$$\Rightarrow \bigwedge_{\substack{B_1,B_2,\ldots\in\mathcal{K}\\ \sum_{k=1}^{\infty} B_k\in\mathcal{K}}} \lambda\Big(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big)=\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(B_1+\ldots+B_k)\Big)=\lim_{k\to\infty}\lambda(B_1+\ldots+B_k)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda(B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(B_k)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda$ **jest przeliczalnie addytywna na** $\mathcal{K}$.

§ 102. Własności przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru

Funkcja przeliczalnie addytywna λ o dziedzinie $\mathcal{K}$ będącej ciałem podzbiorów ustalonej przestrzeni X ma następujące własności:

(p1) $\lambda(0) = 0$

D| $\bigvee_{A\in\mathcal{K}} |\lambda(A)| < \infty \Rightarrow \big(\lambda(A) = \lambda(A + 0 + 0 + \ldots) =$
$= \lambda(A) + \lambda(0) + \lambda(0) + \ldots \Rightarrow \lambda(0) = 0\big)$

(p2) **λ jest przeliczalnie addytywna na ciele $\mathcal{K} \Rightarrow \lambda$ jest addytywna na $\mathcal{K}$.**

D| **Na mocy (π1) i (π2) funkcja przeliczalnie addytywna λ spełnia warunki (α1) i (α2). Ponadto na mocy (p1) jest**

$$\bigwedge_{A,B\in\mathcal{K}} \lambda(A+B) = \lambda(A+B+0+0+\ldots) = \lambda(A) + \lambda(B) + \lambda(0) + \lambda(0) + \ldots = \lambda(A) + \lambda(B)$$

a zatem funkcja λ spełnia również warunek (α3) i jest addytywna na $\mathcal{K}$.

(p3) $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{K}} \lambda(A_1 + \ldots + A_n) = \lambda(A_1) + \ldots + \lambda(A_n)$

D| **Wynika z (p2) i (a2).**

(p4) $\bigvee'_{A,B\in\mathcal{K}} \lambda(A) = \infty \wedge \lambda(B) = -\infty$

D| **Wynika z (p2) i (a3).**

(p5) **λ jest skończona $\Leftrightarrow |\lambda(X)| < \infty$**

D| **Wynika z (p2) i (a4).**

(p6) **λ jest niemalejąca $\Leftrightarrow \bigwedge_{A\in\mathcal{K}} \lambda(A) \geq 0$.**

D| **Wynika z (p2) i (a5).**

(p7) $\bigwedge_{\substack{A_1 \subset A_2 \subset \ldots \in \mathcal{K} \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}}} \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k)$

D| Z twierdzenia § 101.

(p8) $\bigwedge_{\substack{A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{K} \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K} \\ |\lambda(A_1)| < \infty}} \lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k)$

D| $|\lambda(A_1)| < \infty \Rightarrow \Big(\lambda(A_1) = \lambda\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k + (A_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)\Big) = \lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) + \lambda(A_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lambda(A_1) - \lambda(A_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lambda(A_1) - \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 - A_k)\Big) \underset{(p7)}{=}$

$\underset{(p7)}{=} \lambda(A_1) - \lim_{k \to \infty} \lambda(A_1 - A_k)\Big)$

Ale

$$\bigwedge_{k=1,2,\ldots} |\lambda(A_1)| < \infty \Rightarrow \big(\lambda(A_1) = \lambda(A_k + (A_1 - A_k)) = \lambda(A_k) + \lambda(A_1 - A_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(A_1 - A_k) = \lambda(A_1) - \lambda(A_k)\big)$$

więc

$$\lambda\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lambda(A_1) - \lim_{k \to \infty} \big(\lambda(A_1) - \lambda(A_k)\big) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k)$$

(p9) $\bigwedge_{\substack{A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{K} \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \\ |\lambda(A_1)| < \infty}} \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k) = 0$

D| Wynika z (p8) i (p1).

(p10) $\bigwedge_{\substack{A, B \in \mathcal{K} \\ |\lambda(B)| < \infty}} \lambda(B - A) = \lambda(B - A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$

D| Wynika z (p2) i (a6).

(p11) $\bigwedge_{\substack{A, B \in \mathcal{K} \\ |\lambda(B)| < \infty}} \lambda(A \cap B) = \lambda(B) - \lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(B - A \cap B)$

D| Wynika z (p2) i (a7).

