$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{1} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{2} A_k, \ldots \in \mathcal{T}^* \wedge \left(\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{2} A_k\right) \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}^*$$

$\mathcal{T}^*$ jest zatem σ-ciałem i dowód jest zakończony.

§ 34. Kres górny i kres dolny

Kres górny (supremum) i kres dolny (infimum) klasy zbiorów $\mathcal{R}$ określamy następująco:

$$\sup_{A\in\mathcal{R}} A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{A\in\mathcal{R}} A \qquad \inf_{A\in\mathcal{R}} A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{A\in\mathcal{R}} A$$

Kres górny i kres dolny rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ określamy analogicznie

$$\sup_{t\in T} A_t \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{t\in T} A_t \qquad \inf_{t\in T} A_t \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{t\in T} A_t$$

W szczególności gdy rodzina zbiorów jest ciągiem $(A_1, A_2, \ldots)$, piszemy

$$\sup_k A_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \inf_k A_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

a zatem m. in.

$$\sup_k A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \inf_k A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Kres górny i kres dolny klasy czy rodziny zbiorów zawsze istnieją. Ponadto mamy zawsze

$$(2) \qquad \inf_{A\in\mathcal{R}} A \subset \sup_{A\in\mathcal{R}} A \qquad \inf_{t\in T} A_t \subset \sup_{t\in T} A_t$$

ponieważ

$$(3) \qquad \bigwedge_{A^*\in\mathcal{R}} \bigcap_{A\in\mathcal{R}} A \subset A^* \subset \bigcup_{A\in\mathcal{R}} A$$

Wynika stąd również, że

$$(4) \quad \inf_{A\in\mathcal{R}} A = \sup_{A\in\mathcal{R}} A \iff \bigwedge_{A^*, A^{**}\in\mathcal{R}} A^* = A^{**},\ \inf_{t\in T} A_t = \sup_{t\in T} A_t \iff \bigwedge_{t^*, t^{**}\in T} A_{t^*} = A_{t^{**}}$$

Niech teraz A będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni $\mathfrak{R}_0$ i niech a, $\bar{a}$, $\underline{a}$, $x \in \mathfrak{R}_0$. Niech

$$\langle -\infty; a) \overset{\text{def}}{=} \{x : x < a\}, \qquad \langle -\infty; a\rangle \overset{\text{def}}{=} \{x : x \leq a\}$$

i niech $\{R_a\}_{a\in A}$ będzie rodziną zbiorów $R_a = \langle -\infty; a)$ dla $a\in A$, z tym, że symbol $\langle -\infty; -\infty)$ oznacza zbiór pusty. Kres górny i kres dolny zbioru liczbowego A określamy następująco:

$$\bar{a} = \sup A \overset{\text{def}}{\iff} \left(\sup_{a\in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \bar{a})\right) \vee \left(\sup_{a\in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \bar{a}\rangle\right)$$

$$\underline{a} = \inf A \overset{\text{def}}{\iff} \left(\inf_{a\in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \underline{a})\right) \vee \left(\inf_{a\in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \underline{a}\rangle\right)$$

Wykażemy, że kres górny i kres dolny niepustego zbioru liczbowego zawsze istnieją. Ponieważ zbiory

$$B = \sup_{a\in A} \langle -\infty; a), \qquad C = \inf_{a\in A} \langle -\infty; a)$$

zawsze istnieją, wystarczy wykazać, że istnieją takie $\bar{a}, \underline{a} \in \mathfrak{R}_0$, że

(*) $$B = \langle -\infty; \bar{a}) \vee B = \langle -\infty; \bar{a}\rangle$$

oraz

(**) $$C = \langle -\infty; \underline{a}) \vee C = \langle -\infty; \underline{a}\rangle$$

Zacznijmy od wykazania (*). Dla b, b_1, b_2, $r\in\mathfrak{R}$ mamy kolejno

1° $\bigvee_b' b\in B \Rightarrow B = 0 = \langle -\infty; -\infty) \Rightarrow \bar{a} = \sup A = -\infty$

2° $\bigvee_b' b\notin B \Rightarrow \bigwedge_b b\in B \Rightarrow B = \langle -\infty; +\infty\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{a} = \sup A = +\infty$

