## § 11. Funkcja rzeczywista

Funkcją rzeczywistą nazywamy odwzorowanie dowolnego zbioru $X$ w przestrzeń $\mathfrak{R}_0$. W szczególności, jeśli $X$ jest klasą zbiorów, funkcję rzeczywistą nazywamy funkcją rzeczywistą zbioru.

Skończoną funkcją rzeczywistą nazywamy odwzorowanie dowolnego zbioru $X$ w przestrzeń $\mathfrak{R}$. Gdy $X$ jest klasą zbiorów, mamy do czynienia ze skończoną funkcją rzeczywistą zbioru.

Funkcja rzeczywista $f(x)$ jest ograniczona $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigvee_{a\in\mathfrak{R}} \bigwedge_{x\in X} |f(x)| \leqslant a$.
Jak wynika z tej definicji, funkcja rzeczywista ograniczona jest zawsze skończona. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe. Na przykład gdy $X = \mathfrak{R}$, funkcja rzeczywista $f(x) = x$ jest skończona, ale nie jest ograniczona.

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą zbioru o dziedzinie będącej niepustą klasą zbiorów $Q$.

$f(x)$ jest niemalejącą funkcją rzeczywistą zbioru $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{A,B\in Q} \big(A\subset B \Rightarrow f(A) \leqslant f(B)\big).$$

$f(x)$ jest nierosnącą funkcją rzeczywistą zbioru $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{A,B\in Q} \big(A\subset B \Rightarrow f(A) \geqslant f(B)\big).$$

$f(x)$ jest monotoniczną funkcją rzeczywistą zbioru $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x)$ jest niemalejącą funkcją rzeczywistą zbioru $\vee$
$\vee\ f(x)$ jest nierosnącą funkcją rzeczywistą zbioru.

W przypadku gdy funkcja rzeczywista $f(x)$ jest odwzorowaniem dowolnego zbioru $X\subset \mathfrak{R}_0$ w przestrzeń $\mathfrak{R}_0$, wprowadzamy następujące określenia:

$f(x)$ jest funkcją rosnącą $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1,x_2\in X} \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\big)$

$f(x)$ jest funkcją malejącą $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1,x_2\in X} \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\big)$

$f(x)$ jest funkcją niemalejącą $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1,x_2\in X} \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\big)$

$f(x)$ jest funkcją nierosnącą $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{x_1,x_2\in X} \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\big)$

$f(x)$ jest funkcją monotoniczną $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f(x)$ jest funkcją niemalejącą $\vee f(x)$ jest funkcją nierosnącą.

Funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą, a zatem jest również funkcją monotoniczną. Funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą i tym samym jest także funkcją monotoniczną.

## § 12. Moc zbioru

Zbiory $A$ i $B$ nazywamy zbiorami tej samej mocy, jeżeli istnieje odwzorowanie jedno-jednoznaczne zbioru $A$ na zbiór $B$, czyli jeżeli każdemu elementowi zbioru $A$ można przyporządkować dokładnie jeden element zbioru $B$ i odwrotnie, każdemu elementowi zbioru $B$ można przyporządkować dokładnie jeden element zbioru $A$. Wynika stąd, że jeżeli $A$ i $B$ są zbiorami tej samej mocy oraz $B$ i $C$ są zbiorami tej samej mocy, to $A$ i $C$ są zbiorami tej samej mocy.

Zbiory utworzone ze skończonej liczby $k$ różnych elementów nazywamy zbiorami $k$-elementowymi lub zbiorami skończonymi. Dla ustalonego $k$ wszystkie zbiory $k$-elementowe są tej samej mocy. Ich moc identyfikujemy z liczbą $k$. Zbiory utworzone z nieskończenie wielu różnych elementów nazywamy zbiorami nieskończonymi. Jak pokażemy w § 15 i § 16, dwa zbiory nieskończone mogą nie być tej samej mocy.

Zbiory tej samej mocy co zbiór $\mathfrak{N}$ wszystkich liczb naturalnych nazywamy zbiorami przeliczalnymi. Zbiory skończone i przeliczalne obejmujemy wspólną nazwą zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Innymi słowy, zbiory co najwyżej przeliczalne to zbiory, których elementy można ponumerować lub - co na jedno wychodzi - ustawić w ciąg. Jeśli zbiór co najwyżej przeliczalny jest nieskończony, to jest zbiorem przeliczalnym.

Zbiór, który nie jest co najwyżej przeliczalny, nazywamy zbiorem nieprzeliczalnym. Każdy podzbiór zbioru co najwyżej przeliczalnego jest co najwyżej przeliczalny, a każdy nadzbiór zbioru nieprzeliczalnego jest nieprzeliczalny.

