piszemy

$$x_k \searrow x$$

Z definicji granicy ciągu punktów w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$ wynika, że każdy monotoniczny ciąg (x_k) jest zbieżny.

§ 72. Granica lewostronna i granica prawostronna funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$

Niech będzie dana funkcja rzeczywista F o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}_0^n$. Jeżeli istnieje taki punkt $x \in \mathfrak{R}_0^n$ i taka liczba $g \in \mathfrak{R}_0$, że

$$\bigwedge_{\substack{x_1, x_2, \ldots \in Z \\ x_k \nearrow x}} \lim_{k \to \infty} F(x_k) = g$$

to liczbę g (skończoną lub nieskończoną) będziemy nazywać granicą lewostronną funkcji F w punkcie x.

Analogicznie określamy granicę prawostronną funkcji F w punkcie x.

Ze względu na wygodę zapisu będziemy oznaczać granicę lewostronną funkcji F w punkcie x symbolem

$$F(x-)$$

a granicę prawostronną funkcji F w punkcie x symbolem

$$F(x+)$$

§ 73. Granica funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$

Liczbę rzeczywistą skończoną lub nieskończoną g będziemy nazywać granicą funkcji rzeczywistej F w punkcie x^* wtedy i tylko wtedy, gdy F jest funkcją rzeczywistą o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}_0^n$, istnieją granice lewostronna $F(x^*-)$ i prawostronna $F(x^*+)$, a ponadto

$$g = F(x^*-) = F(x^*+)$$

Będziemy wtedy pisać

$$g = \lim_{x \to x^*} F(x)$$

albo

$$F(x) \xrightarrow[x \to x^*]{} g$$

§ 74. Ciągłość lewostronna i ciągłość prawostronna funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}^n_0$

Niech będzie dana funkcja rzeczywista F o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}^n_0$. Będziemy mówić, że funkcja F jest lewostronnie ciągła w punkcie $x \in Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F(x-) = F(x)$$

Gdy funkcja F jest lewostronnie ciągła w każdym punkcie $x \in Z$, nazywamy ją funkcją lewostronnie ciągłą. Analogicznie określamy funkcję prawostronnie ciągłą w punkcie i funkcję prawostronnie ciągłą.

§ 75. Ciągłość funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}^n_0$

Niech będzie dana funkcja rzeczywista F o dziedzinie $Z \subset \mathfrak{R}^n_0$. Będziemy mówić, że funkcja F jest ciągła w punkcie $x^* \in Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x^*} F(x) = F(x^*)$$

Jak wynika z tej definicji, funkcja F jest ciągła w punkcie $x^* \in Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zarówno lewostronnie jak i prawostronnie ciągła w tym punkcie.

Gdy funkcja F jest ciągła w każdym punkcie $x \in Z$, nazywamy ją funkcją ciągłą.

§ 76. Przedziały w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$

Niech będą dane dwa dowolne punkty $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{R}^n_0$, gdzie $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{R}_0$. Przedziałami w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ będziemy nazywać następujące zbiory:

$$(a;\ b) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in \mathfrak{R}^n \wedge a < x < b\}$$

$$(a;\ b> \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in \mathfrak{R}^n \wedge a < x \leqslant b\}$$

$$<a;\ b) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in \mathfrak{R}^n \wedge a \leqslant x < b\}$$

$$<a;\ b> \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in \mathfrak{R}^n \wedge a \leqslant x \leqslant b\}$$

Z definicji tej wynika w szczególności, że

$$(-\infty;b) = \langle-\infty;b) = \{x:\ x \in \mathfrak{R}^n \wedge x < b\}$$

$$(-\infty;b\rangle = \langle-\infty;b\rangle = \{x:\ x \in \mathfrak{R}^n \wedge x \leqslant b\}$$

$$(a;\infty) = (a;\infty\rangle = \{x:\ x \in \mathfrak{R}^n \wedge x > a\}$$

$$\langle a;\infty) = \langle a;\infty\rangle = \{x:\ x \in \mathfrak{R}^n \wedge x \geqslant a\}$$

$$(-\infty;\infty) = (-\infty;\infty\rangle = \langle-\infty;\infty) = \langle-\infty;\infty\rangle = \mathfrak{R}^n$$

Punkty a, $b \in \mathfrak{R}^n_0$ nazywamy <u>końcami przedziału</u>. Dla końców przedziału jest zawsze

$$a \leqslant b$$

<u>Przedziałem wymiernym</u> nazywamy przedział o końcach $a = (a_1,\dots,a_n)$, $b = (b_1,\dots,b_n)$, gdy $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots b_n$ są liczbami wymiernymi. Przedziały o końcach a, $b \in \mathfrak{R}^n$ nazywamy <u>przedziałami ograniczonymi</u>. Pozostałe przedziały nazywamy <u>przedziałami nieograniczonymi</u>. Przedział jest zatem nieograniczony, jeżeli

$$\bigvee_{j\in\{1,\dots,n\}} a_j = -\infty \vee b_j = \infty$$

Przedziały $(a;b)$, $(-\infty;b)$, $(a;\infty)$, $(-\infty;\infty)$ nazywamy <u>przedziałami otwartymi</u>. Są one zbiorami otwartymi. Przedziały $\langle a;b\rangle$, $\langle-\infty;b\rangle$, $\langle a;\infty\rangle$, $\langle-\infty;\infty\rangle$ nazywamy <u>przedziałami domkniętymi</u>. Są one zbiorami domkniętymi. Przedział $(a;a)$ jest zbiorem pustym.