3° $b\in B \Rightarrow b\in \bigcup_{a\in A} \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigvee_{a_0\in A} b\in \langle -\infty; a_0) \Rightarrow \bigwedge_{r<b} \bigvee_{a_0\in A} r\in \langle -\infty; a_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigwedge_{r<b} r\in \bigcup_{a\in A} \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{r<b} r\in B$

4° $b\notin B \Rightarrow \bigwedge_{a\in A} b\notin \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{a\in A} b \geqslant a \Rightarrow \bigwedge_{r>b} \bigwedge_{a\in A} r > a \Rightarrow$
$\Rightarrow \bigwedge_{r>b} \bigwedge_{a\in A} r\notin \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{r>b} r\notin B$

5° $\left(\bigvee_{b_1} b_1\in B\right) \wedge \left(\bigvee_{b_2} b_2\notin B\right) \wedge (3^\circ) \wedge (4^\circ) \Rightarrow \bigvee_{\bar{a}} \left(\bigwedge_{r<\bar{a}} r\in B\right) \wedge \left(\bigwedge_{r>\bar{a}} r\notin B\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow (B = \langle -\infty; \bar{a})) \vee (B = \langle -\infty; \bar{a}\rangle)$

Analogicznie wykazujemy (**). Dla c, c_1, c_2, $r\in\mathfrak{R}$ mamy bowiem

1° $\bigvee_c' c\in C \Rightarrow C = 0 = \langle -\infty; -\infty) \Rightarrow \underline{a} = \inf A = -\infty$

$$2^{0}\ \bigvee_{c}{}' c \notin C \Rightarrow \bigwedge_{c} c \in C \Rightarrow C = \langle -\infty; +\infty \rangle \Rightarrow \underline{a} = \inf A = +\infty$$

$$3^{0}\ c \in C \Rightarrow c \in \bigcap_{a \in A} \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{a \in A} c \in \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{r<b} \bigwedge_{a \in A} r \in \langle -\infty; a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{r<c} r \in \bigcap_{a \in A} \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{r<c} r \in C$$

$$4^{0}\ c \notin C \Rightarrow \bigvee_{a_0 \in A} c \notin \langle -\infty; a_0) \Rightarrow \bigvee_{a_0 \in A} c \geqslant a_0 \Rightarrow \bigwedge_{r>c} \bigvee_{a_0 \in A} r > a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{r>c} \bigvee_{a_0 \in A} r \notin \langle -\infty; a_0) \Rightarrow \bigwedge_{r>c} r \notin \bigcap_{a \in A} \langle -\infty; a) \Rightarrow \bigwedge_{r>c} r \notin C$$

$$5^{0}\ \Big(\bigvee_{c_1} c_1 \in C\Big) \wedge \Big(\bigvee_{c_2} c_2 \notin C\Big) \wedge (3^{o}) \wedge (4^{o}) \Rightarrow \bigvee_{\underline{a}} \Big(\bigwedge_{r<\underline{a}} r \in C\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{r>\underline{a}} r \notin C\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(C = \langle -\infty; \underline{a})\big) \vee \big(C = \langle -\infty; \underline{a}\rangle\big)$$

Tym samym wykazaliśmy prawdziwość (*) i (**).

Z definicji zbiorów B i C wynika na mocy (2), że

$$C \subset B$$

skąd z kolei wynika, że

$$(5) \qquad \bigwedge_{\substack{A \subset \mathfrak{R}_0 \\ A \neq 0}} \inf A \leqslant \sup A$$

Niech teraz $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą o dziedzinie X. Niech Z będzie niepustym podzbiorem zbioru X określonym równością $Z = \{x: \alpha(x)\}$, gdzie $\alpha(x)$ jest dowolnym warunkiem. Wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\sup_{\alpha(x)} f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup f(Z) = \sup \{y: \bigvee_{x \in Z} y = f(x)\}$$

$$\inf_{\alpha(x)} f(x) \overset{\text{def}}{=} \inf f(Z) = \inf \{y: \bigvee_{x \in Z} y = f(x)\}$$

