najwyżej przeliczalna 148
- - euklidesowa 149
- - -  $n$ -wymiarowa 149
- - prosta 152
- - przeliczalna 143
- - skończona 132
- - zredukowana do zdarzenia 156

Przestrzeń  $\mathfrak{N}_0^n$  53

- zdarzeń elementarnych 129
- z miarą 100
- - unormowaną 100
- zupełna 50

Przyrost funkcji 59

- - na przedziale 59

Pseudo- $\sigma$ -ciało zbiorów 28

Punkt 10

Punktu współrzędne 51

Pusty zbiór 12

Reguła Bayesa 161

Rodzina zbiorów 14



- Rosnąca funkcja 17  
 Rosnący ciąg liczbowy 16  
 Rozkład prawdopodobieństwa 129  
 Rozkładu prawdopodobieństwa dystrybuanta 149  
 Rozłączne zbiory 22  
 Równość elementów 11  
     - zbiorów 11  
 Równoważność zdań 4  
 Różnica zbiorów 21  
 Rzeczywista funkcja 17  
     - - ciągła 56  
     - - - w punkcie 56  
     - - lewostronnie ciągła 56  
     - - - - w punkcie 56  
     - - ograniczona 17  
     - - prawostronnie ciągła 56  
     - - - - w punkcie 56  
     - - skończona 17  
     - - zbioru 17  
     - - - monotoniczna 17  
     - - - niemalejąca 17  
     - - - nierosnąca 17  
     - - - skończona 17  
 Rzeczywistej funkcji granica lewostronna w punkcie 55  
     - - - prawostronna w punkcie 55  
     - - - w punkcie 55  
 Schemat Bernoulliego 168  
     - hipergeometryczny 170  
     - uogólniony Bernoulliego 173  
 $\sigma$ -ciało 26  
 Skończona funkcja rzeczywista 17  
     - - - zbioru 17  
     - liczba 16  
     - miara 99  
     - przestrzeń probabilistyczna 132  
 Skończony zbiór 18  
 Suma zbiorów 21  
 Supremum 32



- Ściana lewostronna przedziału 58
  - prawostronna przedziału 58
  - przedziału 58
- Średnica zbioru 41
- Teza 9
- Twierdzenie Carathéodory'ego 101
- Układ pełny zdarzeń 131
- Unormowana miara 97
- Uogólniony schemat Bernoulliego 173
- Wartość funkcji 13
- Warunek 6
- Warunek Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej 49
- Warunkowe prawdopodobieństwo 156
- Wnętrze zbioru 46
- Współrzędne punktu 51
- Wstępujący ciąg zbiorów 15
- Wymierny przedział 57
- Wyraz ciągu 15
- Względem zbioru miara 127
- Wzory de Morgana 24
- Wzór Bayesa 161
  - Bernoulliego 169
  - na prawdopodobieństwo całkowite 161
- Zależne zdarzenia 163
- Założenie 9
- Zbiorów borelowskich ciało 51
  - ciało 25
  - - przeliczalnie addytywne 26
  - iloczyn 21
  - pseudo- $\sigma$ -ciało 28
  - różnica 21
  - suma 21
- Zbioru domknięcie 43
  - dopełnienie 21
  - funkcja addytywna 77
    - - przeliczalnie addytywna 85
    - - rzeczywista 17



Zbioru funkcja rzeczywista monotoniczna 17

- - - niemalejąca 17
- - - nierosnąca 17
- - - skończona 17
- pokrycie 25
- średnica 41
- wnętrze 46

Zbiory rozłączne 22

- tej samej mocy 18

Zbiór borelowski 51

- co najwyżej przeliczalny 18
- domknięty 47
- $k$ -elementowy 18
- miary półskończonej 99
- mierzalny 100
- - w sensie Lebesgue'a 120
- mocy continuum 20
- nieprzeliczalny 18
- nieskończony 18
- ograniczony 41
- otwarty 47
- przeliczalny 18
- pusty 12
- skończony 18

Zdania równoważne 4

Zdarzenia elementarne 129

- niezależne 162
- zależne 163

Zdarzenie 129

- niemożliwe 129
- pewne 129
- prawie niemożliwe 131
- - pewne 131
- przeciwne 130