Przedziały $\langle a;b)$, $\langle-\infty;b)$, $\langle a;\infty)$, $\langle-\infty;\infty)$ nazywamy <u>przedziałami lewostronnie domkniętymi</u>, a przedziały $(a;b\rangle$, $(-\infty;b\rangle$, $(a;\infty\rangle$, $(-\infty;\infty\rangle$ <u>przedziałami prawostronnie domkniętymi</u>. Zbiór pusty zaliczamy do przedziałów lewostronnie domkniętych i przedziałów prawostronnie domkniętych (dla $a = b$).

Przedziały $(-\infty;b)$ są zarówno przedziałami otwartymi, jak i lewostronnie domkniętymi, ale gdy chcemy zaakcentować, że chodzi nam o przedział lewostronnie domknięty, piszemy go w postaci $\langle-\infty;b)$. Przedziały $(-\infty;b\rangle$ są zarówno przedziałami domkniętymi, jak i prawostronnie domkniętymi, ale gdy chcemy zaakcentować, że chodzi nam o przedział domknięty, piszemy $\langle-\infty;b\rangle$. Analogicznie, przedziały $(a;\infty)$ są zarówno przedziałami otwartymi, jak i prawostronnie domkniętymi i piszemy je również jako $(a;\infty\rangle$, a przedziały $\langle a;\infty)$ są zarówno przedziałami domkniętymi, jak i lewostronnie domkniętymi i piszemy je również jako $\langle a;\infty\rangle$. Przedział $(-\infty;\infty)$ piszemy również jako $\langle-\infty;\infty\rangle$, $\langle-\infty;\infty)$ lub $(-\infty;\infty\rangle$ ponieważ jest on zarazem przedziałem otwartym, domkniętym, lewostronnie domkniętym i prawostronnie domkniętym.

Przedział domknięty $\langle a;b\rangle$ nazywamy przedziałem zdegenerowanym, jeżeli

$$\bigvee_{j\in\{1,\dots,n\}} a_j = b_j \in \Re$$

W przypadku istnienia takiego j, że $a_j = b_j = -\infty$ albo $a_j = b_j = \infty$, przedział z definicji jest zbiorem pustym.

Ścianami przedziału nazywamy zbiory określone wzorami:

$$P_j^+ \overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1,\dots,x_n) : (x_1,\dots,x_n)\in\Re^n \wedge \bigwedge_{k\neq j} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \wedge x_j = b_j\right\}$$

$$P_j^- \overset{\text{def}}{=} \left\{(x_1,\dots,x_n) : (x_1,\dots,x_n)\in\Re^n \wedge \bigwedge_{k\neq j} a_k \leqslant x_k \leqslant b_k \wedge x_j = a_j\right\}$$

Wynika stąd, że

$$b_j = \infty \Rightarrow P_j^+ = 0 \quad \text{oraz} \quad a_j = -\infty \Rightarrow P_j^- = 0$$

Zbiory P_j^+ nazywamy ścianami prawostronnymi przedziału, a zbiory P_j^- ścianami lewostronnymi przedziału. Zachodzą następujące związki:

$$\langle a;b\rangle = (a;b) + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^+$$
$$\langle a;b) = (a;b) + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^-$$
$$(10) \qquad \langle a;b\rangle = (a;b\rangle + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^-$$
$$\langle a;b\rangle = \langle a;b) + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^+$$
$$\langle a;b\rangle = (a;b) + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^- + \bigcup_{j=1}^{n} P_j^+$$

Zauważmy, że ściany przedziału są zdegenerowanymi przedziałami domkniętymi.

Przedziały nazywamy przedziałami nie zachodzącymi na siebie, jeżeli ich wnętrza są rozłączne. Innymi słowy, przedziały $P_1,\dots,P_n$ lub $P_1, P_2,\dots$ nie zachodzą na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{j,k\\ j\neq k}} P_j^o \cap P_k^o = 0$$

Przedziały nie zachodzące na siebie mogą być rozłączne, ale mogą również mieć punkty wspólne, np. jedną ścianę wspólną.

§ 77. Przyrost funkcji rzeczywistej określonej w przestrzeni $\mathfrak{R}_0^n$.

Niech F będzie funkcją rzeczywistą określoną na zbiorze $Z \subset \mathfrak{R}_0^n$ i niech $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Z$, gdzie $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{R}_0$. Przyrostem funkcji F na przedziale $\langle x; y \rangle$ albo po prostu przyrostem funkcji F nazywamy n-tą różnicę mieszaną

$$\Delta_y^n F(x) = \Delta^n_{(y_1)_1, \ldots, (y_n)_n} F(x_1, \ldots, x_n)$$

funkcji F w punkcie x, określoną rekurencyjnie wzorami

$$(\Delta 1)\quad \Delta^1_{(y_m)_m} F(x_1, \ldots, x_n) \overset{\mathrm{def}}{=} F(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n) \text{ dla } m = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_k})_{m_k}} F(x_1, \ldots, x_n) \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta^1_{(y_{m_k})_{m_k}} \left(\Delta^{k-1}_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_{k-1}})_{m_{k-1}}} F(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

dla $k = 2, \ldots, n$; $m_1, \ldots, m_k \in \{1, \ldots, n\}$; $\bigwedge_{\substack{r,s \in \{1,\ldots,k\} \\ r \neq s}} m_r \neq m_s$.