§ 103. Dystrybuanta

Dystrybuantą n-wymiarową albo po prostu dystrybuantą nazywamy każdą funkcję F spełniającą następujące warunki:

(F1) F jest funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest cała przestrzeń $\mathfrak{R}_0^n$,

(F2) F jest n-wymiarowo niemalejąca,

(F3) F jest lewostronnie ciągła,

(F4) $\bigwedge\limits_{j\in\{1,\dots,n\}} \bigwedge\limits_{x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{R}_0} \lim\limits_{x_j\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n) =$
$= F(x_1,\dots,x_{j-1}, -\infty, x_{j+1},\dots,x_n) = 0,$

(F5) $F(\infty) = 1$

Dystrybuanta ma następujące własności:

(f1) $\bigwedge\limits_{x\in\mathfrak{R}_0^n} \Delta_x^n F(-\infty) = F(x)$

D| Wynika z twierdzenia § 78 i własności (F4), ponieważ w sumie ($\Delta 4$) tylko jeden składnik nie zawiera współrzędnej $-\infty$.

(f2) $\bigwedge\limits_{x,y\in\mathfrak{R}_0^n} x\leqslant y \Rightarrow F(x)\leqslant F(y)$

D| Niech Φ będzie funkcją addytywną przedziału lewostronnie domkniętego, daną zgodnie z twierdzeniem § 97 wzorem

$$\bigwedge_{x,y\in\mathfrak{R}_0^n} \Phi(\langle x;y)) \overset{\text{def}}{=} \Delta_y^n F(x)$$

Ze względu na warunek $x\leqslant y$ obowiązujący dla przedziału $\langle x;y)$ mamy na mocy (F2)

(*) $$\bigwedge_{x,y\in\mathfrak{R}_0^n} \Phi(\langle x;y))\geqslant 0$$

Niech Ψ będzie funkcją addytywną figury elementarnej lewostronnie domkniętej otrzymaną zgodnie z twierdzeniem § 99 przez przedłużenie funkcji Φ i spełniającej zatem warunek

(**) $$\bigwedge_{A\in\mathcal{P}_l} \Psi(A) = \Phi(A)$$

gdzie $\mathcal{P}_l$ oznacza klasę wszystkich przedziałów lewostronnie domkniętych. Z uwagi na wzór (ii) z § 99 określający funkcję Ψ mamy na mocy (*)

$$\bigwedge_{A\in Q} \Psi(A) \geqslant 0$$

gdzie Q jest ciałem figur elementarnych lewostronnie domkniętych. Wobec tego na mocy własności (a5) addytywnych funkcji zbioru funkcja ψ jest niemalejąca i wobec tego, że

$$x \leqslant y \Rightarrow \langle -\infty; x) \subset \langle -\infty; y)$$

otrzymujemy

$$x \leqslant y \Rightarrow \psi\Big(\langle -\infty; x)\Big) \leqslant \psi\Big(\langle -\infty; y)\Big)$$

skąd na mocy (**)

$$x \leqslant y \Rightarrow \Phi\Big(\langle -\infty; x)\Big) \leqslant \Phi\Big(\langle -\infty; y)\Big)$$

czyli

$$x \leqslant y \Rightarrow \Delta_x^n F(-\infty) \leqslant \Delta_y^n F(-\infty)$$

a stąd na mocy (f1) ostatecznie własność (f2).

(f3) $\bigwedge_{x \in \mathcal{R}_0^n} 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

D| Wynika z własności (F5), (f2) oraz z faktu, że na mocy (F4) jest $F(-\infty) = 0$.

(f4) $\bigwedge_{j \in \{1,\ldots,n\}} F^*(x_1,\ldots,x_{j-1}, x_{j+1},\ldots,x_n) \underline{\underline{\mathrm{def}}}$
$\underline{\underline{\mathrm{def}}}\ F(x_1,\ldots,x_{j-1}, \infty, x_{j+1},\ldots,x_n)$ jest dystrybuantą $(n-1)$-wymiarową.

D| F^* jest funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest cała przestrzeń $\mathfrak{R}_0^{n-1}$ i spełnia tym samym warunek (F1).

