D] $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Longrightarrow A \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup 0 \cup 0 \cup \ldots) \xrightarrow[(\zeta 3)]{}$

$\xrightarrow[(\zeta 3)]{} \mu_e(A) \leq \mu_e(A_1) + \ldots + \mu_e(A_n) + \mu_e(0) +$

$+ \mu_e(0) + \ldots \xrightarrow[(\zeta 2)]{} \mu_e(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_e(A_k)$

(z4) $\bigwedge_{A_1, A_2, \ldots \subset X} \mu_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(A_k)$

D] **Wynika z (ζ3), ponieważ** $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

(z5) $\bigwedge_{A_1, \ldots, A_n \subset X} \mu_e\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_e(A_k)$

D] **Wynika z (z3), ponieważ** $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

(z6) $\bigwedge_{A,B \subset X} \mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$

D] **Szczególny przypadek (z5).**

(z7) $\bigwedge_{A,Z \subset X} \mu_e(Z) \leq \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A)$

D] $\bigwedge_{A,Z \subset X} Z = (Z \cap A) \cup (Z - A)$

skąd otrzymujemy własność (z7) na mocy (z6).

§ 111. Twierdzenie Carathéodory'ego

Z] μ_e **jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego w przestrzeni** X

(14) $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{A : A \subset X \wedge \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A)\right\}$

T] **I. Klasa** $\mathcal{S}$ **podzbiorów przestrzeni** X **jest** σ**-ciałem.**

II. Miara zewnętrzna μ_e **Carathéodory'ego, rozpatrywana tylko na** $\mathcal{S}$**, jest miarą, tzn. funkcja** μ **określona na** $\mathcal{S}$ **następująco:**

(15) $\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_e(A)$

jest miarą.

III. Każdy zbiór miary zewnętrznej Carathéodory'ego zero należy do $\mathcal{S}$ **i ma miarę zero, tzn.**

$$\bigwedge_{A \subset X} \left(\mu_e(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A) = 0\right)$$

D] Dowód podzielimy na 6 części T1,...,T6, stanowiących dowody 6 kolejnych twierdzeń, składających się na całe twierdzenie Carathéodory'ego.

T1] Klasa $\mathcal{S}$ jest ciałem zbiorów.

D] Klasa $\mathcal{S}$ nie jest pusta, ponieważ $X \in \mathcal{S}$. Sprawdzamy to z łatwością biorąc pod uwagę, że $Z \cap X = Z$ i $Z - X = 0$. Tym samym klasa $\mathcal{S}$ spełnia warunek ($\varkappa 1$) dla ciała zbiorów.

$$A \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A) = \mu_e(Z - A^c) + \mu_e(Z \cap A^c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A^c) + \mu_e(Z - A^c) \Rightarrow A^c \in \mathcal{S}$$

Zatem klasa $\mathcal{S}$ spełnia również warunek ($\varkappa 2$).

Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to

$$\text{(i)} \qquad \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A)$$

$$\text{(ii)} \qquad \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap B) + \mu_e(Z - B)$$

Wstawiając w (ii) zamiast Z najpierw $Z \cap A$, a potem $Z - A$, otrzymujemy

$$\text{(iii)} \quad \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z \cap A) = \mu_e(Z \cap A \cap B) + \mu_e(Z \cap A - B) = \mu_e(Z \cap A \cap B) + \mu_e(Z \cap A \cap B^c)$$

$$\text{(iv)} \quad \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z - A) = \mu_e\big((Z - A) \cap B\big) + \mu_e\big((Z - A) - B\big) =$$
$$= \mu_e(Z \cap A^c \cap B) + \mu_e(Z - (A \cup B))$$

Podstawiając (iii) i (iv) do (i) otrzymujemy

$$\text{(v)} \quad \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A \cap B) + \mu_e(Z \cap A \cap B^c) + \mu_e(Z \cap A^c \cap B) + \mu_e(Z - (A \cup B))$$

Ale

$$Z \cap A \cap B \cup Z \cap A \cap B^c \cup Z \cap A^c \cap B = Z \cap A \cup Z \cap A^c \cap B = Z \cap (A \cup B)$$

skąd na mocy (z5)

$$\text{(vi)} \quad \mu_e(Z \cap A \cap B) + \mu_e(Z \cap A \cap B^c) + \mu_e(Z \cap A^c \cap B) \geqslant \mu_e(Z \cap (A \cup B))$$

Z (v) i (vi) wynika, że

$$\bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) \geqslant \mu_e\Big(Z \cap (A \cup B)\Big) + \mu_e(Z - (A \cup B))$$

Na mocy (z7) mamy stąd ostatecznie

$$A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap (A \cup B)) + \mu_e(Z - (A \cup B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$$

Klasa $\mathcal{S}$ spełnia w ten sposób warunki ($\varkappa$1), ($\varkappa$2) i ($\varkappa$3) i jest ciałem zbiorów.