Ze wzorów powyższych wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $p < k$ jest

$$(\Delta 2)\quad \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_k})_{m_k}} F(x_1, \ldots, x_n) = \Delta^{k-p}_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}, \ldots, (y_{m_k})_{m_k}} \left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_p})_{m_p}} F(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

ponieważ

$$\Delta^{k-p}_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}, \ldots, (y_{m_k})_{m_k}} \left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_p})_{m_p}} F(x_1, \ldots, x_n) \right) =$$

$$= \Delta^1_{(y_{m_k})_{m_k}} \cdots \Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}} \left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_p})_{m_p}} F(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

Funkcję F nazywamy funkcją n-wymiarowo niemalejącą, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\Delta 3)\quad \bigwedge_{\substack{x,y \in Z \\ x \leq y}} \Delta_y^n F(x) \geq 0$$

§ 78. Twierdzenie

$$(\Delta 4)\quad \bigwedge_{k \in \{1,\ldots,n\}} \ \bigwedge_{\substack{(m_1,\ldots,m_k) \\ m_1,\ldots,m_k \in \{1,\ldots,n\} \\ \bigwedge_{\substack{r,s \in \{1,\ldots,k\} \\ r \neq s}} m_r \neq m_s}} \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1}, \ldots, (y_{m_k})_{m_k}} F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(j_1, \ldots, j_k)} (-1)^{j_1 + \ldots + j_k} F(z_1, \ldots, z_n)$$

gdzie przy zachowaniu oznaczeń z § 77 jest

$$(\Delta 5) \qquad \bigwedge_{l\in\{1,\dots,k\}} j_l = 1 \vee j_l = 2$$

oraz

$$(\Delta 6)\Big(\bigwedge_{t\in\{1,\dots,n\}} (t\notin\{m_1,\dots,m_k\}\Rightarrow z_t = x_t)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{l\in\{1,\dots,k\}} (j_l = 1\Rightarrow z_{m_l} = x_{m_l})\wedge(j_l = 2\Rightarrow z_{m_l} = y_{m_l})\Big)$$

a sumowanie we wzorze $(\Delta 4)$ rozciąga się na wszystkie możliwe 2^k ciągów $(j_1,\dots,j_k)$.

D] Dowód przeprowadzamy przez indukcję. Sprawdzamy, że wzór $(\Delta 4)$ jest prawdziwy dla $k = 1$, gdyż

$$\bigwedge_{m_1\in\{1,\dots,n\}} \Delta^1_{(y_{m_1})_{m_1}} F(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= F(x_1,\dots,x_{m_1-1}, y_{m_1}, x_{m_1+1},\dots,x_n) - F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{(j_1)} (-1)^{j_1} F(z_1,\dots,z_n)$$

Załóżmy teraz, że wzór $(\Delta 4)$ jest prawdziwy dla $k = p$. Mamy wtedy na mocy $(\Delta 1)$ i $(\Delta 4)$

$$\Delta^{p+1}_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}} F(x_1,\dots,x_n) = \Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\Big(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}} F(x_1,\dots,x_n)\Big) =$$

$$= \sum_{(j_1,\dots,j_p)} (-1)^{j_1+\dots+j_p} F(z_1,\dots,z_{m_{p+1}-1}, y_{m_{p+1}}, z_{m_{p+1}+1},\dots,z_n) - \sum_{(j_1,\dots,j_p)} (-1)^{j_1+\dots+j_p} F(z_1,\dots,z_n) =$$

$$= \sum_{(j_1,\dots,j_{p+1})} (-1)^{j_1+\dots+j_{p+1}} F(z_1,\dots,z_n)$$

Zatem z prawdziwości wzoru $(\Delta 4)$ dla $k = p\in\{1,\dots,n-1\}$ wynika jego prawdziwość dla $k = p + 1$, co kończy dowód twierdzenia.

§ 79. Twierdzenie

$$\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n\}} \quad \bigwedge_{\substack{(m_1,\dots,m_k)\\ m_1,\dots,m_k\in\{1,\dots,n\}\\ \bigwedge_{\substack{r,s\in\{1,\dots,k\}\\ r\neq s}} m_r\neq m_s}} \quad \bigwedge_{\substack{(p_1,\dots,p_k)\\ \{p_1,\dots,p_k\}=\{m_1,\dots,m_k\}}} \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_k})_{m_k}} F(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \Delta^k_{(y_{p_1})_{p_1},\dots,(y_{p_k})_{p_k}} F(x_1,\dots,x_n)$$

gdzie zostały utrzymane oznaczenia § 78.

D| Na mocy twierdzenia § 78 jest

$$(*)\qquad \Delta^{k}_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}} F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{(j_1,\ldots,j_k)} (-1)^{j_1+\ldots+j_k} F(z_1,\ldots,z_n)$$

gdzie

$$\bigwedge_{l\in\{1,\ldots,k\}} j_l=1 \vee j_l=2$$

oraz

$$\Big(\bigwedge_{t\in\{1,\ldots,n\}}(t\notin\{m_1,\ldots,m_k\}\Rightarrow z_t=x_t)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{l\in\{1,\ldots,k\}}(j_l=1\Rightarrow z_{m_l}=x_{m_l})\wedge(j_l=2\Rightarrow z_{m_l}=y_{m_l})\Big)$$

i analogicznie

$$(**)\qquad \Delta^{k}_{(y_{p_1})_{p_1},\ldots,(y_{p_k})_{p_k}} F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{(\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_k)} (-1)^{\bar{j}_1+\ldots+\bar{j}_k} F(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)$$

gdzie

$$\bigwedge_{l\in\{1,\ldots,k\}} \bar{j}_l=1 \vee \bar{j}_l=2$$

oraz

$$\Big(\bigwedge_{t\in\{1,\ldots,n\}}(t\notin\{p_1,\ldots,p_k\}\Rightarrow \bar{z}_t=x_t)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{l\in\{1,\ldots,k\}}(\bar{j}_l=1\Rightarrow \bar{z}_{p_l}=x_{p_l})\wedge(\bar{j}_l=2\Rightarrow \bar{z}_{p_l}=y_{p_l})\Big)$$