Mamy dalej dla $(x_1,\ldots,x_{j-1}, x_{j+1},\ldots,x_n) \leqslant (y_1,\ldots,y_{j-1}, y_{j+1},\ldots,y_n)$

$$\Delta^{n-1}_{(y_1)_1,\ldots,(y_{j-1})_{j-1},(y_{j+1})_{j+1},\ldots,(y_n)_n} F^*(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \Delta^{n-1}_{(y_1)_1,\ldots,(y_{j-1})_{j-1},(y_{j+1})_{j+1},\ldots,(y_n)_n} F(x_1,\ldots,x_{j-1},\infty,x_{j+1},\ldots,x_n) \underset{(F4)}{=}$$

$$\underset{(F4)}{=} \Delta^{n-1}_{(y_1)_1,\ldots,(y_{j-1})_{j-1},(y_{j+1})_{j+1},\ldots,(y_n)_n} \Big[F(x_1,\ldots,x_{j-1},\infty,x_{j+1},\ldots,x_n) -$$

$$- F(x_1,\ldots,x_{j-1},-\infty,x_{j+1},\ldots,x_n)\Big] =$$

$$= \Delta^{n-1}_{(y_1)_1,\ldots,(y_{j-1})_{j-1},(y_{j+1})_{j+1},\ldots,(y_n)_n} \Delta^1_{(\infty)_j} F(x_1,\ldots,x_{j-1},-\infty,x_{j+1},\ldots,x_n) =$$

$$= \Delta^{n}_{(y_1)_1,\dots,(y_{j-1})_{j-1},(\infty)_j,(y_{j+1})_{j+1},\dots,(y_n)_n} F(x_1,\dots,x_{j-1},-\infty,x_{j+1},\dots,x_n) \geq 0$$

na mocy (F2). Wynika stąd, że funkcja F^* jest $(n-1)$-wymiarowo niemalejąca, czyli spełnia warunek (F2). Z lewostronnej ciągłości funkcji F wynika bezpośrednio lewostronna ciągłość funkcji F^*, czyli spełnienie przez nią warunku (F3). Spełnienie warunków (F4) i (F5) wynika z definicji funkcji F^*. Zatem funkcja F^* istotnie jest dystrybuantą $(n-1)$-wymiarową.

(f5) Jeśli w dystrybuancie $F(x_1,\dots,x_n)$ na k spośród zmiennych $x_1,\dots,x_n$ $(k<n)$ podstawić ∞, to otrzymana w ten sposób funkcja $n-k$ zmiennych jest dystrybuantą $(n-k)$-wymiarową.

D| Wynika z k-krotnego zastosowania własności (f4).

§ 104. Twierdzenie

Z| Funkcja F jest dystrybuantą n-wymiarową.

Φ jest funkcją addytywną przedziału lewostronnie domkniętego, określoną zgodnie z twierdzeniem § 97 wzorem

(i) $$\bigwedge_{x,y\in\mathcal{R}_0^n} \Phi(\langle x;y)) \overset{\text{def}}{=} \Delta_y^n F(x)$$

Ψ jest funkcją addytywną figury elementarnej lewostronnie domkniętej o dziedzinie $\mathcal{Q}$ będącej ciałem wszystkich figur elementarnych lewostronnie domkniętych, otrzymaną przez przedłużenie funkcji Φ, tzn. spełniającą warunek

(ii) $$\bigvee_{A\in\mathcal{P}_l} \Psi(A)=\Phi(A)$$

gdzie $\mathcal{P}_l$ jest klasą wszystkich przedziałów lewostronnie domkniętych, i zgodnie z twierdzeniem § 97 dla

$$A = \sum_{j=1}^{m} A_j, \quad \text{gdzie } A_1,\dots,A_m \in \mathcal{P}_l$$

określoną wzorem

(iii) $$\Psi(A) = \sum_{j=1}^{m} \Phi(A_j)$$

T| Ψ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru.

D| Dowód przeprowadzimy w 3 częściach: T1, T2, T3.