T2| $$\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}} \mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu_e(Z\cap A_k)$$

D| Stosujemy indukcję. Dla $n=1$ wzór przedstawia tożsamość. Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla $n=m-1$, tzn.

(vii) $$\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{A_1,\ldots,A_{m-1}\in\mathcal{S}} \mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{m-1}A_k\right)=\sum_{k=1}^{m-1}\mu_e(Z\cap A_k)$$

Mamy wtedy

$$A_m\in\mathcal{S}\implies\bigwedge_{Z\subset X}\mu_e(Z)=\mu_e(Z\cap A_m)+\mu_e(Z-A_m)$$

Podstawiając tu w miejsce Z zbiór $Z\cap\sum_{k=1}^{m}A_k$ otrzymujemy

$$\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{A_1,\ldots,A_m\in\mathcal{S}} \mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{m}A_k\right)=$$

$$=\mu_e\left(Z\cap\left(\sum_{k=1}^{m}A_k\right)\cap A_m\right)+\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{m}A_k-A_m\right)=$$

$$=\mu_e(Z\cap A_m)+\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{m-1}A_k\right)\underset{(vii)}{=\!=}\mu_e(Z\cap A_m)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\mu_e(Z\cap A_k)=\sum_{k=1}^{m}\mu_e(Z\cap A_k)$$

Z prawdziwości wzoru dla $n=m-1$ wynika zatem jego prawdziwość dla $n=m$.

T3| $$\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}} \mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_e(Z\cap A_k)$$

D| $$\bigwedge_{n\in\mathcal{N}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k\supset\sum_{k=1}^{n}A_k\implies\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{n\in\mathcal{N}}\left(Z\cap\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)\supset\left(Z\cap\sum_{k=1}^{n}A_k\right)\underset{(z1)}{\implies}$$

$$\underset{(z1)}{\implies}\bigwedge_{Z\subset X}\ \bigwedge_{n\in\mathcal{N}}\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)\geqslant\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{n}A_k\right)\underset{(T2)}{=\!=}\sum_{k=1}^{n}\mu_e(Z\cap A_k)\implies$$

$$\implies\bigwedge_{Z\subset X}\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_e(Z\cap A_k)$$

Uwzględniliśmy tu fakt, że ciąg liczbowy $\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_e(Z\cap A_k)\right)$ jako monotoniczny ma granicę.

Z drugiej strony na mocy (z4)

$$\bigwedge_{Z\subset X}\mu_e\left(Z\cap\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\mu_e\left(\sum_{k=1}^{\infty}Z\cap A_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_e(Z\cap A_k)$$

i w ten sposób otrzymujemy tezę T3.

T4| Klasa $\mathcal{S}$ jest σ -ciałem.

D| Wykazaliśmy już, że klasa $\mathcal{S}$ jest ciałem zbiorów. Tym samym klasa $\mathcal{S}$ spełnia warunki (σ1) i (σ2) dla σ-ciał. Pozostaje zatem wykazać, że spełnia (σ3) czyli

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}$$

Ale

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$$

gdzie

$$B_k = A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$$

i na mocy tego, że klasa $\mathcal{S}$ jest ciałem zbiorów

$$B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{S}$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$(B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{S}) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{j,k \in \mathfrak{N} \\ j \neq k}} B_j \cap B_k = 0 \Big) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{S}$$

Otóż na mocy definicji klasy $\mathcal{S}$ i faktu, że klasa ta jest ciałem zbiorów mamy

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \sum_{k=1}^{n} B_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigwedge_{Z \subset X} \bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \mu_e(Z) = \mu_e\Big(Z \cap \sum_{k=1}^{n} B_k\Big) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{n} B_k\Big) \overline{\overline{\underset{(T2)}{}}}$$

$$\overline{\overline{\underset{(T2)}{}}} \sum_{k=1}^{n} \mu_e(Z \cap B_k) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{n} B_k\Big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_e(Z \cap B_k) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(Z \cap B_k) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big)$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że ciąg liczbowy $\Big(\sum_{k=1}^{n} \mu_e(Z \cap B_k)\Big)$ jako monotoniczny ma zawsze granicę.