W szczególności dla ciągów liczbowych $(a_1, a_2, \ldots)$ przyjmujemy zapis

$$\sup_{k} a_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \sup \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$$

$$\inf_{k} a_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \inf \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$$

a zatem m.in. zapis

$$\sup_{k} a_k = \sup \{a_1, a_2, \ldots\}$$

$$\inf_{k} a_k = \inf \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Jak wynika z powyższych definicji, kres górny i kres dolny zbioru wartości funkcji rzeczywistej, przyjmowanych na niepustym zbiorze, zawsze istnieją i

$$\inf_{\alpha(x)} f(x) \leq \sup_{\alpha(x)} f(x)$$

(6) $$\inf_k a_{n+k-1} \leq \sup_k a_{n+k-1}$$

$$\inf_k a_k \leq \sup_k a_k$$

§ 35. Maksimum i minimum

Niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni $\mathfrak{R}_0$. Niech a^*, $a_* \in \mathfrak{R}_0$. Wprowadzamy następujące określenia

$$a^* = \max A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a^* \in A) \wedge \left(\bigwedge_{a \in A} a \leq a^* \right)$$

$$a_* = \min A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a_* \in A) \wedge \left(\bigwedge_{a \in A} a \geq a_* \right)$$

Maksimum czy minimum zbioru liczbowego A nie zawsze istnieją.

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą o dziedzinie X. Niech Z będzie niepustym podzbiorem zbioru X, określonym równością $Z = \{x: \alpha(x)\}$, gdzie $\alpha(x)$ jest dowolnym warunkiem.

$$\max_{\alpha(x)} f(x) \overset{\text{def}}{=} \max f(Z) = \max \left\{ y: \bigvee_{x \in Z} y = f(x) \right\}$$

$$\min_{\alpha(x)} f(x) \overset{\text{def}}{=} \min f(Z) = \min \left\{ y: \bigvee_{x \in Z} y = f(x) \right\}$$

§ 36. Twierdzenie

Z] $A \subset \mathfrak{R}_0$

$A \neq 0$ czyli zbiór A nie jest pusty

$r \in \mathfrak{R}_0$

T] $\sup A = \min \left\{ r: \bigwedge_{a \in A} a \leq r \right\}$

$\inf A = \max \left\{ r: \bigwedge_{a \in A} a \geq r \right\}$

D] Niech $\bar{a} \in \mathfrak{R}_0$. Z definicji

$$\bar{a} = \sup A \Longleftrightarrow \left(\sup_{a \in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \bar{a}) \right) \vee \left(\sup_{a \in A} \langle -\infty; a) = \langle -\infty; \bar{a}\rangle \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{a \in A} a \leq \bar{a} \right) \wedge \left(\bigwedge_{r < \bar{a}} r \in \sup_{a \in A} \langle -\infty; a) \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{a\in A} a \leq \bar{a}\right) \wedge \left(\bigwedge_{r<\bar{a}} \bigvee_{a_0\in A} r \in \langle -\infty; a_0)\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{a\in A} a \leq \bar{a}\right) \wedge \left(\bigwedge_{r<\bar{a}} \bigvee_{a_0\in A} a_0 > r\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \bar{a} = \min \left\{r: \bigwedge_{a\in A} a \leq r\right\}$$

Dowód dla kresu dolnego jest analogiczny.

§ 37. Twierdzenie

Z] $A \subset \mathfrak{R}_0$

$A \neq 0$

$\bar{a},\ \underline{a},\ r \in \mathfrak{R}_0$

T] $\bar{a} = \sup A \Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{a\in A} a \leq \bar{a}\right) \wedge \left(\bigwedge_{r<\bar{a}} \bigvee_{a_0\in A} a_0 > r\right)$

$\underline{a} = \inf A \Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{a\in A} a \geq \underline{a}\right) \wedge \left(\bigwedge_{r>\underline{a}} \bigvee_{a_0\in A} a_0 < r\right)$

Dowód jest zawarty w dowodzie poprzedniego twierdzenia.