T1| Jeżeli $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{P}_l$ oraz

(iv) $$A_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

to

(v) $$\psi(A_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \psi(A_k)$$

D| Ze względu na warunek, że $A_0, A_1, \ldots \in \mathcal{P}_l$, nierówrość (v) jest równoważna

(vi) $$\Phi(A_0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$$

Niech

$$\bigwedge_{k \in \{0,1,\ldots\}} A_k = \langle a_k ; b_k \rangle, \quad \text{gdzie} \quad a_k, b_k \in \mathcal{R}_0^n$$

Z lewostronnej ciągłości funkcji F wynika na mocy (i), że

(vii) $$\bigwedge_{y \in \mathcal{R}_0^n} \ \bigwedge_{\substack{x, x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{R}_0^n \\ x_\nu \nearrow x}} \lim_{\nu \to \infty} \Phi(\langle x_\nu ; y \rangle) = \Phi(\langle x ; y \rangle)$$

Wobec tego

(viii) $$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \ \bigwedge_{k \in \mathcal{N}} \ \bigvee_{\substack{\alpha_k \in \mathcal{R}_0^n \\ \alpha_k \leqslant a_k}} \langle a_k ; b_k \rangle \subset (\alpha_k ; b_k) \ \wedge$$

$$\wedge \ 0 \leqslant \Phi(\langle \alpha_k ; b_k \rangle) - \Phi(\langle a_k ; b_k \rangle) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

(W dowodzie własności (f2) w § 103 wykazaliśmy, że funkcja ψ, a więc i funkcja Φ są niemalejące i nieujemne).

Gdy punkty a_0 i b_0 mają chociażby jedną ze współrzędnych równą, wtedy na mocy (i) $\Phi(A_0) = 0$ i nierówność (vi) jest spełniona. Załóżmy więc, że

(ix) $$a_0 < b_0$$

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy a_0, $b_0 \in \mathcal{R}^n$ czyli

(x) $$-\infty < a_0 < b_0 < \infty$$

Mamy wtedy

(xi) $$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \ \bigvee_{\substack{\beta_0 \in \mathcal{R}^n \\ a_0 < \beta_0 < b_0}} \langle a_0 ; \beta_0 \rangle \subset \langle a_0 ; b_0 \rangle \ \wedge$$

$$\wedge \ 0 \leqslant \Phi(\langle a_0 ; b_0 \rangle) - \Phi(\langle a_0 ; \beta_0 \rangle) < \frac{\varepsilon}{2}$$

i na mocy (iv), (viii), (xi)

$$\langle a_0;\beta_0\rangle \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k;b_k)$$

Z twierdzenia § 91 wynika, że numerację zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ można tak dobrać, aby

$$\bigvee_{m\in\mathfrak{N}} \langle a_0;\beta_0\rangle \subset \bigcup_{k=1}^{m}(\alpha_k;b_k)$$

skąd

$$\langle a_0;\beta_0) \subset \bigcup_{k=1}^{m}\langle \alpha_k;b_k)$$

a następnie, biorąc pod uwagę, że funkcja ψ jest niemalejącą funkcją addytywną zbioru, a zbiór

$$\bigcup_{k=1}^{m}\langle \alpha_k;b_k)=\sum_{k=1}^{m}\left(\langle \alpha_k;b_k)-\bigcup_{j=1}^{k-1}\langle \alpha_j;b_j)\right)$$

jest figurą elementarną lewostronnie domkniętą, na równi ze zbiorami

$$\langle \alpha_k;b_k)-\bigcup_{j=1}^{k-1}\langle \alpha_j;b_j),\quad k=1,\ldots,m,$$

otrzymujemy

$$\psi(\langle a_0;\beta_0))\leqslant\psi\left(\bigcup_{k=1}^{m}\langle \alpha_k;b_k)\right)=\psi\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\langle \alpha_k;b_k)-\bigcup_{j=1}^{k-1}\langle \alpha_j;b_j)\right]\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\psi\left(\langle \alpha_k;b_k)-\bigcup_{j=1}^{k-1}\langle \alpha_j;b_j)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\psi(\langle \alpha_k;b_k))$$

Wynika stąd, że

$$\Phi(\langle a_0;\beta_0))\leqslant\sum_{k=1}^{m}\Phi(\langle \alpha_k;b_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(\langle \alpha_k;b_k))$$

i na mocy (viii), (xi)

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \Phi(\langle a_0;b_0))-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(\langle a_k;b_k))+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

czyli

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \Phi(A_0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(A_k)+\varepsilon$$

Ze względu na dowolność liczby ε otrzymujemy stąd nierówność (vi).