Na mocy (T3) mamy dalej

$$\bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) \geqslant \mu_e\Big(Z \cap \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \underset{(z7)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{(z7)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e\Big(Z \cap \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + \mu_e\Big(Z - \sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{S}$$

T5| Funkcja μ określona na σ-ciele $\mathcal{S}$ wzorem

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} \mu(A) \stackrel{def}{=\!=} \mu_e(A)$$

jest miarą.

D| μ jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X i tym samym spełnia warunek $(\mu 1)$ dla miary.

Na mocy $(\xi 2)$ funkcja μ spełnia warunek

$$\mu(0) = 0$$

i tym samym warunek $(\mu 2)$ dla miary. Następnie na mocy (z2) jest spełniony również warunek $(\mu 3)$.

Z twierdzenia T3 zastosowanego do przypadku $Z = X$ otrzymujemy

$$\bigwedge_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}} \mu_e\Big(X \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(X \cap A_k)$$

czyli warunek $(\mu 4)$, ponieważ

$$X \cap \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{i} \quad \bigwedge_k X \cap A_k = A_k$$

Funkcja μ spełnia zatem wszystkie warunki $(\mu 1)$, $(\mu 2)$, $(\mu 3)$, $(\mu 4)$ i jest miarą.

T6| $\bigwedge_{A\subset X} \Big(\mu_e(A) = 0 \Rightarrow A\in\mathcal{S} \wedge \mu(A) = 0\Big)$

D| $\bigwedge_{A, Z\subset X} A \supset Z\cap A \underset{(z1)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{A, Z\subset X} \mu_e(A) \geqslant \mu_e(Z\cap A) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Big(\bigwedge_{A, Z\subset X} \mu_e(A) = 0 \Longrightarrow \mu_e(Z\cap A) \leqslant 0 \underset{(z2)}{\Longrightarrow} \mu_e(Z\cap A) = 0\Big)$

Analogicznie

$$\bigwedge_{A, Z\subset X} Z \supset Z - A \underset{(z1)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{A, Z\subset X} \mu_e(Z) \geqslant \mu_e(Z - A)$$

Z powyższych dwu zależności wynika, że

$\bigwedge_{A\subset X} \Big(\mu_e(A) = 0 \Longrightarrow \bigwedge_{Z\subset X} \mu_e(Z) \geqslant \mu_e(Z\cap A) + \mu_e(Z - A) \underset{(z7)}{\Longrightarrow}$

$\underset{(z7)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{Z\subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z\cap A) + \mu_e(Z - A)\Big) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{A\subset X}\left(\mu_e(A)=0 \Rightarrow A\in\mathcal{S}\right) \underset{(T5)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{A\subset X}\left(\mu_e(A)=0 \Rightarrow A\in\mathcal{S}\wedge \mu(A)=0\right)$$

Tym samym dowód całego twierdzenia Carathéodory'ego został zakończony.

§ 112. Twierdzenie o rozszerzaniu funkcji przeliczalnie addytywnej do miary

Z| λ jest przeliczalnie addytywną, nieujemną funkcją zbioru o dziedzinie K będącej ciałem podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni X.

T| I. Istnieje dokładnie jedna miara μ o dziedzinie $\mathcal{S}^*$ będącej najmniejszym σ-ciałem zawierającym ciało K taka, że

$$\bigwedge_{A\in K}\mu(A)=\lambda(A) \tag{16}$$

II. $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}$ (A jest miary μ półskończonej $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\wedge\bigwedge_k\lambda(A_k)<\infty)$$

D| Dowód podzielimy na 6 części T1,...,T6, stanowiących dowody 6 kolejnych twierdzeń, składających się na całe twierdzenie o rozszerzaniu do miary.

T1| Funkcja μ_e określona w przestrzeni X wzorem

$$\bigwedge_{A\subset X}\mu_e(A)=\inf_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in K\\ \bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\supset A}}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k) \tag{17}$$

jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego.