## § 13. Twierdzenie

Produkt kartezjański skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

D| Niech $A_1,\dots,A_n$ będą danymi zbiorami przeliczalnymi i niech

$$A_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots) \quad \text{dla} \quad k = 1,\dots,n$$

Wobec tego elementy produktu kartezjańskiego

$$A_1 \times \dots \times A_n$$

mają postać ciągów $n$-elementowych

$$(*) \qquad (a_{1m_1}, \dots, a_{nm_n})$$

gdzie $m_1, \ldots, m_n$ są dowolnymi liczbami naturalnymi, co piszemy $m_1, \ldots, m_n \in \mathfrak{N}$.

Podzielmy wszystkie takie ciągi (*) na klasy $M_1, M_2, \ldots$ w ten sposób, że do klasy $M_m$ $(m = 1,2,\ldots)$ zaliczymy wszystkie ciągi (*) spełniające warunek

$$(**) \qquad 1 \leqslant m_l \leqslant m \quad \text{dla} \quad l = 1,\ldots,n$$

ale nie spełniające warunku

$$1 \leqslant m_l \leqslant m-1 \quad \text{dla} \quad l = 1,\ldots,n$$

Ponieważ wszystkich ciągów (*) spełniających (**) jest $m^n$, więc do klasy $M_m$ należy $m^n - (m-1)^n$ ciągów (*). Wobec tego wszystkie ciągi (*) można ustawić w ciąg

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

w którym wyrazy

$$\alpha_{(m-1)^n+1}, \ldots, \alpha_{m^n}$$

będą ciągami (*) należącymi do klasy $M_m (m = 1,2,\ldots)$ i ustawionymi w dowolnej kolejności. Skoro wszystkie ciągi (*) dały się ustawić w ciąg, ich zbiór, czyli produkt kartezjański $A_1 \times \ldots \times A_n$ jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Każdy ze zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ jest z założenia przeliczalny, a więc zawiera nieskończenie wiele różnych elementów. Zatem istnieje nieskończenie wiele różnych ciągów (*). Wobec tego produkt kartezjański $A_1 \times \ldots \times A_n$ jako zbiór co najwyżej przeliczalny i nieskończony jest zbiorem przeliczalnym.

## § 14. Twierdzenie

Zbiór $\mathfrak{I}$ wszystkich liczb całkowitych jest przeliczalny.

D] Wszystkie liczby całkowite dają się ustawić w ciąg

$$(0, -1, +1, -2, +2, \ldots)$$

i tworzą zbiór nieskończony. Wobec tego zbiór $\mathfrak{I}$ jest przeliczalny.

§ 15. Twierdzenie

Zbiór $\mathfrak{W}$ wszystkich liczb wymiernych jest przeliczalny.

D| Zbiór wszystkich liczb wymiernych $\frac{p}{q}$ jest tej samej mocy, co zbiór par $(p,q)$, gdzie $p$ jest liczbą całkowitą, a $q$ naturalną, czyli tej samej mocy, co produkt kartezjański $\mathfrak{I} \times \mathfrak{N}$, i na mocy twierdzeń § 13 i § 14 jest przeliczalny.

§ 16. Twierdzenie

Zbiór $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.

D| Ponieważ $\mathfrak{R}$ jest nadzbiorem zbioru $\mathcal{J} \overset{\text{def}}{=} \{x:\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, więc wystarczy pokazać, że zbiór $\mathcal{J}$ jest nieprzeliczalny.

Gdyby zbiór $\mathcal{J}$ był przeliczalny, to wszystkie jego elementy dałyby się ustawić w ciąg $(x_n)$. Załóżmy, że liczby $x_n$ dane są w systemie dziesiętnym. Jak wiadomo, niektóre z liczb rzeczywistych mają dwa różne rozwinięcia dziesiętne np.

$$0{,}12 = 0{,}12000\ldots = 0{,}11999\ldots$$

ale żadna nie ma więcej niż dwu rozwinięć dziesiętnych. Gdybyśmy zatem utworzyli ciąg $(a_k)$ w ten sposób, że jego wyrazy $a_{2n-1}$ i $a_{2n}$ byłyby rozwinięciami dziesiętnymi liczby $x_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ różnymi, gdy $x_n$ ma dwa rozwinięcia dziesiętne, i identycznymi, gdy $x_n$ ma tylko jedno rozwinięcie dziesiętne, to ciąg $(a_k)$ zawierałby wszystkie możliwe rozwinięcia dziesiętne liczb należących do zbioru $\mathcal{J}$. Wtedy można by utworzyć liczbę, która na pierwszym miejscu po przecinku miałaby cyfrę inną niż rozwinięcie $a_1$, na drugim miejscu inną niż rozwinięcie $a_2$ itd. Taka liczba należałaby do zbioru $\mathcal{J}$, a nie należałaby do ciągu $(x_n)$, gdyż jej rozwinięcie dziesiętne byłoby różne od wszystkich rozwinięć $(a_k)$. Przeczy to założeniu, że zbiór $\mathcal{J}$ jest przeliczalny. Wobec tego zbiór $\mathcal{J}$ jest nieprzeliczalny, a tym samym jego nadzbiór $\mathfrak{R}$ jest nieprzeliczalny.