Zdarzeń ciało 129

- elementarnych przestrzeni 129
- pełny układ 131

Zdegenerowany przedział 58

Zewnętrzna miara Carathéodory'ego 100

- - Lebesgue'a 117

Zredukowana do zbioru miara 128

- do zdarzenia przestrzeń probabilistyczna 156

Zstępujący ciąg zbiorów 15

Zupełna przestrzeń 50





# SPIS TREŚCI

I. ZBIORY I FUNKCJE . . . . .	3
§ 1. Symbolika logiczna . . . . .	3
§ 2. Zbiór i jego elementy . . . . .	10
§ 3. Inkluzja zbiorów . . . . .	11
§ 4. Równość zbiorów . . . . .	11
§ 5. Zbiór pusty . . . . .	12
§ 6. Przestrzeń . . . . .	12
§ 7. Funkcja . . . . .	13
§ 8. Ciąg . . . . .	14
§ 9. Produkt kartezjański . . . . .	16
§ 10. Funkcja $n$ zmiennych . . . . .	16
§ 11. Funkcja rzeczywista . . . . .	17
§ 12. Moc zbioru . . . . .	18
§ 13. Twierdzenie . . . . .	18
§ 14. Twierdzenie . . . . .	19
§ 15. Twierdzenie . . . . .	20
§ 16. Twierdzenie . . . . .	20
§ 17. Zbiory mocy continuum . . . . .	20
§ 18. Działania na zbiorach . . . . .	21
§ 19. Zbiory rozłączne . . . . .	22
§ 20. Podstawowe wzory algebry zbiorów . . . . .	23
§ 21. Wzory de Morgana . . . . .	24
§ 22. Pokrycie zbioru . . . . .	25
§ 23. Ciało zbiorów . . . . .	25
§ 24. $\sigma$ -ciało . . . . .	26
§ 25. Klasa $QIB$ zbiorów . . . . .	27
§ 26. Twierdzenie . . . . .	27
§ 27. Twierdzenie . . . . .	27
§ 28. Twierdzenie . . . . .	28
§ 29. Pseudo- $\sigma$ -ciało zbiorów . . . . .	28
§ 30. Klasa $\mathcal{I}_p$ zbiorów . . . . .	29
§ 31. Twierdzenie . . . . .	30
§ 32. Twierdzenie . . . . .	30
§ 33. Twierdzenie . . . . .	31

§ 34. Kres górny i kres dolny . . . . .	32
§ 35. Maksimum i minimum . . . . .	35
§ 36. Twierdzenie . . . . .	35
§ 37. Twierdzenie . . . . .	36
§ 38. Twierdzenie . . . . .	36
§ 39. Granica górna i granica dolna ciągu . . . . .	36
§ 40. Twierdzenie . . . . .	37
§ 41. Twierdzenie . . . . .	38
§ 42. Twierdzenie . . . . .	38
§ 43. Twierdzenie . . . . .	39
§ 44. Granica ciągu . . . . .	39
§ 45. Twierdzenie . . . . .	39
§ 46. Twierdzenie . . . . .	40
§ 47. Przestrzeń metryczna . . . . .	41
§ 48. Średnica zbioru . . . . .	41
§ 49. Odległość punktu od zbioru. Odstęp dwu zbiorów . . . . .	41
§ 50. Granica ciągu punktów w przestrzeni metrycznej . . . . .	42
§ 51. Domknięcie zbioru . . . . .	43
§ 52. Wnętrze zbioru . . . . .	46
§ 53. Zbiór domknięty . . . . .	47
§ 54. Zbiór otwarty . . . . .	47
§ 55. Twierdzenie . . . . .	48
§ 56. Twierdzenie . . . . .	48
§ 57. Twierdzenie . . . . .	48
§ 58. Twierdzenie . . . . .	48
§ 59. Twierdzenie . . . . .	49
§ 60. Twierdzenie . . . . .	49
§ 61. Zbiory $G_\delta$ i zbiory $F_\sigma$ . . . . .	49
§ 62. Warunek Cauchy'ego . . . . .	49
§ 63. Twierdzenie . . . . .	50
§ 64. Przestrzeń zupełna . . . . .	50
§ 65. Ciało zbiorów borelowskich . . . . .	51
§ 66. Przestrzeń euklidesowa $\mathcal{R}^n$ . . . . .	51
§ 67. Twierdzenie . . . . .	52
§ 68. Twierdzenie . . . . .	53
§ 69. Twierdzenie . . . . .	53
§ 70. Przestrzeń $\mathcal{R}_0^n$ . . . . .	53
§ 71. Granica ciągu punktów w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . . . .	54
§ 72. Granica lewostronna i granica prawostronna funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . . . .	55