D| μ_e jest funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest klasa wszystkich podzbiorów przestrzeni X, i tym samym spełnia warunek (ξ1) dla miary zewnętrznej Carathéodory'ego. Na mocy (17) mamy dalej

$$\mu_e(0)=\inf_{B_1,B_2,\ldots\in K}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(0)=0 \tag{i}$$

Ponieważ λ jest z założenia funkcją nieujemną, więc na mocy (17)

$$\bigwedge_{A\subset X}\mu_e(A)\geqslant 0 \tag{ii}$$

Z nierówności (i) i (ii) wynika, że

(18) $$\mu_e(0) = 0$$

i tym samym funkcja (17) spełnia warunek (ζ 2) dla miary zewnętrznej Carathéodory'ego.

Niech teraz L_A będzie zbiorem liczbowym określonym wzorem

(iii) $$L_A \overset{\text{def}}{=\!=} \Big\{x : \bigvee_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in K \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k)\Big\}$$

Na mocy (17) jest

(iv) $$\bigwedge_{A \subset X} \mu_e(A) = \inf L_A$$

a na mocy twierdzenia § 37

$$\bigwedge_{A \subset X} \bigwedge_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ r > \mu_e(A)}} \bigvee_{x_0 \in L_A} x_0 < r$$

czyli na mocy (iii)

(v) $$\bigwedge_{A \subset X} \bigwedge_{\substack{r \in \mathcal{R} \\ r > \mu_e(A)}} \bigvee_{\substack{B_1, B_2, \ldots \in K \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset A}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) < r$$

Niech teraz A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni X, a $A_1, A_2, \ldots$ takimi podzbiorami tej przestrzeni, że

(vi) $$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Na mocy (v)

(vii) $$\bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigvee_{\substack{B_{k1}, B_{k2}, \ldots \in K \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn} \supset A_k}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) \leq \mu_e(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

a ponadto

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn}$$

Moc klasy wszystkich zbiorów B_{kn} nie przewyższa mocy zbioru wszystkich par liczb naturalnych (k, n) czyli nie przewyższa mocy produktu kartezjańskiego $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Zatem na podstawie twierdzenia §13 klasa wszystkich zbiorów B_{kn} jest co najwyżej przeliczalna, czyli można te zbiory ustawić w ciąg $(B_1^*, B_2^*, \ldots)$ taki, że

$$\bigwedge_{l\in\mathcal{N}} \bigvee_{k,n\in\mathcal{N}} B_l^* = B_{kn} \quad \textbf{oraz} \quad \bigwedge_{k,n\in\mathcal{N}} \bigvee_{l\in\mathcal{N}} B_{kn}=B_l^*$$

a ponadto

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn} = \bigcup_{l=1}^{\infty} B_l^*$$

Stąd na mocy (iii)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \lambda(B_l^*) \in L_A \quad \text{czyli} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) \in L_A$$

Wykorzystując teraz (iv) a następnie (vii) mamy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \mu_e(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_{kn}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(A_k)+\varepsilon$$

skąd uwzględniając (vi)

$$A\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Longrightarrow \mu_e(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(A_k)$$

Funkcja (17) spełnia zatem wszystkie warunki (ξ1), (ξ2), (ξ3) i jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego.

T2| Klasa zbiorów (14) z miarą zewnętrzną Carathéodory'ego (17) zawiera dane ciało zbiorów K.

D| Mamy

$$\bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \bigwedge_{B_1,B_2,\ldots\in K} \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset Z \Rightarrow \big(A\cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\big)\supset$$

$$\supset (Z\cap A) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} (A\cap B_k) \supset (Z\cap A)\Big)$$

$$\bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \bigwedge_{B_1,B_2,\ldots\in K} \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset Z \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k - A\supset Z-A \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k-A)\supset Z-A\Big)$$

i na mocy (iii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A\cap B_k) \in L_{Z\cap A}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k-A) \in L_{Z-A}$$

Z powyższych związków wynika na mocy (iv)

$$\bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \bigwedge_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in K\\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\supset Z}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A\cap B_k) \geqslant \mu_e(Z\cap A) \wedge$$

$$\wedge \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k-A) \geqslant \mu_e(Z-A) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \bigwedge_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in K \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\supset Z}} \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\Big(A\cap B_k+(B_k-A)\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(A\cap B_k)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k-A)\geqslant\mu_e(Z\cap A)+\mu_e(Z-A)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \inf_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in K \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\supset Z}} \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\geqslant\mu_e(Z\cap A)+\mu_e(Z-A) \underset{(17)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{(17)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \mu_e(Z)\geqslant\mu_e(Z\cap A)+\mu_e(Z-A) \underset{(z7)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{(z7)}{\Longrightarrow} \bigwedge_{A\in K} \bigwedge_{Z\subset X} \mu_e(Z)=\mu_e(Z\cap A)+\mu_e(Z-A)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{A\in K} A\in\mathcal{S}\Longrightarrow K\subset\mathcal{S}$$