§ 17. Zbiory mocy continuum

Zbiory tej samej mocy co zbiór $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy <u>zbiorami mocy continuum</u>.

## § 18. Działania na zbiorach

Niech $A$ i $B$ oznaczają dowolne podzbiory ustalonej przestrzeni $X$. W przestrzeni tej definiujemy następujące działania:

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x:\ (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

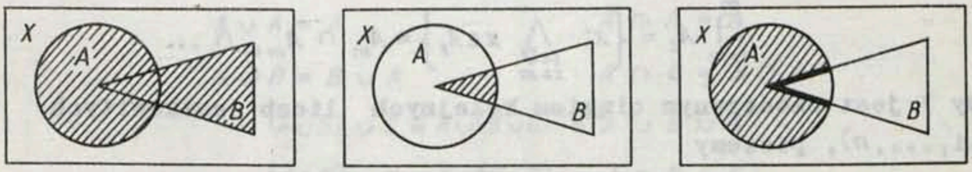
$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x:\ (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

$$A - B \overset{\text{def}}{=} \{x:\ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

$$A^c \overset{\text{def}}{=} X - A$$

Zbiór $A \cup B$ nazywamy <u>sumą</u>, zbiór $A \cap B$ <u>iloczynem</u>, a zbiór $A-B$ <u>różnicą</u> zbiorów $A$ i $B$. Zbiór $A^c$ nazywamy <u>dopełnieniem</u> zbioru $A$.

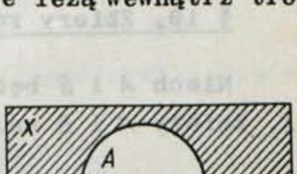
Na przykład, niech $X$ będzie zbiorem wszystkich punktów leżących wewnątrz prostokąta na rys. 1a, 1b, 1c i niech $A$ będzie zbiorem punktów leżących wewnątrz koła, a $B$ zbiorem punktów leżących wewnątrz trójkąta na tychże rysunkach. Wtedy obszar zakreskowany na rys. 1a przedstawia sumę zbiorów $A$ i $B$, obszar zakreskowany na rys. 1b iloczyn, a obszar zakreskowany na rys. 1c różnicę tychże zbiorów.




$A \cup B$ Rys. 1a — $A \cap B$ Rys. 1b — $A - B$ Rys. 1c

Zauważmy, że do zbioru $A - B$ należą również te punkty konturu trójkąta $B$, które leżą wewnątrz koła $A$ (na rys. 1c zostały zaznaczone grubszą linią), ponieważ te punkty nie leżą wewnątrz trójkąta i tym samym nie należą do zbioru $B$.

Niech $X$ będzie teraz zbiorem wszystkich punktów leżących wewnątrz prostokąta na rys. 2 i niech $A$ będzie zbiorem punktów leżących wewnątrz koła na tym rysunku. Wtedy obszar zakreskowany na tymże rysunku przedstawia dopełnienie zbioru $A$.




$A^c$

Rys. 2

Zauważmy, że do zbioru $A^c$ należą tutaj również wszystkie punkty okręgu koła $A$, ponieważ nie leżą one wewnątrz tego koła i tym samym nie należą do zbioru $A$. Gdybyśmy zbiór $A$ określili jako zbiór wszystkich punktów leżących wewnątrz lub na okręgu koła na rys. 2,to punkty okręgu tego koła nie należałyby do zbioru $A^c$.

Definicję sumy i iloczynu zbiorów można uogólnić na dowolną klasę zbiorów $\mathcal{A}$:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \overset{\text{def}}{=} \left\{x:\ \bigvee_{A\in\mathcal{A}} x\in A\right\}$$

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \overset{\text{def}}{=} \left\{x:\ \bigwedge_{A\in\mathcal{A}} x\in A\right\}$$

W szczególności dla rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ piszemy

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \left\{x:\ \bigvee_{t\in T} x\in A_t\right\}$$

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \left\{x:\ \bigwedge_{t\in T} x\in A_t\right\}$$

a gdy $T$ jest ciągiem kolejnych liczb całkowitych $(m, m+1, \ldots)$

$$\bigcup_{t=m}^{\infty} A_t = \left\{x:\ \bigvee_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ t\geq m}} x\in A_t\right\} = A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots$$

$$\bigcap_{t=m}^{\infty} A_t = \left\{x:\ \bigwedge_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ t\geq m}} x\in A_t\right\} = A_m \cap A_{m+1} \cap \ldots$$

Gdy $T$ jest skończonym ciągiem kolejnych liczb całkowitych $(m, m+1, \ldots, n)$, piszemy

$$\bigcup_{t=m}^{n} A_t = \left\{x:\ \bigvee_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ m\leq t\leq n}} x\in A_t\right\} = A_m \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{t=m}^{n} A_t = \left\{x:\ \bigwedge_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ m\leq t\leq n}} x\in A_t\right\} = A_m \cap \ldots \cap A_n$$

## § 19. Zbiory rozłączne

Niech $A$ i $B$ będą dowolnymi podzbiorami ustalonej przestrzeni $X$. Zbiory $A$ i $B$ nazywamy <u>rozłącznymi</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A\cap B = 0$.