Ze względu na to, że

$$\{p_1,\ldots,p_k\}=\{m_1,\ldots,m_k\}$$

a sumowania rozciągają się odpowiednio na wszystkie ciągi $(j_1,\ldots,j_k)$ i na wszystkie ciągi $(\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_k)$, można między ciągami $(j_1,\ldots,j_k)$ i ciągami $(\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_k)$ ustalić odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną, spełniającą warunki

$$(***)\qquad j_1+\ldots+j_k=\bar{j}_1+\ldots+\bar{j}_k \wedge \bigwedge_{t\in\{1,\ldots,n\}} z_t=\bar{z}_t$$

Innymi słowy dla każdego ciągu $(j_1,\ldots,j_k)$ istnieje dokładnie jeden ciąg $(\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_k)$ spełniający warunki (***) i odwrotnie, dla każdego ciągu $(\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_k)$ istnieje dokładnie jeden ciąg $(j_1,\ldots,j_k)$ spełniający warunki (***). Wynika stąd równość sum (*) i (**), czyli teza twierdzenia.

§ 80. Twierdzenie

$$\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n\}} \ \bigwedge_{\substack{(m_1,\dots,m_k)\\ m_1,\dots,m_k\in\{1,\dots,n\}\\ \bigwedge\limits_{\substack{r,s\in\{1,\dots,k\}\\ r\neq s}} m_r\neq m_s}} \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_k})_{m_k}}\left[F_1(x_1,\dots,x_n)+F_2(x_1,\dots,x_n)\right]=$$

$$=\Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_k})_{m_k}} F_1(x_1,\dots,x_n)+\Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_k})_{m_k}} F_2(x_1,\dots,x_n)$$

gdzie zostały zachowane oznaczenia § 77 i § 78.

D| Przeprowadzimy dowód przez indukcję. Dla $k = 1$ mamy

$$\Delta^1_{(y_{m_1})_{m_1}}\left[F_1(x_1,\dots,x_n)+F_2(x_1,\dots,x_n)\right]=$$

$$=F_1(x_1,\dots,x_{m_1-1},y_{m_1},x_{m_1+1},\dots,x_n)+F_2(x_1,\dots,x_{m_1-1},y_{m_1},x_{m_1+1},\dots,x_n)-F_1(x_1,\dots,x_n)-F_2(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\left[F_1(x_1,\dots,x_{m_1-1},y_{m_1},x_{m_1+1},\dots,x_n)-F_1(x_1,\dots,x_n)\right]+\left[F_2(x_1,\dots,x_{m_1-1},y_{m_1},x_{m_1+1},\dots,x_n)-F_2(x_1,\dots,x_n)\right]=$$

$$=\Delta^1_{(y_{m_1})_{m_1}} F_1(x_1,\dots,x_n)+\Delta^1_{(y_{m_1})_{m_1}} F_2(x_1,\dots,x_n)$$

Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla $k = p$. Mamy wtedy

$$\Delta^{p+1}_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\left[F_1(x_1,\dots,x_n)+F_2(x_1,\dots,x_n)\right]=$$

$$=\Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}}\left[F_1(x_1,\dots,x_n)+F_2(x_1,\dots,x_n)\right]\right)=$$

$$=\Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}} F_1(x_1,\dots,x_n)+\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}} F_2(x_1,\dots,x_n)\right)=$$

$$=\Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}} F_1(x_1,\dots,x_n)\right)+\Delta^1_{(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}}\left(\Delta^p_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_p})_{m_p}} F_2(x_1,\dots,x_n)\right)=$$

$$=\Delta^{p+1}_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}} F_1(x_1,\dots,x_n)+\Delta^{p+1}_{(y_{m_1})_{m_1},\dots,(y_{m_{p+1}})_{m_{p+1}}} F_2(x_1,\dots,x_n)$$

Z prawdziwości wzoru dla $k = p$ wynika zatem prawdziwość tego wzoru dla $k = p + 1$, co kończy dowód twierdzenia.

§ 81. Twierdzenie

$$\bigwedge_{\substack{k\in\{1,\ldots,n\}\\ c\in\mathfrak{R}}} \bigwedge_{\substack{(m_1,\ldots,m_k)\\ m_1,\ldots,m_k\in\{1,\ldots,n\}\\ \bigwedge\limits_{\substack{r,s\in\{1,\ldots,k\}\\ r\neq s}} m_r\neq m_s}} \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}}\left[c\cdot F(x_1,\ldots,x_n)\right] =$$

$$= c\cdot \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}} F(x_1,\ldots,x_k),$$

gdzie zostały zachowane oznaczenia § 77 i § 78.

D| Dowód przez indukcję jest oczywisty.

§ 82. Twierdzenie

$$\bigwedge_{k\in\{1,\ldots,n\}} \bigwedge_{\substack{(m_1,\ldots,m_k)\\ m_1,\ldots,m_k\in\{1,\ldots,n\}\\ \bigwedge\limits_{\substack{r,s\in\{1,\ldots,k\}\\ r\neq s}} m_r\neq m_s}} \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}}\left[F_1(x_1,\ldots,x_n) - F_2(x_1,\ldots,x_n)\right] =$$

$$= \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}} F_1(x_1,\ldots,x_n) - \Delta^k_{(y_{m_1})_{m_1},\ldots,(y_{m_k})_{m_k}} F_2(x_1,\ldots,x_n)$$

gdzie zostały zachowane oznaczenia z § 77 i § 78.