§ 38. Twierdzenie

Z] $A \subset \mathfrak{R}_0$, $A \neq 0$

$\bar{a},\ \underline{a} \in \mathfrak{R}_0$

T] $(\bar{a} = \sup A) \wedge (\bar{a} \in A) \Longleftrightarrow \bar{a} = \max A$

$(\underline{a} = \inf A) \wedge (\underline{a} \in A) \Longleftrightarrow \underline{a} = \min A$

Dowód wynika z definicji maksimum i minimum zbioru liczbowego i z poprzedniego twierdzenia.

§ 39. Granica górna i granica dolna ciągu

Granicą górną (limes superior) ciągu zbiorów (A_n) nazywamy

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_n \sup_k A_{n+k-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Granicą dolną (limes inferior) ciągu zbiorów (A_n) nazywamy

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \inf_k A_{n+k-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Analogicznie określamy granicę górną i granicę dolną ciągu liczbowego (a_n)

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \inf_n \sup_k a_{n+k-1} = \inf_n \sup \{a_n, a_{n+1}, \ldots\} =$$
$$= \inf \left\{ \sup\{a_1, a_2, \ldots\}, \sup\{a_2, a_3, \ldots\}, \ldots \right\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \inf_k a_{n+k-1} = \sup_n \inf \{a_n, a_{n+1}, \ldots\} =$$
$$= \sup \left\{ \inf\{a_1, a_2, \ldots\}, \inf\{a_2, a_3, \ldots\}, \ldots \right\}$$

Z powyższych definicji wynika, że granica górna i granica dolna zarówno dla ciągu zbiorów, jak i dla ciągu liczbowego zawsze istnieją.

§ 40. Twierdzenie

I. Granica górna ciągu zbiorów (A_n) jest zbiorem tych wszystkich elementów, które należą do nieskończenie wielu zbiorów z tego ciągu.

II. Granica dolna ciągu zbiorów (A_n) jest zbiorem tych wszystkich elementów, które należą do prawie wszystkich zbiorów z tego ciągu, tzn. nię należą co najwyżej do skończonej liczby tych zbiorów.

Dowód części I: Niech x będzie dowolnym elementem spełniającym warunek

$$(*) \qquad x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$$

Gdyby x należał do skończonej tylko liczby zbiorów z ciągu (A_n), to istniałaby taka liczba naturalna N, że

$$\bigwedge_{n\geq N} x \notin A_n$$

skąd

$$x \notin \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$$

a następnie

$$x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} A_k$$

co byłoby sprzeczne. Zatem z warunku $(*)$ wynika, że x należy do nieskończenie wielu zbiorów z ciągu (A_n).

Odwrotnie, jeżeli jakiś element x należy do nieskończenie wielu zbiorów z ciągu (A_n), to

$$\bigwedge_n x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

czyli

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n \to \infty} A_n$$

Dowód części II twierdzenia przebiega analogicznie.

§ 41. Twierdzenie

Jeśli (A_n) jest ciągiem zbiorów, to

$$\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n$$

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia poprzedniego.

§ 42. Twierdzenie

Jeśli (a_n) jest ciągiem liczbowym i $r, g, d \in \mathfrak{R}_0$, to

I. $\limsup_{n \to \infty} a_n = g \iff \Big(\bigwedge_{r<g}$ nierówność $a_n > r$ jest spełniona dla nieskończenie wielu $n\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{r>g}$ nierówność $a_n < r$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big)$

II. $\liminf_{n \to \infty} a_n = d \iff \Big(\bigwedge_{r<d}$ nierówność $a_n > r$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{r>d}$ nierówność $a_n < r$ jest spełniona dla nieskończenie wielu $n\Big)$

Dowód części I:

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = g \iff g = \inf\left\{\sup\{a_1, a_2, \ldots\}, \sup\{a_2, a_3, \ldots\}, \ldots\right\} \iff$$

$$\iff \Big(\bigwedge_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \geqslant g\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{r>g} \bigvee_{N \in \mathfrak{N}} \sup\{a_N, a_{N+1}, \ldots\} < r\Big) \underset{\S 37}{\iff}$$

$$\underset{\S 37}{\iff} \Big(\bigwedge_{r<g} \bigwedge_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} > r\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{r>g} \bigvee_{N \in \mathfrak{N}} \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} a_{N+k-1} < r\Big) \iff$$

$\iff \Big(\bigwedge_{r<g}$ nierówność $a_n > r$ jest spełniona dla nieskończenie wielu $n\Big) \wedge$
$\wedge \Big(\bigwedge_{r>g}$ nierówność $a_n < r$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big)$

Dowód części II twierdzenia przebiega analogicznie.