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy warunek (x) nie jest spełniony. Na mocy (i) oraz własności (F4) dystrybuanty F

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \bigwedge_{\substack{a_0=(a_{01},\dots,a_{0n})\in\mathcal{R}_0^n\\ a_{01},\dots,a_{0n}<\infty}} \bigwedge_{b_0\in\mathcal{R}_0^n} \bigvee_{\substack{\alpha_0=(\alpha_{01},\dots,\alpha_{0n})\in\mathcal{R}^n\\ \alpha_0\geq a_0}} \left(\bigwedge_{\substack{a_{0l}\in\mathcal{R}\\ l\in\{1,\dots,n\}}} a_{0l}=\alpha_{0l}\right)\wedge$$

$$\wedge\ 0\leq\Phi(\langle a_0;b_0))-\Phi(\langle\alpha_0;b_0))<\frac{\varepsilon}{2}$$

natomiast z (vii) wynika, że

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \bigwedge_{\substack{a_0,b_0\in\mathcal{R}_0^n\\ b_0=(b_{01},\dots,b_{0n})\\ b_{01},\dots,b_{0n}>-\infty}} \bigvee_{\substack{\beta_0\in\mathcal{R}^n\\ \beta_0\leq b_0}} 0\leq\Phi(\langle a_0;b_0))-\Phi(\langle a_0;\beta_0))<\frac{\varepsilon}{2}$$

(Przypadek, gdy jedna z liczb $a_{01},\dots,a_{0n}$ byłaby równa ∞, nie wchodzi w rachubę, gdyż wtedy nie byłaby spełniona nierówność (ix). Analogicznie musi być $b_{01},\dots,b_{0n}>-\infty$). Wobec powyższego mamy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \bigwedge_{a_0,b_0\in\mathcal{R}_0^n} \bigvee_{\alpha_0,\beta_0\in\mathcal{R}^n} 0\leq\Phi(\langle a_0;b_0))-\Phi(\langle\alpha_0;\beta_0))<\varepsilon .$$

Na podstawie przypadku już udowodnionego mamy zatem

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon\in\mathcal{R}\\ \varepsilon>0}} \Phi(\langle a_0;b_0))-\varepsilon<\Phi(\langle\alpha_0;\beta_0))\leq\sum_{k=1}^{\infty}\Phi(A_k)$$

skąd na mocy dowolności liczby ε nierówność (vi) w przypadku ogólnym, co kończy dowód T1.

T2| Funkcja ψ jest w klasie $\mathcal{P}_l$ przeliczalnie addytywna, tzn. jeżeli

$$A=\sum_{k=1}^{\infty}A_k,\qquad A,A_1,A_2,\dots\in\mathcal{P}_l$$

to

(xii) $$\psi(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(A_k)$$

D| Z faktu, że funkcja ψ jest niemalejącą funkcją zbioru, wynika, że

$$\bigwedge_{m\in\mathcal{N}}\psi\left(\sum_{k=1}^{m}A_k\right)\leq\psi(A)$$

czyli na mocy addytywności funkcji ψ

$$\bigwedge_{m\in\mathfrak{N}} \sum_{k=1}^{m} \psi(A_k)\leq\psi(A)$$

Ze względu na dowolność liczby m mamy po przejściu do granicy

(xiii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(A_k)<\psi(A)$$

Z dowodu części T1 wynika na mocy (v), że

(xiv) $$\psi(A)\leq \sum_{k=1}^{\infty} \psi(A_k)$$

Z nierówności (xiii) i (xiv) wynika równość (xii).

T3| ψ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru.

D| Niech

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{gdzie } A, A_1, A_2, \ldots \in Q$$

Na mocy własności (q6) ciała Q mamy

$$A = \sum_{j=1}^{m} B_j$$

$$A_k = \sum_{r=1}^{m_k} B_{kr}, \qquad k = 1,2,\ldots$$

gdzie

$$\left(\bigwedge_{j} B_j \in \mathfrak{L}_l\right) \wedge \left(\bigwedge_{k,r} B_{kr} \in \mathfrak{L}_l\right)$$

Wobec tego

$$\bigwedge_{j\in\{1,\ldots,m\}} B_j = B_j \cap A = B_j \cap \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cap B_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m_k} B_{kr}\right) \cap B_j = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m_k} B_{kr} \cap B_j$$

oraz

(xv) $$\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k = A_k \cap A = \left(\sum_{r=1}^{m_k} B_{kr}\right) \cap \left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_k} B_{kr} \cap B_j$$