D| Wynika z równości $F_1 - F_2 = F_1 + (-1)\cdot F_2$ i twierdzeń § 80 i § 81.

§ 83. Podział normalny przedziału lewostronnie domkniętego

Niech $A = \langle a;b)$, gdzie $a = (a_1,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathfrak{R}_0^n$ oraz $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n \in \mathfrak{R}_0$.

Niech $c_{jl} \in \mathfrak{R}_0$, $j = 1,\ldots,n$; $l = 0,1,\ldots,k_j$ będą liczbami skończonymi lub nieskończonymi spełniającymi warunek

(*) $$\bigwedge_{j\in\{1,\ldots,n\}} a_j = c_{j0} \leqslant c_{j1} \leqslant \ldots \leqslant c_{jk_j} = b_j$$

Niech wreszcie

(**) $$\bigwedge_{\substack{(l_1,\ldots,l_n)\\ l_j\in\{1,\ldots,k_j\}\text{ dla } j=1,\ldots,n}} A_{l_1,\ldots,l_n} \overset{\text{def}}{=} \langle \alpha_{l_1,\ldots,l_n};\ \beta_{l_1,\ldots,l_n})$$

gdzie

$$\alpha_{l_1,\ldots,l_n} = (c_{1,l_1-1},\ldots,c_{n,l_n-1}),\quad \beta_{l_1,\ldots,l_n} = (c_{1l_1},\ldots,c_{nl_n})$$

Wynika stąd, że

(***) $$A = \sum_{l_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{l_n=1}^{k_n} A_{l_1,\ldots,l_n}$$

Przedział lewostronnie domknięty A jest tutaj sumą $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ rozłącznych przedziałów lewostronnie domkniętych $A_{l_1,\ldots,l_n}$ zdefiniowanych wzorem (**). Przedstawienie przedziału A w postaci sumy (***) będziemy nazywać <u>podziałem normalnym przedziału lewostronnie domkniętego</u> A, a przedziały lewostronnie domknięte (**) <u>częściami normalnymi przedziału</u> A.

§ 84. Twierdzenie

<u>Z</u>] $A, A_1,\ldots,A_m$ są przedziałami lewostronnie domkniętymi w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$

$$A = \sum_{k=1}^{m} A_k$$

<u>T</u>] Istnieją takie podziały normalne przedziałów $A_1,\ldots,A_m$

(i) $$A_k = \sum_{l=1}^{m_k} B_{kl},\qquad k = 1,\ldots,m,$$

że przedstawienie przedziału A w postaci

(ii) $$A = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m_k} B_{kl}$$

jest podziałem normalnym przedziału A.

<u>D</u>] Niech

$$A_k = \langle a_k ; b_k),\qquad a_k, b_k \in \mathfrak{R}_0^n,\qquad k = 1,\ldots,m,$$

gdzie

$$a_k = (a_{k1},\ldots,a_{kn}),\quad b_k = (b_{k1},\ldots,b_{kn})$$
$$a_{k1},\ldots,a_{kn},\quad b_{k1},\ldots,b_{kn} \in \mathfrak{R}_0.$$

Niech

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} J_j \overset{\text{def}}{=} \left\{a_{1j},\dots,a_{mj},\quad b_{1j},\dots,b_{mj}\right\}$$

Każdy ze zbiorów J_j składa się zatem z co najwyżej $2m$ różnych liczb skończonych lub nieskończonych. Porządkujemy je w każdym ze zbiorów J_j według wielkości. Otrzymujemy w ten sposób

$$\text{(iii)}\qquad \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} J_j = (c_{j0},\dots,c_{jk_j}) \wedge c_{j0} < \dots < c_{jk_j} \wedge k_j \leqslant 2m$$

a ponadto

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \bigwedge_{t\in\{1,\dots,k_j\}} \bigvee_{k\in\{1,\dots,m\}} c_{jt} = a_{kj} \vee c_{jt} = b_{kj}$$

(iv)

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \bigwedge_{k\in\{1,\dots,m\}} \bigvee_{t,\tau\in\{1,\dots,k_j\}} a_{kj} = c_{jt} \wedge b_{kj} = c_{j\tau}$$

Niech

$$A = \langle a;b\rangle,\qquad a,b\in \mathcal{R}_0^n$$

Z założenia i wzoru (iii) wynika, że

$$a = (c_{10},\dots,c_{n0}),\qquad b = (c_{1k_1},\dots,c_{nk_n})$$

czyli że są spełnione warunki (*) z § 83. Wprowadzając jak w tamtym paragrafie przedziały (**), otrzymujemy podział normalny przedziału A, dany wzorem (***). Można również zauważyć, że

$$\bigwedge_{k\in\{1,\dots,m\}} \bigvee_{B_{k1},\dots,B_{km_k}\in\{A_{l_1},\dots,l_n\}} A_k = \sum_{l=1}^{m_k} B_{kl}$$

i przedstawienie to jest podziałem normalnym przedziału A_k.

Ze względu na założoną rozłączność przedziałów $A_1,\dots,A_m$ sumę (***) można uporządkować do postaci (ii). Stwierdzenie to kończy dowód twierdzenia.

§ 85. Figury elementarne

Figurą elementarną w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ nazywamy sumę skończonej liczby przedziałów domkniętych i ograniczonych. Zbiór pusty też zaliczamy do figur elementarnych.