§ 43. Twierdzenie

Jeśli (a_n) jest ciągiem liczbowym, to

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$$

D| Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia poprzedniego.

§ 44. Granica ciągu

Granicę (limes) ciągu zbiorów (A_n) określamy następująco

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

Granicę ciągu liczbowego (a_n) określamy analogicznie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{def}}{\iff} \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

Zamiast

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

piszemy również

$$A_n \to A \qquad a_n \to a$$

W szczególności, gdy ciąg (A_n) czy (a_n) jest niemalejący, piszemy

$$A_n \nearrow A \qquad a_n \nearrow a$$

a gdy jest nierosnący, piszemy

$$A_n \searrow A \qquad a_n \searrow a$$

§ 45. Twierdzenie

Z| (a_n) jest ciągiem liczbowym

T| I. $-\infty < \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < +\infty \iff \bigwedge\limits_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee\limits_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge\limits_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} |a_n - a| < \varepsilon$

II. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \bigwedge\limits_{r\in\mathfrak{R}} \bigvee\limits_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge\limits_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} a_n < r$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \bigwedge\limits_{r\in\mathfrak{R}} \bigvee\limits_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge\limits_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} a_n > r$

Dowód części I:

Niech a, r, $\varepsilon \in \mathfrak{R}$, n, $N \in \mathfrak{N}$

$-\infty < \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < +\infty \iff -\infty < \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a < +\infty \iff \Big(\bigwedge\limits_{r<a}$ nierówność $a_n > r$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big) \wedge \Big(\bigwedge\limits_{r>a}$ nierówność $a_n < r$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big) \iff$ $\iff \Big(\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}$ nierówności $a-\varepsilon < a_n$ i $a+\varepsilon > a_n$ są spełnione dla prawie wszystkich $n\Big) \iff \Big(\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}$ nierówność $|a_n - a| < \varepsilon$ jest spełniona dla prawie wszystkich $n\Big) \iff \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{N} \bigwedge\limits_{n>N} |a_n - a| < \varepsilon$.

Dowód części II:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \Big(\bigwedge\limits_{r}$ nierówność $a_n < r$ jest spełniona dla prawie każdego $n\Big) \iff \bigwedge\limits_{r} \bigvee\limits_{N} \bigwedge\limits_{n>N} a_n < r$

Dowód części III przebiega analogicznie.

§ 46. Twierdzenie

I. Każdy monotoniczny ciąg zbiorów jest zbieżny.
II. Każdy monotoniczny ciąg liczbowy jest zbieżny.

Dowód części I:

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Wynika stąd, że

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Dowód części II pokrywa się z dowodem przeprowadzanym w analizie matematycznej, ponieważ twierdzenie § 45 wykazało, że wprowadzona tutaj definicja granicy ciągu liczbowego jest równoważna definicji wykorzystywanej w analizie matematycznej. Należy jednak zauważyć, że tutaj rozpatrujemy zbieżność ciągów liczbowych w przestrzeni $\mathfrak{R}_0$ i dlatego ciągi, dla których jest

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

uważamy również za zbieżne.

§ 47. Przestrzeń metryczna

Zbiór X nazywamy przestrzenią metryczną, jeżeli zbiór $X \times X$ jest dziedziną funkcji rzeczywistej $\rho(x,y)$ zwanej metryką, której wartości nazywamy odległościami punktów x i y i która spełnia następujące warunki:

(i) $\rho(x,y) \geqslant 0$

(ii) $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(iii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (symetria)

(iv) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (warunek trójkąta)

Dla odległości jest również używany symbol

$$|x - y| \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x,y)$$

Należy zauważyć, że jeden i ten sam zbiór X może być metryzowany na wiele sposobów.