T3] **Miara μ generowana wzorem (15) przez miarę zewnętrzną Carathéodory'ego (17) na σ-ciele $\mathcal{S}$ określonym wzorem (14) jest rozszerzeniem funkcji przeliczalnie addytywnej λ danej na ciele zbiorów K na najmniejsze σ-ciało $\mathcal{S}^*$ zawierające K, to znaczy istnieje miara μ o dziedzinie $\mathcal{S}^*$ dana wzorem**

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\mu(A)=\mu_e(A) \tag{19}$$

oraz jest spełniony warunek (16).

D] Klasa $\mathcal{S}$ zdefiniowana wzorem (14) jest σ-ciałem na mocy twierdzenia Carathéodory'ego a na mocy T2 zawiera ciało zbiorów K. Skoro σ-ciało $\mathcal{S}^*$ jest z definicji najmniejszym σ-ciałem zawierającym K, zatem

$$\mathcal{S}^*\subset\mathcal{S}$$

Wzór (15) określa miarę na σ-ciele $\mathcal{S}$. Miara ta ograniczona do σ-ciała $\mathcal{S}^*$ nie przestaje być miarą, ponieważ wtedy warunek (μ1) jest spełniony, warunek (μ2) na mocy (18) nadal utrzymany, warunek (μ3) również spełniony, a warunek (μ4) pozostaje prawdziwy po ograniczeniu go do σ-ciała $\mathcal{S}^*$. Wynika stąd, że wzór (19) istotnie określa miarę na σ-ciele $\mathcal{S}^*$. Pozostaje wykazać, że jest spełniony warunek (16). Otóż mamy

$$\bigwedge_{A\in K}\Big(A\subset A\cup O\cup O\cup\ldots \underset{(17)}{\Longrightarrow}\mu_e(A)\leqslant\lambda(A)+\lambda(O)+\lambda(O)+\ldots\Big)$$

skąd

(viii) $$\bigwedge_{A\in K} \mu_e(A)\leq \lambda(A)$$

Z drugiej strony

$$\bigwedge_{A\in K}\ \bigwedge_{B_1,B_2,\ldots\in K}\left(A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k-\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\right)\Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow A=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A\cap\left(B_k-\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\right)\right)\Rightarrow$$

$$\left.\Rightarrow\lambda(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(A\cap\left(B_k-\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\right)\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\left(B_k-\bigcup_{j=1}^{k-1} B_j\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\right)$$

a stąd

$$\bigwedge_{A\in K}\ \bigwedge_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in K\\ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\supset A}} \lambda(A)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\underset{(17)}{\Longrightarrow}\lambda(A)\leq\mu_e(A)$$

i na mocy (viii)

$$\bigwedge_{A\in K}\mu_e(A)=\lambda(A)$$

skąd na mocy (19) warunek (16).

T4| $$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\left(A \text{ jest miary } \mu \text{ półskończonej}\Leftrightarrow\right.$$

$$\left.\Leftrightarrow\bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\wedge\bigwedge_k\lambda(A_k)<\infty\right)$$

D| Wykażemy najpierw, że lewa strona powyższej równoważności implikuje prawą. Mamy

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\left(A \text{ jest miary } \mu \text{ półskończonej}\underset{(\S\,108)}{\Longrightarrow}\right.$$

$$\left.\underset{(\S\,108)}{\Longrightarrow}\bigvee_{C_1,C_2,\ldots\in\mathcal{S}^*} A=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\wedge\bigwedge_k\mu(C_k)=\mu_e(C_k)<\infty\right)$$

Otrzymujemy stąd na mocy (17) czyli (iii) i (iv)

$$\bigwedge_k\ \bigvee_{B_{k1},B_{k2},\ldots\in K} C_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn}\wedge\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(B_{kn})<\infty$$

i, biorąc pod uwagę, że funkcja λ jest nieujemna,

$$\bigwedge_k\ \bigvee_{B_{k1},B_{k2},\ldots\in K} C_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn}\wedge\bigwedge_{k,n}\lambda(B_{kn})<\infty$$

Zatem

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\Big(A \text{ jest miary półskończonej} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{\substack{B_{k1},B_{k2},\ldots\in K\\ k=1,2,\ldots}} A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn}\wedge\bigwedge_{k,n}\lambda(B_{kn})<\infty\Big)$$