<u>Uwaga</u>: Zbiór pusty jest rozłączny z każdym zbiorem, m. in. sam ze sobą, ponieważ

$$\bigwedge_{A\subset X} A\cap 0 = 0$$

$$0\cap 0 = 0$$

Ogólniej:

Klasę zbiorów $\mathcal{A}$ nazywamy klasą zbiorów rozłącznych $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \bigwedge_{A,B\in\mathcal{A}} A\cap B = 0.$

W szczególności ciąg skończony lub nieskończony zbiorów $(A_n)$ nazywamy ciągiem zbiorów rozłącznych, jeżeli

$$\bigwedge_{\substack{j,k\in\mathfrak{N}_0\\ j\neq k}} A_j \cap A_k = 0$$

W przypadku sumy zbiorów rozłącznych zamiast znaku $\cup$ używamy również znaku $+$, a zamiast znaku $\bigcup$ znak $\sum$. Piszemy np.:

$$C = A + B \Longleftrightarrow (C = A\cup B) \wedge (A\cap B = 0)$$

$$C = A_1 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \Longleftrightarrow (C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k) \wedge (\bigwedge_{j\neq k} A_j \cap A_k = 0)$$

$$C = A_1 + A_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \Longleftrightarrow (C = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \wedge (\bigwedge_{j\neq k} A_j \cap A_k = 0)$$

## § 20. Podstawowe wzory algebry zbiorów

$$0\cup A = A \qquad 0\cap A = 0$$

$$A\cup A = A \qquad A\cap A = A$$

$$A\cup B = B\cup A \qquad A\cap B = B\cap A$$

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C$$

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$$

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$(A - B)\cap B = 0$$

$$A - B = A - (A\cap B)$$

$$A = A\cap B + (A - B)$$

$$A\cup B = (A-B) + (B-A) + (A\cap B)$$

$$A\cup B = A + (B-A)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1\cup A_2\cup\ldots = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - \bigcup_{k=1}^{2} A_k) + (A_4 - \bigcup_{k=1}^{3} A_k) + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j) \;^{*)}$$

---

*) W całej niniejszej pracy przyjmujemy, że $\bigcup_{j=1}^{0} A_j$ oznacza zbiór pusty.

$$A \subset B \iff A \cup B = B$$

$$A \subset B \iff A \cap B = A$$

$$A \subset B \iff A - B = 0$$

$$A \subset B \iff B^c \subset A^c$$

$$(A^c)^c = A \qquad A + A^c = X \qquad X - A^c = A$$

$$A - B = A \cap B^c$$

Wzory powyższe wynikają bezpośrednio z definicji działań na zbiorach. Należy je sobie dobrze przyswoić, ponieważ będziemy je często wykorzystywać bez objaśnienia.

## § 21. Wzory de Morgana

Dopełnienie sumy jest równe iloczynowi dopełnień, a dopełnienie iloczynu jest równe sumie dopełnień, tzn.

(1) $$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c \qquad \Big(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c .$$

gdzie $\mathcal{A}$ jest dowolną klasą podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$.

Dowód:

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = X - \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = X - \Big\{x : \bigvee_{A\in\mathcal{A}} x\in A\Big\} = \Big\{x : \bigvee_{A\in\mathcal{A}}' x\in A\Big\} = \Big\{x : \bigwedge_{A\in\mathcal{A}} x\notin A\Big\} = \Big\{x : \bigwedge_{A\in\mathcal{A}} x\in A^c\Big\} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A^c$$

$$\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A\Big)^c = X - \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = X - \Big\{x : \bigwedge_{A\in\mathcal{A}} x\in A\Big\} = \Big\{x : \bigvee_{A\in\mathcal{A}} x\notin A\Big\} = \Big\{x : \bigvee_{A\in\mathcal{A}} x\in A^c\Big\} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^c$$

W szczególności dla rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ wzory de Morgana przyjmują postać:

$$\Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big)^c = \bigcap_{t\in T} A_t^c \qquad \Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big)^c = \bigcup_{t\in T} A_t^c$$

a gdy $T$ jest ciągiem kolejnych liczb całkowitych $(m, m+1, \ldots)$

$$\Big(\bigcup_{t=m}^{\infty} A_t\Big)^c = \bigcap_{t=m}^{\infty} A_t^c \qquad \Big(\bigcap_{t=m}^{\infty} A_t\Big)^c = \bigcup_{t=m}^{\infty} A_t^c$$