§ 48. Średnica zbioru

Jeśli A jest dowolnym podzbiorem przestrzeni metrycznej X, to średnicę zbioru A określamy następująco:

$$d(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sup\limits_{x,y\in A} \rho(x,y), & \text{gdy } A \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } A = 0 \end{cases}$$

Ponadto wprowadzamy określenie:

$$A \text{ jest zbiorem ograniczonym} \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} d(A) < \infty$$

§ 49. Odległość punktu od zbioru. Odstęp dwu zbiorów

Niech x będzie dowolnym elementem przestrzeni metrycznej X, a A dowolnym niepustym podzbiorem tej przestrzeni. Odległość punktu x od zbioru A określamy następująco:

$$\varrho(x,A) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{y\in A} \varrho(x,y)$$

Gdy A i B są dwoma niepustymi podzbiorami przestrzeni metrycznej X, ich odstęp określamy następująco:

$$\varrho(A,B) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} \varrho(x,y)$$

§ 50. Granica ciągu punktów w przestrzeni metrycznej

Granicę ciągu punktów (x_n) w przestrzeni metrycznej X określamy następująco:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \overset{\mathrm{def}}{\iff} (x\in X) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0\right)$$

A oto własności granicy ciągu punktów przestrzeni metrycznej:

(g1) Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę.

D] Załóżmy, że ciąg (x_n) ma dwie różne granice $x, x^* \in X$. Niech

$$\varrho(x,x^*) = d > 0$$

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek

$$0 < \varepsilon < \frac{d}{2}$$

Z definicji granicy wynika, że

$$\left(\bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} |x_n - x| < \varepsilon\right) \wedge \left(\bigvee_{N^*\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} |x_n - x^*| < \varepsilon\right)$$

Niech q będzie dowolną liczbą naturalną spełniającą warunek

$$(q > N) \wedge (q > N^*)$$

Wtedy

$$(|x_q - x| < \varepsilon) \wedge (|x_q - x^*| < \varepsilon)$$

skąd

$$|x - x_q| + |x_q - x^*| < 2\varepsilon < d = |x - x^*|$$

co przeczy warunkowi trójkąta (iv) dla odległości punktów x i x^*. Wobec tego ciąg (x_n) nie może mieć dwu różnych granic.

(g2) $\bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} x_n = x \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$

D] $\bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} x_n = x \Rightarrow \bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{\substack{n\in\mathfrak{N}\\ n>N}} |x_n - x| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$

(g3) Jeśli x jest granicą ciągu punktów (x_n), to jest również granicą każdego podciągu (x_{m_n}), czyli

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \bigwedge_{\substack{m_1, m_2, \ldots \in\mathfrak{N}\\ m_1 < m_2 < \ldots}} x = \lim_{n\to\infty} x_{m_n}$$

D] $x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0 \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{n>N} |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee_{N\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{m_n>N} |x_{m_n} - x| < \varepsilon \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}} \bigvee_{N^*\in\mathfrak{N}} \bigwedge_{n>N^*} |x_{m_n} - x| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_{m_n} - x| = 0 \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_{m_n}$

§ 51. Domknięcie zbioru

<u>Domknięcie</u> $\bar{A}$ <u>zbioru</u> A w przestrzeni metrycznej X określamy następująco:

(7) $$\bar{A} \overset{\text{def}}{=} \left\{x : \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in A} x = \lim_{n\to\infty} x_n\right\}$$

A oto własności domknięcia $\bar{A}$ zbioru A:

(d1) $A \subset \bar{A}$

D] $x\in A \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$ dla $x_n = x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in A} x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x \in \bar{A}$

(d2) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

D] Własność (d2) wynika bezpośrednio z definicji domknięcia zbioru.