Ale w dowodzie T1 wykazaliśmy, że klasa wszystkich zbiorów B_{kn} jest co najwyżej przeliczalna i wobec tego można wszystkie te zbiory ustawić w ciąg $(A_1, A_2, \ldots)$ taki, że

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{kn}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \text{ i } \bigwedge_k\lambda(A_k)<\infty$$

Otrzymaliśmy w ten sposób, że

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\Big(A \text{ jest miary } \mu \text{ półskończonej} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\wedge\bigwedge_k\lambda(A_k)<\infty\Big)$$

Wykażemy teraz, że prawa strona dowodzonej równoważności implikuje lewą. Mamy

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*}\Big(\bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\wedge\bigwedge_k\lambda(A_k)<\infty\underset{(16)}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{(16)}{\Longrightarrow}\bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap A_k)\wedge\bigwedge_k\mu(A\cap A_k)\leqslant\mu(A_k)=$$

$$=\lambda(A_k)<\infty\Longrightarrow\bigvee_{A\cap A_1,A\cap A_2,\ldots\in\mathcal{S}^*} A=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap A_k)\wedge$$

$$\wedge\bigwedge_k\mu(A\cap A_k)<\infty\underset{(\S 108)}{\Longrightarrow} A \text{ jest miary } \mu \text{ półskończonej}\Big).$$

T5 Załóżmy, że istnieją dwie miary μ i μ^* o wspólnej dziedzinie $\mathcal{S}^*$ spełniające warunki:

(ix) $$\bigwedge_{A\in K}\mu(A)=\mu^*(A)=\lambda(A)$$

Niech B będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni X spełniającym warunki

(x) $$B\in K \quad \text{i} \quad \mu(B)=\mu^*(B)<\infty$$

Klasa podzbiorów przestrzeni X określona wzorem

(xi) $$\mathcal{M}_B\overset{\text{def}}{=}\{A\colon A\cap B\in\mathcal{S}^*\wedge\mu(A\cap B)=\mu^*(A\cap B)\}$$

jest pseudo- σ-ciałem zawierającym σ-ciało $\mathcal{S}^*$.

D| Ponieważ

$$A\in K\Longrightarrow A\cap B\in K \underset{(ix)}{\Longrightarrow} A\cap B\in \mathcal{S}^*\wedge\ \mu(A\cap B)=\mu^*(A\cap B)\underset{(xi)}{\Longrightarrow} A\in\mathcal{M}_B$$

więc

$$\text{(xii)}\qquad \bigwedge_{\substack{B\in K\\ \mu(B)=\mu^*(B)<\infty}} K\subset\mathcal{M}_B$$

Ponieważ $0\in K\Longrightarrow 0\in\mathcal{M}_B$, więc klasa $\mathcal{M}_B$ spełnia warunek $(\tau 1)$ dla pseudo- σ-ciała. Mamy dalej

$$A\in\mathcal{M}_B\underset{(xi)}{\Longrightarrow} A\cap B\in\mathcal{S}^*\wedge\ \mu(A\cap B)=\mu^*(A\cap B)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow B-A\cap B=A^c\cap B\in\mathcal{S}^*\wedge\ \mu(A^c\cap B)=\mu\left(B-A\cap B\right)\underset{\substack{(m9)\\(x)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(m9)\\(x)}}{=}\mu(B)-\mu(A\cap B)=\mu^*(B)-\mu^*(A\cap B)\underset{\substack{(m9)\\(x)}}{=}\mu^*(B-A\cap B)=\mu^*(A^c\cap B)\Longrightarrow A^c\in\mathcal{M}_B$$

Klasa $\mathcal{M}_B$ spełnia zatem również warunek $(\tau 2)$ dla pseudo-σ--ciał. Mamy wreszcie

$$(A_1\subset A_2\subset\ldots)\wedge(A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{M}_B)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(A_1\subset A_2\subset\ldots)\wedge\bigwedge_{k\in\mathcal{N}}\left(A_k\cap B\in\mathcal{S}^*\wedge\ \mu(A_k\cap B)=\mu^*(A_k\cap B)\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\Big((A_1\cap B)\subset(A_2\cap B)\subset\ldots\Big)\wedge\ \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap B)\in\mathcal{S}^*\wedge\bigwedge_k\mu(A_k\cap B)=$$

$$=\mu^*(A_k\cap B)\Longrightarrow\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap B=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap B)\in\mathcal{S}^*\wedge\ \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap B\right)=$$

$$=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap B)\right)\underset{(m7)}{=}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B)=\lim_{k\to\infty}\mu^*(A_k\cap B)\underset{(m7)}{=}$$

$$\underset{(m7)}{=}\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap B)\right)=\mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap B\right)\underset{(xi)}{\Longrightarrow}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{M}_B$$