Gdy $T$ jest skończonym ciągiem kolejnych liczb całkowitych $(m, m+1, \ldots, n)$ mamy

$$\Big(\bigcup_{t=m}^{n} A_t\Big)^c = \bigcap_{t=m}^{n} A_t^c \qquad \Big(\bigcap_{t=m}^{n} A_t\Big)^c = \bigcup_{t=m}^{n} A_t^c$$

i w szczególności dla pary zbiorów $A$ i $B$:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

§ 22. Pokrycie zbioru

Niech $\mathcal{A}$ będzie klasą podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$. Niech $B \subset X$.

$$\mathcal{A} \text{ jest pokryciem zbioru } B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

§ 23. Ciało zbiorów

Ciałem zbiorów nazywamy każdą klasę $\mathcal{K}$ podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$, spełniającą warunki:

($\varkappa$1) $\bigvee_{A \subset X} A \in \mathcal{K}$ (niepustość)

($\varkappa$2) $A \in \mathcal{K} \Rightarrow A^c \in \mathcal{K}$ (komplementatywność)

($\varkappa$3) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$ (addytywność)

Własności ciała $\mathcal{K}$:

(k1) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$

D] Przez indukcję: ($1^0$) dla $n = 2$ na mocy ($\varkappa$3)

($2^0$) $\bigcup_{k=1}^{m-1} A_k, A_m \in \mathcal{K} \Rightarrow \left( \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k \right) \cup A_m \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{K}$

(k2) $X \in \mathcal{K}$

D] $\bigvee_{A \subset X} A \in \mathcal{K} \Rightarrow A^c \in \mathcal{K} \Rightarrow A + A^c = X \in \mathcal{K}$

(k3) $0 \in \mathcal{K}$

D] $X \in \mathcal{K} \Rightarrow X^c = X - X = 0 \in \mathcal{K}$

(k4) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$

D] $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \in \mathcal{K} \underset{(1)}{\Rightarrow} \left( \bigcap_{k=1}^{n} A_k \right)^c \in \mathcal{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left( \left( \bigcap_{k=1}^{n} A_k \right)^c \right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$

(k5) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A - B \in \mathcal{K}$

D] $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A, B^c \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cap B^c = A - B \in \mathcal{K}$

## § 24. $\sigma$-ciało

Ciałem przeliczalnie addytywnym zbiorów albo krótko $\sigma$-ciałem nazywamy każdą klasę $\mathcal{S}$ podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$, spełniającą warunki:

($\sigma$1) $\bigvee_{A\subset X} A\in\mathcal{S}$ (niepustość)

($\sigma$2) $A\in\mathcal{S} \Rightarrow A^c\in\mathcal{S}$ (komplementatywność)

($\sigma$3) $A_1, A_2, \ldots \in\mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\in\mathcal{S}$ (przeliczalna addytywność)

A oto własności $\sigma$-ciała:

(s1) $\sigma$-ciało jest ciałem zbiorów.

D| $\bigvee_{A\subset X} A\in\mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ spełnia warunek ($\varkappa$1).

$(A\in\mathcal{S}\Rightarrow A^c\in\mathcal{S})\Rightarrow\mathcal{S}$ spełnia warunek ($\varkappa$2).

$(A,B\in\mathcal{S}\Rightarrow A\cup B\cup B\cup\ldots = A\cup B\in\mathcal{S})\Rightarrow\mathcal{S}$ spełnia warunek ($\varkappa$3).

(s2) $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{S}$

D| Wynika z własności (k1) ciała zbiorów i własności (s1) $\sigma$-ciała.

(s3) $X\in\mathcal{S}$

D| Wynika z własności (k2) i (s1).

(s4) $0\in\mathcal{S}$

D| Wynika z własności (k3) i (s1).

(s5) $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{S}\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{S}$

D| Wynika z własności (k4) i (s1).

(s6) $A_1, A_2, \ldots\in\mathcal{S}\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\in\mathcal{S}$

D| $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{S}\Rightarrow A_1^c, A_2^c,\ldots\in\mathcal{S}\underset{(1)}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c\in\mathcal{S}\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\in\mathcal{S}$

(s7) $A,B\in\mathcal{S}\Rightarrow A-B\in\mathcal{S}$

D| Wynika z własności (k5) i (s1).

## § 25. Klasa $Q|B$ zbiorów

Niech $Q$ będzie dowolną niepustą klasą podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$ a $B$ dowolnym niepustym podzbiorem tej przestrzeni.

Symbolem $Q|B$ oznaczamy klasę wszystkich zbiorów postaci $A \cap B$, gdzie $A \in Q$.

## § 26. Twierdzenie

Z] $\mathcal{S}$ jest $\sigma$-ciałem przestrzeni $X$.
$B \in \mathcal{S}$
$B \neq 0$

T] $\mathcal{S}|B$ jest $\sigma$-ciałem przestrzeni $B$.