Figury elementarne $Q_1,\dots,Q_m$ lub $Q_1, Q_2,\dots$ nazywamy nie zachodzącymi na siebie wtedy i tylko wtedy, gdy ich wnętrza są rozłączne, tzn. gdy $j \neq k \Rightarrow Q_j^\circ \cap Q_k^\circ = 0$ $(j,k \in \mathfrak{N})$. Innymi słowy, figury elementarne $Q_1,\dots,Q_m$ lub $Q_1, Q_2,\dots$ nie zachodzą na siebie, jeśli każda para tych figur Q_j, Q_k $(j \neq k)$ jest rozłączna albo zbiór jej punktów wspólnych jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych, ograniczonych i zdegenerowanych.

§ 86. Twierdzenie

Każda figura elementarna w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych, ograniczonych i nie zachodzących na siebie.

D] Niech

$$Q = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$$

gdzie Q jest dowolną figurą elementarną w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ a $A_1,\dots,A_m$ przedziałami domkniętymi ograniczonymi o końcach odpowiednio

$$a_k = (a_{k1},\dots,a_{kn}), \qquad b_k = (b_{k1},\dots,b_{kn}) \quad \text{dla} \quad k = 1,\dots,m,$$

gdzie $a_{k1},\dots,a_{kn}, \; b_{k1},\dots,b_{kn} \in \mathfrak{R}$. Niech

$$\bigwedge_{j=\{1,\dots,n\}} J_j \overset{\text{def}}{=} \{a_{1j},\dots,a_{mj}, \; b_{1j},\dots,b_{mj}\}$$

Każdy ze zbiorów J_j składa się zatem z co najwyżej $2m$ różnych liczb. Porządkujemy je w każdym ze zbiorów J_j według wielkości. Otrzymujemy w ten sposób

$$(*) \quad \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} J_j = (c_{j1},\dots,c_{jl_j}) \wedge c_{j1} < \dots < c_{jl_j} \wedge l_j \leq 2m \; \wedge$$
$$\wedge \Big(\bigwedge_{r\in\{1,\dots,l_j\}} \; \bigvee_{k\in\{1,\dots,m\}} c_{jr} = a_{kj} \vee c_{jr} = b_{kj} \Big)$$

a ponadto

$$(**) \quad \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \Big(\bigwedge_{k\in\{1,\dots,m\}} \; \bigvee_{r,s\in\{1,\dots,l_j\}} a_{kj} = c_{jr} \wedge b_{kj} = c_{js} \Big)$$

Rozpatrzmy przedział domknięty $\langle u;v\rangle$, gdzie $u,v \in \mathfrak{R}^n$ i

$$u = (c_{11}, c_{21},\dots,c_{n1}), \qquad v = (c_{1l_1}, c_{2l_2},\dots,c_{nl_n})$$

Przedział ten na mocy (*) jest sumą $(l_1-1)(l_2-1)\cdot\ldots\cdot(l_n-1)$ przedziałów domkniętych nie zachodzących na siebie. Ponadto na mocy (**) każdy z przedziałów A_k jest sumą skończonej liczby spośród tych przedziałów, jak również zbiór Q jest sumą skończonej liczby takich przedziałów. Skreślając w tej sumie powtarzające się ewentualnie przedziały, otrzymujemy, że Q jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych nie zachodzących na siebie.

§ 87. Ciało Q figur elementarnych lewostronnie domkniętych

Zbiór $A\subset\mathfrak{R}^n$ nazywamy figurą elementarną lewostronnie domkniętą, jeżeli A jest skończoną sumą przedziałów lewostronnie domkniętych. Oznaczmy symbolem Q klasę wszystkich figur elementarnych lewostronnie domkniętych w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$, a symbolem P_l klasę wszystkich przedziałów lewostronnie domkniętych. Klasa Q ma następujące własności:

(q1) $A,\ B\in Q \Rightarrow A\cup B\in Q$

D| Wynika wprost z definicji klasy Q.

(q2) $A,\ B\in Q \Rightarrow A\cap B\in Q$

D| $A,\ B\in Q \Rightarrow \bigvee_{A_1,\ldots,A_r,B_1,\ldots,B_s\in P_l} A=\bigcup_{j=1}^{r}A_j \wedge$

$$\wedge B=\bigcup_{l=1}^{s}B_l \Rightarrow A\cap B=\left(\bigcup_{j=1}^{r}A_j\right)\cap\left(\bigcup_{l=1}^{s}B_l\right)=\bigcup_{j=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{s}A_j\cap B_l$$

Ponieważ każdy ze zbiorów $A_j\cap B_l$ jest przedziałem lewostronnie domkniętym, gdyż nawet zbiór pusty daje się napisać w postaci $\langle a;a)$, gdzie $a\in\mathfrak{R}^n$ i jest także przedziałem lewostronnie domkniętym, więc stwierdziliśmy, że zbiór $A\cap B$ jest skończoną sumą przedziałów lewostronnie domkniętych i tym samym należy do klasy Q.

(q3) $A\in P_l \Rightarrow A^c\in Q$

D| Niech $A=\langle a,b)$, gdzie $a,b\in\mathfrak{R}_0^n$ i $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)$, $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n\in\mathfrak{R}_0$.