Klasa $\mathcal{M}_B$ spełnia w ten sposób wszystkie warunki $(\tau 1)$, $(\tau 2)$, $(\tau 3)$ i jest pseudo-σ-ciałem.

Z definicji $\mathcal{S}^*$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym ciało K. Na mocy twierdzenia § 33 $\mathcal{S}^*$ jest zarazem najmniejszym pseudo-σ-ciałem zawierającym ciało K. Wynika stąd, że

$$\mathcal{S}^*\subset\mathcal{M}_B$$

a następnie na mocy (xi) i (x)

(xiii) $$\bigwedge_{\substack{B\in K\\ \mu(B)=\mu^*(B)<\infty}} \bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*} \mu(A\cap B)=\mu^*(A\cap B)$$

T6| Miara μ o dziedzinie $\mathcal{S}^*$ dana wzorem (19) jest jedyną miarą na $\mathcal{S}^*$ spełniającą warunek (16). Innymi słowy, jeżeli istnieją dwie miary μ i μ^* o dziedzinie $\mathcal{S}^*$ spełniające warunek (ix), to

$$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}^*} \mu(A) = \mu^*(A)$$

D| dla każdego $A\in\mathcal{S}^*$ rozróżniamy dwa przypadki:

$$\bigvee_{A_1,A_2,\ldots\in K} A\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \wedge \bigwedge_k \lambda(A_k)<\infty$$

albo

$$\bigwedge_{\substack{A_1,A_2,\ldots\in K\\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\supset A}} \bigvee_{q\in\mathcal{N}} \lambda(A_q)=\infty$$

W pierwszym przypadku zauważmy, że

(xiv) $$A=A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A\cap\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(A\cap\Big(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\Big)\Big)$$

gdzie

$$\bigwedge_k A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\in K\wedge\lambda\Big(A_k-\bigcup_{j=1}^{k-1}A_j\Big)\leqslant\lambda(A_k)<\infty$$

Wobec tego na mocy (xiii)

$$\bigwedge_k \mu\Big(A\cap\big(A_k-\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\big)\Big)=\mu^*\Big(A\cap\big(A_k-\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\big)\Big)$$

i na mocy (xiv)

$$\mu(A)=\mu^*(A)$$

W drugim przypadku

$$\bigwedge_{\substack{A_1,A_2,\ldots\in K\\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\supset A}} \bigvee_{q\in\mathcal{N}} \mu(A_q)=\mu^*(A_q)=\lambda(A_q)=\infty$$

wobec czego na mocy (T4) zbiór A nie jest miary μ półskończonej oraz nie jest miary μ^* półskończonej i na mocy definicji zbioru miary półskończonej

$$\bigwedge_{\substack{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}^* \\ A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}} \left(\bigvee_{r\in\mathcal{N}} \mu(A_r)=\infty\right) \wedge \left(\bigvee_{s\in\mathcal{N}} \mu^*(A_s)=\infty\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu(A) \geqslant \mu(A_r)=\infty \wedge \mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_s)=\infty \Longrightarrow \mu(A)=\mu^*(A)=\infty$$

W ten sposób dowód całego twierdzenia § 112 został zakończony.

§ 113. Dystrybuanta miary w przestrzeni euklidesowej

Niech ν będzie miarą unormowaną o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej najmniejszym σ-ciałem zawierającym ciało Q wszystkich figur elementarnych lewostronnie domkniętych w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^n$, czyli ciałem zbiorów borelowskich w tej przestrzeni (patrz § 93 i § 94).

Dystrybuantą miary ν nazywamy funkcję rzeczywistą F, dla której dziedziną jest cała przestrzeń $\mathcal{R}_0^n$ i która jest określona wzorem

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{R}_0^n} F(x) \overset{\text{def}}{=} \nu\left[\langle-\infty;\ x)\right]$$

§ 114. Twierdzenie

Dystrybuanta miary w przestrzeni $\mathcal{R}_0^n$ jest dystrybuantą n-wymiarową.