§ 73. Granica funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . .	55
§ 74. Ciągłość lewostronna i ciągłość prawostronna funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . . . .	56
§ 75. Ciągłość funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . .	56
§ 76. Przedziały w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ . . . . .	56
§ 77. Przyrost funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ . . .	59
§ 78. Twierdzenie . . . . .	59
§ 79. Twierdzenie . . . . .	60
§ 80. Twierdzenie . . . . .	62
§ 81. Twierdzenie . . . . .	63
§ 82. Twierdzenie . . . . .	63
§ 83. Podział normalny przedziału lewostronnie domkniętego . . . .	63
§ 84. Twierdzenie . . . . .	64
§ 85. Figury elementarne . . . . .	65
§ 86. Twierdzenie . . . . .	66
§ 87. Ciało $Q$ figur elementarnych lewostronnie domkniętych . . . .	67
§ 88. Twierdzenie . . . . .	68
§ 89. Twierdzenie . . . . .	69
§ 90. Twierdzenie . . . . .	69
§ 91. Twierdzenie . . . . .	70
§ 92. Twierdzenie . . . . .	73
§ 93. Twierdzenie . . . . .	73
§ 94. Zbiory borelowskie w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ . . . . .	75
II. MIARA . . . . .	77
§ 95. Addytywna funkcja zbioru . . . . .	77
§ 96. Funkcja addytywna przedziału lewostronnie domkniętego . . . .	78
§ 97. Twierdzenie . . . . .	80
§ 98. Funkcja addytywna figury elementarnej lewostronnie domkniętej	83
§ 99. Twierdzenie . . . . .	83
§ 100. Przeliczalnie addytywna funkcja zbioru . . . . .	85
§ 101. Twierdzenie . . . . .	85
§ 102. Własności przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru . . . . .	86
§ 103. Dystrybuanta . . . . .	88
§ 104. Twierdzenie . . . . .	90
§ 105. Miara . . . . .	96
§ 106. Miara unormowana . . . . .	97
§ 107. Miara skończona i miara półskończona . . . . .	99
§ 108. Twierdzenie . . . . .	99
§ 109. Przestrzeń z miarą . . . . .	100
§ 110. Miara zewnętrzna Carathéodory'ego . . . . .	100

§ 111. Twierdzenie Carathéodory'ego . . . . .	101
§ 112. Twierdzenie o rozszerzaniu funkcji przeliczalnie addytywnej do miary . . . . .	106
§ 113. Dystrybuanta miary w przestrzeni euklidesowej . . . . .	114
§ 114. Twierdzenie . . . . .	114
§ 115. Twierdzenie . . . . .	116
§ 116. Miara zewnętrzna Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej . . . . .	117
§ 117. Twierdzenie . . . . .	118
§ 118. Miara Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej . . . . .	120
§ 119. Twierdzenie . . . . .	120
§ 120. Twierdzenie . . . . .	124
§ 121. Twierdzenie . . . . .	126
§ 122. Miara względem zbioru i miara zredukowana do zbioru . . . . .	127
 III. PRAWDOPODOBIENSTWO . . . . .	 129
§ 123. Przestrzeń probabilistyczna . . . . .	129
§ 124. Własności prawdopodobieństwa . . . . .	130
§ 125. Zdarzenia prawie pewne i zdarzenia prawie niemożliwe . . . . .	131
§ 126. Pełny układ zdarzeń . . . . .	131
§ 127. Twierdzenie . . . . .	132
§ 128. Przestrzeń probabilistyczna skończona . . . . .	132
§ 129. Twierdzenie . . . . .	135
§ 130. Przykłady . . . . .	135
§ 131. Paradoxy rachunku prawdopodobieństwa . . . . .	137
§ 132. Przykład paradoksu . . . . .	137
§ 133. Prawdopodobieństwo jako miara zależna od naszej informacji o zdarzeniu . . . . .	141
§ 134. Różnorodność modeli probabilistycznych . . . . .	142
§ 135. Przestrzeń probabilistyczna przeliczalna . . . . .	143
§ 136. Przykład . . . . .	148
§ 137. Przestrzeń probabilistyczna euklidesowa . . . . .	149
§ 138. Przestrzeń probabilistyczna prosta . . . . .	152
§ 139. Przykłady . . . . .	152
§ 140. Prawdopodobieństwo warunkowe . . . . .	156
§ 141. Przykład . . . . .	156
§ 142. Prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń . . . . .	157
§ 143. Przykłady . . . . .	157
§ 144. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite . . . . .	160
§ 145. Wzór Bayesa . . . . .	161
§ 146. Przykład . . . . .	162



§ 147. Zdarzenia niezależne . . . . .	162
§ 148. Twierdzenie . . . . .	163
§ 149. Twierdzenie . . . . .	164
§ 150. Twierdzenie . . . . .	164
§ 151. Twierdzenie . . . . .	165
§ 152. Twierdzenie . . . . .	166
§ 153. Twierdzenie . . . . .	167
§ 154. Schemat Bernoulliego . . . . .	168
§ 155. Przykłady . . . . .	169
§ 156. Schemat hipergeometryczny . . . . .	170
§ 157. Przykład . . . . .	172
§ 158. Uogólnienie schematu Bernoulliego . . . . .	173
§ 159. Przykład . . . . .	174
Skorowidz nazw . . . . .	176