Otóż całą przestrzeń $\mathfrak{R}^n$ można podzielić na 3^n rozłącznych przedziałów lewostronnie domkniętych

$$\langle\alpha_j;\ \beta_j),\quad \alpha_j=(\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jn}),\quad \beta_j=(\beta_{j1},\ldots,\beta_{jn}),\ j=1,\ldots,3^n,$$

takich, że

$$\bigwedge_{j\in\{1,\dots,3^n\}}\ \bigwedge_{l\in\{1,\dots,n\}}(\alpha_{jl}=-\infty\wedge\beta_{jl}=a_l)\vee(\alpha_{jl}=a_l\wedge\beta_{jl}=b_l)\vee$$

$$\vee\,(\alpha_{jl}=b_l\wedge\beta_{jl}=\infty)$$

z tym, że niektóre z tych przedziałów mogą być puste. Podział ten jest podziałem normalnym całej przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ będącej, jak już wiemy, przedziałem lewostronnie domkniętym. Sam przedział $\langle a;b)$ jest jedną z części normalnych przestrzeni $\mathfrak{R}^n$. Dopełnienie tego przedziału jest sumą pozostałych 3^n-1 części normalnych przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ i tym samym należy do klasy Q.

(q4) $A\in Q\Rightarrow A^c\in Q$

D] $A\in Q\Rightarrow \bigvee_{A_1,\dots,A_r\in P_l} A=\bigcup_{j=1}^{r}A_j\Rightarrow \bigvee_{A_1,\dots,A_r\in P_l} A^c=\left(\bigcup_{j=1}^{r}A_j\right)^c=\bigcap_{j=1}^{r}A_j^c$

Na mocy (q3) $A_j^c\in Q$ dla $j=1,\dots,r$. Wobec tego na mocy (q2) $A^c\in Q$.

(q5) Klasa Q jest ciałem zbiorów

D] Klasa Q nie jest pusta, bo zawiera wszystkie przedziały lewostronnie domknięte. Tym samym spełnia warunek ($\varkappa$1) dla ciał zbiorów. Własność (q4) oznacza spełnienie warunku ($\varkappa$2), a własność (q1) spełnienie warunku ($\varkappa$3). Zatem klasa Q jest ciałem zbiorów

(q6) $A\in Q\Rightarrow \bigvee_{A_1,\dots,A_m\in P_l} A=\sum_{j=1}^{m}A_j$

D] Analogiczny do dowodu twierdzenia § 86.

§ 88. Twierdzenie

Klasa przedziałów wymiernych otwartych w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ jest przeliczalna.

D] Każdy przedział wymierny otwarty jest w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ określony przez końce

$$a=\left(\frac{p_1}{q_1},\dots,\frac{p_n}{q_n}\right),\quad b=\left(\frac{r_1}{t_1},\dots,\frac{r_n}{t_n}\right)$$

gdzie można założyć, że $p_1,\dots,p_n$, $r_1,\dots,r_n$ są liczbami całkowitymi, a $q_1,\dots,q_n$, $t_1,\dots,t_n$ liczbami naturalnymi. Ze względu na warunek $a<b$ oraz na warunek, że ułamki

$$\frac{p_1}{q_1},\dots,\ \frac{p_n}{q_n},\ \frac{r_1}{t_1},\dots,\ \frac{r_n}{t_n}$$

powinny być nieprzywiedlne, klasa wszystkich przedziałów wymiernych otwartych w $\mathfrak{R}^n$ jest co najwyżej tej samej mocy, co klasa wszystkich ciągów postaci

$$(p_1,\dots,p_n,\ r_1,\dots,r_n,\ q_1,\dots,q_n,\ t_1,\dots,t_n)$$

czyli co najwyżej tej samej mocy, co produkt kartezjański

$$\underbrace{\mathfrak{I}\times\ldots\times\mathfrak{I}}_{2n\ \text{razy}}\times\underbrace{\mathfrak{N}\times\ldots\times\mathfrak{N}}_{2n\ \text{razy}}$$

i na mocy twierdzeń § 13 i § 14 jest co najwyżej przeliczalna. Ponieważ przy tym klasa wszystkich przedziałów wymiernych otwartych w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ jest nieskończona, więc jest przeliczalna.

§ 89. Twierdzenie

Klasa przedziałów wymiernych domkniętych, klasa przedziałów wymiernych lewostronnie domkniętych i klasa przedziałów wymiernych prawostronnie domkniętych w przestrzeni $\mathfrak{R}^n$ są przeliczalne.

D| Analogiczny do dowodu twierdzenia § 88.

§ 90. Twierdzenie

Jeżeli dla dowolnego $A\subset\mathfrak{R}^n$ jest

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

gdzie

$$\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}}A_k=\langle a_k;b_k\rangle,\quad a_k,\ b_k\in\mathfrak{R}^n$$

to

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathfrak{R}\\ \varepsilon>0}}\ \bigvee_{B_1,B_2,\ldots\subset\mathfrak{R}^n}\ A=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\wedge\Big(\bigwedge_{j\in\mathfrak{N}}B_j=\langle\alpha_j;\beta_j\rangle\ \wedge\ \alpha_j,\beta_j\in\mathfrak{R}^n\wedge d(B_j)<\varepsilon\Big)$$

gdzie $d(B_j)$ oznacza średnicę przedziału $B_j = \langle \alpha_j ; \beta_j \rangle$ (por. § 48).