Ponieważ B_j oraz $B_{kr} \cap B_j$ są przedziałami lewostronnie domkniętymi, a przedziałów $B_{kr} \cap B_j$ w sumie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m_k} B_{kr} \cap B_j$$

jest przeliczalnie wiele, gdyż możemy je ustawić w ciąg wypisując najpierw m_1 przedziałów dla $k = 1$, potem m_2 przedziałów dla $k = 2$ itd., więc na podstawie dowodu części T2 mamy

$$\bigwedge_j \psi(B_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j)$$

skąd na mocy addytywności funkcji ψ

$$\psi(A) = \sum_{j=1}^{m} \psi(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j)$$

Ponieważ na mocy tego, że funkcja ψ jest nieujemna, mamy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} \bigwedge_{j \in \{1,\dots,m\}} \bigvee_{s_j \in \mathcal{N}} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j) - \sum_{k=1}^{s_j} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

więc dla dowolnej liczby s spełniającej warunek $s \geq \max(s_1, \dots s_m)$ jest

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} 0 \leq \psi(A) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j) < \varepsilon$$

czyli

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} 0 \leq \psi(A) - \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j) < \varepsilon$$

Ze względu na dowolność liczby s otrzymujemy po przejściu do granicy

$$\bigwedge_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{R} \\ \varepsilon > 0}} 0 \leq \psi(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j) < \varepsilon$$

a ze względu na dowolność liczby ε

$$\psi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_k} \psi(B_{kr} \cap B_j)$$

Ale z addytywności funkcji ψ i wzoru (xv) wynika, że

$$\psi(A_k)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m_k}\psi(B_{kr}\cap B_j)$$

Wobec tego

$$\psi(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(A_k)$$

co oznacza spełnienie przez funkcję ψ warunku (π3) dla przeliczalnie addytywnej funkcji zbioru. Ponieważ na mocy addytywności tej funkcji warunki (π1) i (π2) były spełnione, funkcja ψ jest przeliczalnie addytywna. W ten sposób został zakończony dowód twierdzenia § 104.

§ 105. Miara

Miarą nazywamy każdą nieujemną przeliczalnie addytywną funkcję zbioru μ o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów ustalonej przestrzeni X. Innymi słowy, miarą w pewnej ustalonej przestrzeni X nazywamy każdą funkcję μ spełniającą następujące warunki:

(μ1) μ jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X

(μ2) $\bigvee\limits_{A\in\mathcal{S}} |\mu(A)|<\infty$

(μ3) $\bigwedge\limits_{A\in\mathcal{S}} \mu(A)\geqslant 0$

(μ4) $\bigwedge\limits_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}} \mu\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$

A oto własności miary:

(m1) $\mu(0) = 0$

D] Wynika z (p1).

(m2) $\bigwedge\limits_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}} \mu\left(\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(A_k)$

D] Wynika z (p3).

(m3) $\bigwedge\limits_{A,B\in\mathcal{S}} \left(A\subset B\Rightarrow\mu(A)\leqslant\mu(B)\right)$

D| Wynika z (μ3) i (p6).

(m4) $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} \mu(A)<\infty \Leftrightarrow \mu(X)<\infty$

D| Wynika z (p5) i (μ3).

(m5) $\bigwedge_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

D| $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)\right) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right) \underset{(m3)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

(m6) $\bigwedge_{A_1,\ldots A_n\in\mathcal{S}} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$

D| Analogiczny jak dla (m5).

(m7) $\bigwedge_{A_1\subset A_2\subset\ldots\in\mathcal{S}} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$

D| Wynika z (p7).

(m8) $\bigwedge_{\substack{A_1\supset A_2\supset\ldots\in\mathcal{S}\\ \mu(A_1)<\infty}} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$

D| Wynika z (p8).

(m9) $\bigwedge_{\substack{A,B\in\mathcal{S}\\ \mu(B)<\infty}} \mu(B-A) = \mu(B-A\cap B) = \mu(B) - \mu(A\cap B)$

D| Wynika z (p10).

(m10) $\bigwedge_{\substack{A,B\in\mathcal{S}\\ \mu(B)<\infty}} \mu(A\cap B) = \mu(B) - \mu(B-A) = \mu(B) - \mu(B-A\cap B)$

D| Wynika z (p11).