D] $B = B \cap B \Rightarrow B \in \mathcal{S}|B \Rightarrow \mathcal{S}|B$ spełnia warunek $(\sigma 1)$.

$$\Big(A \in \mathcal{S}|B \Rightarrow \bigvee_{C \in \mathcal{S}} A = C \cap B \underset{(s5)}{\Rightarrow} A \in \mathcal{S} \underset{(s7)}{\Rightarrow} B - A = (B - A) \cap B \in \mathcal{S} \Rightarrow B - A \in \mathcal{S}|B\Big) \Rightarrow \mathcal{S}|B \text{ spełnia warunek } (\sigma 2).$$

$$\Big(A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}|B \Rightarrow \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} \bigvee_{C_k \in \mathcal{S}} A_k = C_k \cap B \in \mathcal{S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cap B = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\Big) \cap B \wedge \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}|B\Big) \Rightarrow \mathcal{S}|B \text{ spełnia warunek } (\sigma 3).$$

## § 27. Twierdzenie

Z] $\Omega$ jest dowolną klasą $\sigma$-ciał przestrzeni $X$
$\mathcal{S}^* = \bigcap_{\mathcal{S} \in \Omega} \mathcal{S}$

T] $\mathcal{S}^*$ jest $\sigma$-ciałem przestrzeni $X$.

D] $\bigwedge_{\mathcal{S} \in \Omega} X \in \mathcal{S} \Rightarrow X \in \mathcal{S}^* \Rightarrow \mathcal{S}^*$ spełnia warunek $(\sigma 1)$

$$A \in \mathcal{S}^* \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{S} \in \Omega} A \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{S} \in \Omega} A^c \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \bigcap_{\mathcal{S} \in \Omega} \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S}^*$$

Zatem $\mathcal{S}^*$ spełnia warunek $(\sigma 2)$.

$$A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{S}^* \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{S} \in \Omega} \bigwedge_{k \in \mathfrak{N}} A_k \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{S} \in \Omega} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \bigcap_{\mathcal{S} \in \Omega} \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{S}^*$$

Oznacza to, że $\mathcal{S}^*$ spełnia również warunek $(\sigma 3)$.

§ 28. Twierdzenie

Dla każdej niepustej klasy $Q$ podzbiorów przestrzeni $X$ istnieje najmniejsze $\sigma$-ciało zawierające tę klasę.

D| Niech $\Omega$ będzie klasą wszystkich $\sigma$-ciał zawierających $Q$..Klasa $\Omega$ nie jest pusta, bo należy do niej $\sigma$-ciało utworzone ze wszystkich podzbiorów przestrzeni $X$. Na mocy twierdzenia § 27

$$\mathcal{S}^* = \bigcap_{\mathcal{S}\in\Omega} \mathcal{S}$$

jest też $\sigma$-ciałem należącym do klasy $\Omega$. Ponadto

$$\bigwedge_{\mathcal{S}\in\Omega} \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$$

ponieważ iloczyn zbiorów jest zawarty w każdym z tych zbiorów. Wynika stąd, że $\mathcal{S}^*$ jest najmniejszym $\sigma$-ciałem zawierającym klasę $Q$.

§ 29. Pseudo-$\sigma$-ciało zbiorów

Pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów będziemy nazywać każdą klasę $\mathcal{T}$ podzbiorów pewnej ustalonej przestrzeni $X$, spełniającą warunki:

($\tau$1) $0 \in \mathcal{T}$

($\tau$2) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$ (komplementatywność)

($\tau$3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}$ (pseudoaddytywność)

A oto własności pseudo-$\sigma$-ciała zbiorów:

(t1) Każde $\sigma$-ciało jest pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów.

D| Z warunków (s4), ($\sigma$2), ($\sigma$3) wynikają warunki ($\tau$1),($\tau$2),($\tau$3).

(t2) $X \in \mathcal{T}$

D| Wynika z ($\tau$1) i ($\tau$2)

(t3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \wedge A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}$

D| $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \wedge A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{T} \wedge A_1^c \subset A_2^c \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \in \mathcal{T} \underset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}$$

(t4) $\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k \cup B \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup B \in \mathcal{T}$

D| $\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k \cup B \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k \cup B \in \mathcal{T} \wedge (A_1 \cup B) \subset (A_2 \cup B) \subset \ldots \underset{(\tau 3)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(\tau 3)}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cup B) \in \mathcal{T} \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup B \in \mathcal{T}$$

(t5) $\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k^c \cup B \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup B \in \mathcal{T}$

D| $\bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k^c \cup B \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k^c \cup B \in \mathcal{T} \wedge (A_1^c \cup B) \supset (A_2^c \cup B) \supset \ldots \underset{(t3)}{\Rightarrow}$$

$$\underset{(t3)}{\Rightarrow} \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k^c \cup B) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c \cup B \in \mathcal{T} \underset{(1)}{\Rightarrow} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \cup B \in \mathcal{T}$$

## § 30. Klasa $\mathcal{T}_B$ zbiorów

Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów i niech $B \in \mathcal{T}$. Określamy następującą klasę zbiorów

$$\mathcal{T}_B \overset{\text{def}}{=} \{A\colon A,\ A \cup B,\ A \cup B^c,\ A^c \cup B,\ A^c \cup B^c \in \mathcal{T}\}$$

A oto własności klasy $\mathcal{T}_B$:

(b1) $\mathcal{T}_B$ jest pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów.