D| Niech

$$a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}), \quad b_k = (b_{k1}, \dots, b_{kn})$$

$$a_{k1}, \dots, a_{kn}, b_{k1}, \dots, b_{kn} \in \mathfrak{R} \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\dots$$

Niech $\delta \in \mathfrak{R}$ będzie dowolną liczbą spełniającą warunek

(i) $$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

i niech $m_1, m_2, \dots \in \mathfrak{N}$ będą dowolnymi liczbami naturalnymi spełniającymi warunek

(ii) $$\frac{\max\limits_j (b_{kj} - a_{kj})}{m_k} < \delta \quad \text{dla} \quad k = 1,2,\dots$$

Jeśli każdy przedział $\langle a_{kj} ; b_{kj} \rangle \subset \mathfrak{R}$ podzielimy na m_k równych części ($k = 1,2,\dots$), to możemy go przedstawić jako sumę m_k przedziałów domkniętych ograniczonych i nie zachodzących na siebie o długościach – na mocy (ii) – mniejszych od δ. Tym samym każdy n-wymiarowy przedział A_k możemy przedstawić jako sumę $(m_k)^n$ n-wymiarowych przedziałów domkniętych, ograniczonych, nie zachodzących na siebie o średnicach mniejszych od $\sqrt{n\delta^2}$, czyli na mocy (i) – mniejszych od ε. Wypisując najpierw $(m_1)^n$ przedziałów powstałych z podziału A_1, potem $(m_2)^n$ przedziałów powstałych z podziału A_2 itd., otrzymujemy ciąg $(B_1, B_2, \dots)$ o żądanych własnościach.

§ 91. Twierdzenie

Z| $A = \langle a ; b \rangle \wedge a, b \in \mathfrak{R}^n$

$C_1, C_2, \dots$ zbiory otwarte w $\mathfrak{R}^n$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k \supset A$

T| $\bigvee\limits_{k_1, \dots, k_m \in \mathfrak{N}} \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_{k_j} \supset A$

D| Niech średnica przedziału A będzie równa d_0. Niech

$$a = (a_1, \dots a_n), \qquad b = (b_1, \dots, b_n)$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{R}$. Połowieniem przedziału A nazwijmy przedstawienie go w postaci sumy przedziałów $D_1, \ldots, D_{2^n}$ domkniętych i nie zachodzących na siebie

$$A = \bigcup_{l=1}^{2^n} D_l$$

gdzie

$$\bigwedge_{l \in \{1,\ldots,2^n\}} D_l = \langle c_l ; d_l \rangle \wedge c_l, d_l \in \mathfrak{R}^n$$

$$c_l = (c_{l1}, \ldots, c_{ln}), \qquad d_l = (d_{l1}, \ldots, d_{ln})$$

$$c_{l1}, \ldots, c_{ln}, \qquad d_{l1}, \ldots d_{ln} \in \mathfrak{R}$$

$$\text{dla} \quad l = 1, \ldots, 2^n$$

oraz

$$\bigwedge_{l \in \{1,\ldots,2^n\}} \bigwedge_{s \in \{1,\ldots,n\}} \left(c_{ls} = a_s \wedge d_{ls} = \frac{a_s + b_s}{2}\right) \vee \left(c_{ls} = \frac{a_s + b_s}{2} \wedge d_{ls} = b_s\right)$$

Jak z powyższego wynika, średnica każdego z przedziałów $D_1, \ldots, D_{2^n}$ jest równa $d_1 = \frac{d_0}{2}$.

Załóżmy, że teza twierdzenia nie jest prawdziwa, czyli

$$\bigwedge_{m \in \mathfrak{N}} \bigvee_{x_m \in \mathfrak{R}^n} x_m \in A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k$$

Ponieważ zbiory $A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ tworzą ciąg zstępujący, więc

$$\text{(i)} \qquad \bigwedge_{\substack{w \in \mathfrak{N} \\ w \geq m}} x_w \in A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k$$

Wykażemy, że z ciągu $x_1, x_2, \ldots$ można wybrać ciąg zbieżny.

Przedział A zawiera wszystkie, a więc nieskończenie wiele punktów ciągu $x_1, x_2, \ldots$ Wobec tego istnieje między przedziałami $D_1, \ldots, D_{2^n}$, otrzymanymi przez połowienie przedziału A, taki, który zawiera nieskończenie wiele punktów ciągu $x_1, x_2, \ldots$ Nazwijmy go A_1. Połowiąc przedział A_1 znajdujemy przedział A_2 o średnicy

$$d_2 = \frac{d_1}{2} = \frac{d_0}{2^2}$$

zawierający nieskończenie wiele spośród punktów ciągu $x_1, x_2, \ldots$ Przedłużając postępowanie otrzymujemy ciąg przedziałów domkniętych

(ii) $$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$$

o średnicach odpowiednio d_0, d_1, $d_2, \ldots$ spełniających warunek

$$\lim_{k \to \infty} d_k = 0,$$

z których każdy zawiera nieskończenie wiele spośród punktów ciągu $x_1, x_2, \ldots$ Niech

$$x_{j_l} \in A_l \quad \text{dla} \quad l = 0, 1, \ldots, \qquad j_1 < j_2 < \ldots$$

Na mocy (ii)

$$\bigwedge_{l} \bigwedge_{\substack{u,v \in \mathfrak{N} \\ u,v \geq l}} \left| x_{j_u} - x_{j_v} \right| \leq d_l = \frac{d_0}{2^l}$$

i wobec tego ciąg punktów $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń $\mathfrak{R}^n$ jest zupełna, ciąg $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots$ jest zbieżny. Niech

$$x = \lim_{l \to \infty} x_{j_l}$$

Ponieważ zbiory $A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k$ są domknięte, więc na mocy definicji domknięcia zbioru i własności (i)

$$\bigwedge_{m \in \mathfrak{N}} x \in A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k \quad \text{czyli} \quad x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k\right)$$

Ponieważ dalej

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(A - \bigcup_{k=1}^{m} C_k\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left[A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{m} C_k\right)^c\right] = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left[A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} C_k^c\right)\right] = A \cap \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{m} C_k^c\right) = A \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k^c = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right)^c = A - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

więc

$$x \in A - \bigcup_{k=1}^{\infty} C_1$$

co przeczy założeniu, że

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \supset A$$

Wobec tego teza twierdzenia musi być prawdziwa.