D| Niech ν będzie miarą unormowaną określoną w § 113, a funkcja rzeczywista F niech będzie dystrybuantą tej miary.

Ponieważ F jest z definicji funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest cała przestrzeń $\mathcal{R}_0^n$, więc jest spełniony warunek (F1) dla dystrybuanty.

Przyjmijmy teraz oznaczenia z § 93 i niech

$$F_r(x_1,\ldots,x_n) \overset{\text{def}}{=} \nu\left[B^r_{b_1,\ldots,b_r}(a_1,\ldots,a_r,\ x_{r+1},\ldots,x_n)\right]$$

W szczególności na mocy (12)

$$F_0(x_1,\ldots,x_n) = \nu\left[\langle-\infty;\ x)\right] = F(x_1\ldots,x_n)$$

(*)

$$F_n(x_1,\ldots,x_n) = \nu\left[\langle a;\ b)\right]$$

Na mocy (13) jest dla $r = 1,\ldots,n$

$$F_r(x_1,\ldots,x_n) = \Delta^1_{(b_r)_r} F_{r-1}(a_1,\ldots,a_r, x_{r+1},\ldots,x_n)$$

skąd na mocy (*)

$$(**) \qquad \bigwedge_{a,b\in\mathfrak{R}^n_0} \nu\left[\langle a;b)\right] = \Delta^n_b F(a)$$

Ponieważ miara jest funkcją nieujemną, wynika stąd, że funkcja F jest n-wymiarowo niemalejąca, czyli spełnia warunek (F2) dla dystrybuanty.

Niech teraz $\xi_1, \xi_2,\ldots\in\mathfrak{R}^n$ będzie dowolnym ciągiem spełniającym warunek

$$\xi_k \nearrow x$$

gdzie x jest dowolnym punktem przestrzeni $\mathfrak{R}^n_0$. Niech

$$A_k \overset{\text{def}}{=} \langle-\infty;\ \xi_k), \qquad A \overset{\text{def}}{=} \langle-\infty;\ x)$$

Mamy

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$

oraz

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$$

wobec czego na mocy własności (n8) miary unormowanej

$$\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \nu(A)$$

czyli

$$\lim_{k\to\infty} F(\xi_k) = F(x)$$

co ze względu na dowolność ciągu $\xi_1, \xi_2,\ldots$ oznacza lewostronną ciągłość funkcji F, czyli spełnienie przez nią warunku (F3) dla dystrybuanty.

Niech teraz $\eta_1, \eta_2,\ldots$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym warunek

$$\eta_1 > \eta_2 > \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \eta_k = -\infty$$

i niech dla dowolnie ustalonego $j\in\{1,\ldots n\}$ i $k = 1,2,\ldots$

$$B_k \overset{\text{def}}{=} \langle-\infty;\ (x_1,\ldots,x_{j-1}, \eta_k, x_{j+1},\ldots,x_n))$$

Mamy

$$B_1 \supset B_1 \supset \dots$$

oraz

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = 0$$

wobec czego na mocy własności (n9) miary unormowanej

$$\lim_{k\to\infty} \nu(B_k) = 0$$

czyli

$$\lim_{k\to\infty} \nu\left[\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, \eta_k, x_{j+1},\dots,x_n)\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} F(x_1,\dots,x_{j-1}, \eta_k, x_{j+1},\dots,x_n) = 0$$

a ze względu na dowolność ciągu $\eta_1, \eta_2, \dots$

$$\lim_{x_j\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n) = F(x_1,\dots,x_{j-1},-\infty,x_{j+1},\dots,x_n) = 0$$

ponieważ z definicji

$$F(x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n) =$$

$$= \nu\left[\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n)\rangle\right] = 0$$

gdyż przedział

$$\langle -\infty; (x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n)\rangle$$

jest zbiorem pustym. Funkcja F spełnia zatem warunek (F4) dla dystrybuanty.

Na koniec z definicji funkcji F wynika, że

$$F(\infty) = \nu\left[\langle -\infty; \infty)\right] = \nu(\mathfrak{R}^n) = 1$$

czyli jest spełniony ostatni warunek (F5) dla dystrybuanty. Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

§ 115. Twierdzenie

Każda miara unormowana, dla której dziedziną jest ciało zbiorów borelowskich w przestrzeni euklidesowej $\mathfrak{R}^n$, określa jednoznacznie dystrybuantę n-wymiarową, będącą dystrybuantą tej miary.