(d3) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

$$\underline{D}\Big|\ \Big(x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in \bar{A}} x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in X} x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge \bigwedge_{n\in\mathfrak{N}} \bigvee_{x_{n1}, x_{n2}, \ldots \in A} x_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in X} x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge \bigwedge_{n\in\mathfrak{N}} \bigvee_{s_n\in\mathfrak{N}} \left| x_n - x_{ns_n} \right| \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in X} x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge \bigwedge_{n\in\mathfrak{N}} \bigvee_{s_n\in\mathfrak{N}} \left| x - x_{ns_n} \right| \leqslant \left| x - x_n \right| + \left| x_n - x_{ns_n} \right| \leqslant \left| x - x_n \right| + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_{1s_1}, x_{2s_2}, \ldots \in A} \lim_{n\to\infty} \left| x - x_{ns_n} \right| = 0 \Rightarrow x \in \bar{A}\Big) \Rightarrow \bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$$

i na mocy własności (d1)

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

(d4) Domknięcie zbioru pustego jest zbiorem pustym.

$$\underline{D}\Big|\ \bar{0} = \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in 0} x = \lim_{n\to\infty} x_n \right\} = 0$$

(d5) $\bar{X} = X$

$$\underline{D}\Big|\ \bar{X} = \left\{ x : \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in X} x = \lim_{n\to\infty} x_n \right\}$$

a ponieważ z definicji granicy ciągu punktów wynika, że

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x \in X$$

więc

$$\bar{X} \subset X$$

i na mocy własności (d1)

$$\bar{X} = X$$

(d6) $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$

$$\underline{D}\Big|\ x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} \Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \ldots \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k} x = \lim_{m\to\infty} x_{nm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{k\in\{1,\ldots,n\}} x_m \in A_k \text{ dla nieskończenie wielu } m \wedge x = \lim_{m\to\infty} x_{nm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{k\in\{1,\ldots,n\}} \bigvee_{x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots \in A_k} x = \lim_{r\to\infty} x_{m_r} \Rightarrow \bigvee_{k\in\{1,\ldots,n\}} x \in \bar{A}_k \Rightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$$

skąd

(*) $$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$$

Z drugiej strony

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k \Rightarrow \bigvee_{k\in\{1,\dots,n\}} x \in \bar{A}_k \Rightarrow \bigvee_{k\in\{1,\dots,n\}} \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A_k} x = \lim_{m\to\infty} x_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k} x = \lim_{m\to\infty} x_m \Rightarrow x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$$

skąd

$$\bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}$$

i na mocy (*)

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k$$

(d7) $A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow \bar{A} = A$

D| $A_k = \{a_k\} \Rightarrow \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in A_k} x_1 = x_2 = \dots = a_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x_1, x_2, \dots \in A_k} \lim_{m\to\infty} x_m = a_k \in A_k \Rightarrow \bar{A}_k \subset A_k$$

i na mocy własności (1)

(**) $$\bar{A}_k = A_k$$

Ponieważ

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

więc na mocy własności (d6) **i** (**)

$$\bar{A} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$$

(d8) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \varrho(x, A) = 0$

D| $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} x = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{x_1, x_2, \dots \in A} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \inf_{y\in A} \varrho(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varrho(x, A) = 0$$

Skorzystaliśmy tu m. in. z faktu, że na mocy twierdzenia § 37

$$\inf_{y\in A} \varrho(x,y) = 0 \Rightarrow \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{x_n\in A} \varrho(x_n,x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \bigvee_{x_1,x_2,\ldots\in A} \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n,x) = 0$$

§ 52. Wnętrze zbioru

Wnętrze A^0 zbioru A w przestrzeni metrycznej X określamy następująco:

(8) $$A^0 \overset{def}{=} (\overline{A^c})^c$$

A oto własności wnętrza A^0 zbioru A:

(w1) $A^0 \subset A$

D] Z definicji A^0 wynika, że

$$(A^0)^c = \overline{A^c}$$

skąd na mocy własności (d1) domknięcia zbioru

$$A^c \subset (A^0)^c$$

a stąd

$$A^0 \subset A$$

(w2) $A \subset B \Rightarrow A^0 \subset B^0$

D] $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \Rightarrow \overline{B^c} \subset \overline{A^c} \Rightarrow (\overline{A^c})^c \subset (\overline{B^c})^c \Rightarrow A^0 \subset B^0$

(w3) $(A^0)^0 = A^0$

D] $A^0 = (\overline{A^c})^c \Rightarrow (A^0)^c = \overline{A^c} \Rightarrow \overline{(A^0)^c} = \overline{\overline{A^c}} \Rightarrow \overline{(A^0)^c} =$