D| $A = 0 \Rightarrow A,\ A \cup B = B,\ A \cup B^c = B^c,\ A^c \cup B = A^c \cup B^c = X \in \mathcal{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \in \mathcal{T}_B \Rightarrow \mathcal{T}_B$ spełnia warunek $(\tau 1)$.

$\big(A \in \mathcal{T}_B \Rightarrow A,\ A \cup B,\ A \cup B^c,\ A^c \cup B,\ A^c \cup B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^c,\ A^c \cup B,\ A^c \cup B^c,\ (A^c)^c \cup B = A \cup B,\ (A^c)^c \cup B^c = A \cup B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{T}_B\big) \Rightarrow \mathcal{T}_B$ spełnia warunek $(\tau 2)$.

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}_B \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigwedge_{k\in\mathfrak{N}} A_k,\ A_k \cup B,\ A_k \cup B^c,\ A_k^c \cup B,\ A_k^c \cup B^c \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \underset{\substack{(\tau 3)\\(t4)\\(t5)}}{\Rightarrow}$$

$$\underset{\substack{(\tau 3)\\(t4)\\(t5)}}{\Rightarrow} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup B,\ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cup B^c,\ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \cup B,\ \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c \cup B^c \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}_B.$$

Zatem $\mathcal{T}_B$ spełnia wszystkie warunki $(\tau 1)$, $(\tau 2)$ i $(\tau 3)$ i jest pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów.

(b2) $A \in \mathcal{T}_B \Leftrightarrow B \in \mathcal{T}_A$

D| Wynika bezpośrednio z definicji $\mathcal{T}_B$.

(b3) $\mathcal{T}_B \subset \mathcal{T}$

D| Na mocy definicji $A \in \mathcal{T}_B \Rightarrow A \in \mathcal{T}$.

(b4) $\mathcal{K}$ jest ciałem zbiorów $\wedge\ \mathcal{K} \subset \mathcal{T} \wedge B \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_B$.

D] $\mathcal{K}$ jest ciałem zbiorów $\wedge \mathcal{K} \subset \mathcal{T} \wedge B \in \mathcal{K} \Rightarrow (A \in \mathcal{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow A,\ A \cup B,\ A \cup B^c,\ A^c \cup B,\ A^c \cup B^c \in \mathcal{K} \subset \mathcal{T} \Rightarrow A \in \mathcal{T}_B) \Rightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_B.$

## § 31. Twierdzenie

Z] $\Phi$ jest dowolną klasą pseudo-$\sigma$-ciał zbiorów przestrzeni $X$.

$\mathcal{T}^* = \bigcap_{\mathcal{T} \in \Phi} \mathcal{T}$

T] $\mathcal{T}^*$ jest pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów.

D] $\bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} 0 \in \mathcal{T} \Rightarrow 0 \in \bigcap_{\mathcal{T} \in \Phi} \mathcal{T} \Rightarrow 0 \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \mathcal{T}^*$ spełnia warunek $(\tau 1)$.

Mamy dalej

$$A \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} A \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} A^c \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \bigcap_{\mathcal{T} \in \Phi} \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}^*$$

Zatem $\mathcal{T}^*$ spełnia warunek $(\tau 2)$.

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}^* \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T} \wedge A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}^*$$

$\mathcal{T}^*$ spełnia wszystkie warunki $(\tau 1)$, $(\tau 2)$, $(\tau 3)$ i jest tym samym pseudo-$\sigma$-ciałem zbiorów.

## § 32. Twierdzenie

Dla każdej niepustej klasy $Q$ podzbiorów przestrzeni $X$ istnieje najmniejsze pseudo-$\sigma$-ciało zawierające tę klasę.

D] Niech $\Phi$ będzie klasą wszystkich pseudo-$\sigma$-ciał zawierających $Q$. Klasa $\Phi$ nie jest pusta, bo należy do niej pseudo-$\sigma$-ciało utworzone ze wszystkich podzbiorów przestrzeni $X$. Na mocy twierdzenia § 31

$$\mathcal{T}^* = \bigcap_{\mathcal{T} \in \Phi} \mathcal{T}$$

jest też pseudo-$\sigma$-ciałem należącym do klasy $\Phi$. Ponadto

$$\bigwedge_{\mathcal{T} \in \Phi} \mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$$

co oznacza, że $\mathcal{T}^*$ jest najmniejszym pseudo-$\sigma$-ciałem zawierającym klasę $Q$.