§ 106. Miara unormowana

Miarę μ określoną w przestrzeni X nazywamy unormowaną wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(X) = 1$. Innymi słowy, miarą unormowaną w przestrzeni X nazywamy każdą funkcję ν spełniającą następujące warunki:

(ν1) ν jest funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X

(ν2) $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} \nu(A) \geqslant 0$

(ν3) $\nu(X) = 1$

(ν4) $\bigwedge_{A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}} \nu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$

A oto własności miary unormowanej:

(n1) $\nu(0) = 0$

D| Wynika z (m1).

(n2) $\bigwedge_{A,B\in\mathcal{S}} \left(A\subset B \Rightarrow \nu(A)\leqslant\nu(B)\right)$

D| Wynika z (m3).

(n3) $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} 0 \leqslant \nu(A) \leqslant 1$

D| Wynika z (ν2), (n2) i (ν3), ponieważ $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} A\subset X$.

(n4) $\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} \nu(A^c) = 1 - \nu(A)$

D| $A + A^c = X \underset{(\nu 3)}{\Longrightarrow} \nu(A) + \nu(A^c) = 1$

(n5) $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}} \nu\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k)$

D| Wynika z (m2).

(n6) $\bigwedge_{A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k)$

D| Wynika z (m6).

(n7) $\bigwedge_{A_1,A_2,\ldots,\in\mathcal{S}} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$

D| Wynika z (m5).

(n8) $\bigwedge_{A_1\subset A_2\subset\ldots\in\mathcal{S}} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(A_k)$

D| Wynika z (m7).

(n9) $\bigwedge_{A_1 \supset A_2 \supset \ldots \in \mathcal{S}} \nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \nu(A_k)$

D| Wynika z (m8).

(n10) $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{S}} \nu(B - A) = \nu(B - A \cap B) = \nu(B) - \nu(A \cap B)$

D| Wynika z (n3) i (m9).

(n11) $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{S}} \nu(A \cap B) = \nu(B) - \nu(B - A \cap B) = \nu(B) - \nu(B - A)$

D| Wynika z (n10).

(n12) $\bigwedge_{A,B \in \mathcal{S}} \nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) - \nu(A \cap B)$

D| Wynika z (n5) i (n10), ponieważ $A \cup B = A + (B - A)$.

§ 107. Miara skończona i miara półskończona

Miarę μ nazywamy skończoną, jeśli zamiast (μ2) spełnia warunek mocniejszy:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mu(A) < \infty$$

Wprowadzamy jeszcze następujące pojęcia:

$A \in \mathcal{S}$ jest zbiorem miary μ półskończonej $\overset{\text{def}}{\iff}$

$\overset{\text{def}}{\iff} \bigvee_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}} \left(A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \wedge \bigwedge_k \mu(A_k) < \infty\right)$

Miara μ jest półskończona $\overset{\text{def}}{\iff}$ X jest miary μ półskończonej.

Jak wynika z powyższych definicji, miara skończona jest miarą półskończoną, ale miara półskończona może nie być miarą skończoną. Miara unormowana jest na mocy (n3) miarą skończoną, a zatem również miarą półskończoną.

§ 108. Twierdzenie

Miara μ jest półskończona $\iff \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \bigvee_{A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}} \left(A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \wedge \bigwedge_k \mu(A_k) < \infty\right) \iff$

$\iff \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} A$ jest zbiorem miary μ półskończonej.

D| Miara μ jest półskończona $\Rightarrow X$ jest miary μ półskończonej $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bigvee_{C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{S}} \left(X = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \wedge \bigwedge_k \mu(C_k) < \infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \bigvee_{A \cap C_1, A \cap C_2, \ldots \in \mathcal{S}} \left(A = A \cap X = A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap C_k) \wedge \bigwedge_k \mu(A \cap C_k) \leq \mu(C_k) < \infty\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{S}} A$ jest zbiorem miary μ półskończonej.

Z drugiej strony

$\bigwedge_{A\in\mathcal{S}} A$ jest zbiorem miary μ półskończonej $\Rightarrow X$ jest miary μ półskończonej $\underset{(def)}{\Longrightarrow}$ miara μ jest półskończona.

§ 109. Przestrzeń z miarą

Przestrzenią z miarą będziemy nazywać trójkę elementów $(X,\mathcal{S},\mu)$, gdzie μ jest miarą o dziedzinie $\mathcal{S}$ będącej σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X.

W szczególności, gdy miara μ jest unormowana, będziemy mówili o przestrzeni z miarą unormowaną.

W przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będziemy wyróżniać zbiory mierzalne, określone następująco:

$$\text{zbiór } A \text{ jest mierzalny } \mu \overset{def}{\Longleftrightarrow} A\in\mathcal{S}$$

§ 110. Miara zewnętrzna Carathéodory'ego

Miarą zewnętrzną Carathéodory'ego w pewnej ustalonej przestrzeni X nazywamy każdą funkcję μ_e spełniającą następujące warunki:

(ξ1) μ_e jest funkcją rzeczywistą, dla której dziedziną jest klasa wszystkich podzbiorów przestrzeni X

(ξ2) $\mu_e(0) = 0$

(ξ3) $\bigwedge_{A,A_1,A_2,\ldots\subset X}\left(A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow \mu_e(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu_e(A_k)\right)$

A oto własności miary zewnętrznej Carathéodory'ego:

(z1) $\bigwedge_{A,B\subset X}\left(A\subset B\Rightarrow\mu_e(A)\leqslant\mu_e(B)\right)\Leftrightarrow\mu_e$ jest funkcją monotoniczną zbioru.

D| $A\subset B\Rightarrow A\subset(B\cup 0\cup 0\cup\ldots)\underset{(\xi 3)}{\Longrightarrow}\mu_e(A)\leqslant\mu_e(B)+\mu_e(0)+\mu_e(0)+\ldots$
$+\ldots\underset{(\xi 2)}{\Longrightarrow}\mu_e(A)\leqslant\mu_e(B)$

(z2) $\bigwedge_{A\subset X}\mu_e(A)\geqslant 0$

D| $\bigwedge_{A\subset X}\left(0\subset A\underset{(z1)}{\Longrightarrow}\mu_e(0)\leqslant\mu_e(A)\underset{(\xi 2)}{\Longrightarrow}\mu_e(A)\geqslant 0\right)$

(z3) $\bigwedge_{A,A_1,\ldots,A_n\subset X}\left(A\subset\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Rightarrow\mu_e(A)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu_e(A_k)\right)$

D] $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Longrightarrow A \subset (A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup 0 \cup 0 \cup \ldots) \underset{(\xi 3)}{\Longrightarrow}$

$\underset{(\xi 3)}{\Longrightarrow} \mu_e(A) \leq \mu_e(A_1) + \ldots + \mu_e(A_n) + \mu_e(0) +$

$+ \mu_e(0) + \ldots \underset{(\xi 2)}{\Longrightarrow} \mu_e(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_e(A_k)$

(z4) $\bigwedge_{A_1, A_2, \ldots \subset X} \mu_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_e(A_k)$

D] **Wynika z** (ξ3), **ponieważ** $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

(z5) $\bigwedge_{A_1, \ldots, A_n \subset X} \mu_e\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu_e(A_k)$

D] **Wynika z** (z3), **ponieważ** $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

(z6) $\bigwedge_{A,B \subset X} \mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$

D] **Szczególny przypadek** (z5).

(z7) $\bigwedge_{A,Z \subset X} \mu_e(Z) \leq \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A)$

D] $\bigwedge_{A,Z \subset X} Z = (Z \cap A) \cup (Z - A)$

skąd otrzymujemy własność (z7) **na mocy** (z6).

§ 111. Twierdzenie Carathéodory'ego

Z] μ_e **jest miarą zewnętrzną Carathéodory'ego w przestrzeni** X

(14) $$\mathcal{S} \overset{def}{=} \left\{A : A \subset X \wedge \bigwedge_{Z \subset X} \mu_e(Z) = \mu_e(Z \cap A) + \mu_e(Z - A)\right\}$$

T] **I. Klasa** $\mathcal{S}$ **podzbiorów przestrzeni** X **jest** σ**-ciałem.**

II. Miara zewnętrzna μ_e **Carathéodory'ego, rozpatrywana tylko na** $\mathcal{S}$**, jest miarą, tzn. funkcja** μ **określona na** $\mathcal{S}$ **następująco:**

(15) $$\bigwedge_{A \in \mathcal{S}} \mu(A) \overset{def}{=} \mu_e(A)$$

jest miarą.

III. Każdy zbiór miary zewnętrznej Carathéodory'ego zero należy do $\mathcal{S}$ **i ma miarę zero, tzn.**

$$\bigwedge_{A \subset X} \left(\mu_e(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S} \wedge \mu(A) = 0\right)$$