$= \overline{A^c} \Rightarrow \left(\overline{(A^0)^c}\right)^c = (\overline{A^c})^c \Rightarrow (A^0)^0 = A^0$

(w4) Wnętrze zbioru pustego jest zbiorem pustym

D] $0^0 = (\overline{0^c})^c = (\overline{X})^c = X^c = 0$

(w5) $X^0 = X$

D] $X^0 = (\overline{X^c})^c = (\overline{0})^c = 0^c = X$

(w6) $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^0 = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^0$

$$D| \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^{o} = \left(\overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^{c}}\right)^{c} = \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k^{c}}\right)^{c} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k^{c}}\right)^{c} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} (\overline{A_k^{c}})^{c} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^{o}$$

(w7) $A = \{a_1, \dots, a_n\} \Rightarrow A^{o} = 0$

$$D| \quad \{a_1, \dots, a_n\}^{o} = \left(\overline{\{a_1, \dots, a_n\}^{c}}\right)^{c} = \left(\overline{X - \{a_1, \dots, a_n\}}\right)^{c} =$$

$$= X^{c} = 0$$

(w8) $\overline{A^{o}} \subset \overline{A}$

D| Wynika z własności (w1) wnętrza zbioru i własności (d2) domknięcia zbioru

(w9) $A^{o} \subset (\overline{A})^{o}$

D| Wynika z własności (d1) domknięcia zbioru i własności (w2) wnętrza zbioru.

(w10) $A^{o} \subset A \subset \overline{A}$

D| Wynika z własności (d1) domknięcia zbioru i własności (w1) wnętrza zbioru.

§ 53. Zbiór domknięty

Niech A będzie dowolnym zbiorem w przestrzeni metrycznej X.

$$A \text{ jest } \underline{\text{zbiorem domkniętym}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A = \overline{A}$$

Z własności (d3) domknięcia zbioru wynika, że domknięcie zbioru jest zawsze zbiorem domkniętym. Z własności (d4) i (d5) domknięcia zbioru wynika, że zbiór pusty i cała przestrzeń X są zbiorami domkniętymi. Z własności (d7) domknięcia zbiorów wynika, że każdy zbiór skończony, tzn. zbiór złożony ze skończonej liczby elementów, jest zbiorem domkniętym.

§ 54. Zbiór otwarty

Niech A będzie dowolnym zbiorem w przestrzeni metrycznej X.

$$A \text{ jest } \underline{\text{zbiorem otwartym}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A = A^{o}$$

Z własności (w3) wnętrza zbioru wynika, że wnętrze zbioru jest zawsze zbiorem otwartym. Z własności (w4) i (w5) wnętrza zbioru wynika, że zbiór pusty i cała przestrzeń X są zbiorami otwartymi. Zatem zbiór pusty i cała przestrzeń X są zarówno zbiorami domkniętymi, jak zbiorami otwartymi.

§ 55. Twierdzenie

Dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym.

D] $A = A^0 \iff A = (\overline{A^c})^c \iff A^c = \overline{A^c}$

§ 56. Twierdzenie

Dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym.

D] $A = \bar{A} \Rightarrow A^c = (\bar{A})^c \Rightarrow$

$\Rightarrow (A^c)^0 = [(\bar{A})^c]^0 = (\bar{\bar{A}})^c = (\bar{A})^c = A^c$

§ 57. Twierdzenie

Iloczyn dowolnej mnogości $\mathcal{F}$ zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

D] $(A = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F) \wedge (\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}) \Rightarrow (\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} A \subset F) \wedge (\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} \bar{A} \subset \bar{F}) \wedge (\bigwedge_{F\in\mathcal{F}} F = \bar{F}) \Rightarrow \bigwedge_{F\in\mathcal{F}} \bar{A} \subset F \Rightarrow \bar{A} \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \Rightarrow \bar{A} \subset A$

skąd na mocy własności (d1) domknięcia zbioru

$$A = \bar{A}$$

§ 58. Twierdzenie

Suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

D] Na mocy własności (d6) domknięcia zbioru

$$A_k = \bar{A}_k \text{ dla } k = 1,\dots,n \quad \Rightarrow \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$