§ 33. Twierdzenie

Z| $\mathcal{K}$ jest ciałem zbiorów.

$\mathcal{S}^*$ jest najmniejszym $\sigma$-ciałem zawierającym $\mathcal{K}$.

$\mathcal{T}^*$ jest najmniejszym pseudo-$\sigma$-ciałem zawierającym $\mathcal{K}$.

T| $\mathcal{S}^* = \mathcal{T}^*$

D| Na mocy (t1) jest $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{S}^*$. Wystarczy zatem wykazać, że $\mathcal{T}^*$ jest $\sigma$-ciałem, bo wtedy $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{T}^*$.

Niech $\mathcal{T}_B^*$ oznacza klasę $\mathcal{T}_B$ dla $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ i niech $B \in \mathcal{T}^*$. Na mocy (b4)

$$B \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_B^* \underset{\substack{(b1)\\ Z|}}{\Rightarrow} \mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}_B^*$$

czyli

$$B \in \mathcal{K} \wedge A \in \mathcal{T}^* \Rightarrow A \in \mathcal{T}_B^*$$

stąd na mocy (b2)

$$A \in \mathcal{T}^* \wedge B \in \mathcal{K} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_A^*$$

czyli

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}^*} B \in \mathcal{K} \Rightarrow B \in \mathcal{T}_A^*$$

skąd

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}^*} \mathcal{K} \subset \mathcal{T}_A^* \Rightarrow \bigwedge_{A \in \mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}_A^*$$

i na mocy (b3)

(*) $$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}_A^*$$

Ale z definicji $\mathcal{T}_A^*$ wynika, że

$$\bigwedge_{B \in \mathcal{T}_A^*} A \cup B \in \mathcal{T}^*$$

więc na mocy (*)

$$\bigwedge_{A, B \in \mathcal{T}^*} A \cup B \in \mathcal{T}^*$$

czyli $\mathcal{T}^*$ spełnia warunek ($\varkappa$3) dla ciał zbiorów. Z warunku $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}^*$ wynika, że $\mathcal{T}^*$ spełnia ($\varkappa$1).

Z faktu, że $\mathcal{T}^*$ jest pseudo-$\sigma$-ciałem, wynika na mocy ($\tau$2), że $\mathcal{T}^*$ spełnia ($\varkappa$2). Wobec tego $\mathcal{T}^*$ jest ciałem zbiorów. Mamy stąd

$$\bigwedge_{n \in \mathfrak{N}} \left(A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{T}^*\right)$$

a następnie

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{1} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{2} A_k, \ldots \in \mathcal{T}^* \wedge \left(\bigcup_{k=1}^{1} A_k\right) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{2} A_k\right) \subset \ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \in \mathcal{T}^* \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{T}^*$$

$\mathcal{T}^*$ jest zatem $\sigma$-ciałem i dowód jest zakończony.

## § 34. Kres górny i kres dolny

Kres górny (supremum) i kres dolny (infimum) klasy zbiorów $\mathfrak{A}$ określamy następująco:

$$\sup_{A \in \mathfrak{A}} A \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \qquad \inf_{A \in \mathfrak{A}} A \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$$

Kres górny i kres dolny rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ określamy analogicznie

$$\sup_{t \in T} A_t \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{t \in T} A_t \qquad \inf_{t \in T} A_t \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{t \in T} A_t$$

W szczególności gdy rodzina zbiorów jest ciągiem $(A_1, A_2, \ldots)$, piszemy

$$\sup_k A_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \inf_k A_{n+k-1} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

a zatem m. in.

$$\sup_k A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \inf_k A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Kres górny i kres dolny klasy czy rodziny zbiorów zawsze istnieją. Ponadto mamy zawsze

(2) $$\inf_{A \in \mathfrak{A}} A \subset \sup_{A \in \mathfrak{A}} A \qquad \inf_{t \in T} A_t \subset \sup_{t \in T} A_t$$

ponieważ

(3) $$\bigwedge_{A^* \in \mathfrak{A}} \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \subset A^* \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$$

Wynika stąd również, że

(4) $$\inf_{A \in \mathfrak{A}} A = \sup_{A \in \mathfrak{A}} A \iff \bigwedge_{A^*, A^{**} \in \mathfrak{A}} A^* = A^{**}, \quad \inf_{t \in T} A_t = \sup_{t \in T} A_t \iff \bigwedge_{t^*, t^{**} \in T} A_{t^*} = A_{t^{**}}$$

Niech teraz $A$ będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni $\mathfrak{R}_0$ i niech $a$, $\bar{a}$, $\underline{a}$, $x \in \mathfrak{R}_0$. Niech

$$\langle -\infty; a) \overset{\text{def}}{=} \{x : x < a\}, \qquad \langle -\infty; a\rangle \overset{\text{def}}{=} \{x : x \leqslant a\}$$