ZASADY

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

I

CAŁKOWEGO.

ZASADY

RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

I

CAŁKOWEGO

UŁOŻYŁ

ROMAN ŻULIŃSKI.

WARSZAWA.

W DRUKARNI JÓZEFA UNGRA,

Krakowskie-Przedmieście Nr. 391.

1859.

Wolno drukować, pod warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

Warszawa dnia 24 Września (6 Października) 1858 roku.

p. o. Starszego Cenzora, Assessor kolegialny,

A. *Broniewski.*

WIELMOŻNEMU

MAKSYMILJANOWI ŁYSZKOWSKIEMU,

DYREKTOROWI GIMNAZYUM REALNEGO

W WARSZAWIE

W DOWÓD WDZIĘCZNOŚCI I GŁĘBOKIEGO SZACUNKU,

TĘ PRACĘ

POŚWIĘCA

AUTOR.

PRZEDMOWA AUTORA.

„Byle każdy sumiennie imał się pracy,
„i wedle sił swoich, ile tylko może najle-
„piéj uiszczał się zupełnie z roboty wzię-
„téj na siebie, toć pewnie błogosławień-
„stwa mu nie zabraknie, a praca jego nie
„pójdzie w niwecz.“ *Kremer.*

Wiedząc z doświadczenia, jakich trudności doznawać przychodzi w ściślejszéj pracy nad wyższemi naukami, jak ważnemi są ułatwienia, jak pożądaném jest dzieło w ojczystéj mowie, nawet obeznanemu z obcemi językami, sądzę, że ogłaszając drukiem „*Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*“ przysłużę się tym, którzy nad tą częścią matematyki pracować zamierzyli.

Po wyczerpaniu dzieł P. Niemczewskiego, nie mamy żadnego dzieła polskiego w tym przedmiocie; przekonany zaś o jego potrzebie, ułożyłem niniejszą książkę głównie podług dzieł P. Cauchy, posiłkując się także dziełami P. P. Duhamel, Sturm, Moigno, Lacroix i innych.

Tym sposobem nie objawiając nic nowego uczonemu światu w dziedzinie nauk ścisłych, starałem się tylko wykład przystępnym uczynić dla mniéj doświadczonych adeptów téj nauki; o ile zaś temu celowi godnie odpowiedziałem, sąd uczonych matematyków najlepiéj ocenić potrafi.

Warszawa, dnia 31 Czerwca 1858 r.

Roman Żuliński.

WSTĘP.

Zasady teoryi granic.

Starożytni jeometrowie, wychodząc z określenia równości ilości jeometrycznych, opartéj na przystawaniu i pojęciu dodawania i odejmowania tychże ilości, doszli łatwo do porównania i wymierzenia wielokątów płaskich, równoległościanów i jakichkolwiek graniastosłupów. Lecz gdy chcieli porównywać figury płaskie ograniczone linjami krzywemi, lub bryły ograniczone powierzchniami krzywemi, takie same sposoby postępowania nie były wystarczające.

Wpadli oni wtedy na pomysł dość prosty, ale gruntowny, uważania zamiast tych samych wielkości, innych wielkości takiego gatunku, jakie umieli już mierzyć, a któreby różniły się od pierwszych o ilości mniejsze od wszelkich mogących się naznaczyć, a stosunek pomiędzy ostatniemi dawał im łatwość sądzenia o stosunku pomiędzy wielkościami danemi.

I tak dla znalezienia stosunku pomiędzy powierzchniami dwóch jakichkolwiek kół, Euklides zaczyna dowodzeniem, że wpisując w koło wielokąt foremny, i podwajając następnie liczbę boków, to różnica pomiędzy powierzchnią stałą koła, a powierzchnią zmienną wielokąta, może stać się mniejszą od każdéj powierzchni danéj.

Granica zmiennéj.

Gdy wielkość zmienna ciągle przybierając różne wartości, przybliża się do pewnéj ilości stałéj, tak że wartość téj stałéj różnić się może od wartości ostatniéj na zmienną o ilość mniejszą od wszelkiéj naznaczonéj, wtedy mówimy, że ta ilość stała jest *granicą* ilości zmiennéj.

Nieskończenie mała.

Każda wielkość mająca za granicę zero, jest *nieskończenie małą.* I tak różnica między ilością zmienną, a jéj granicą, jest ilością nieskończenie małą, gdyż ona przybliża się do zera; np. różnica pomiędzy powierzchnią koła a powierzchnią wielokąta foremnego weń wpisanego, którego liczba boków nieoznaczenie się powiększa, jest nieskończenie małą.

Własności główne granic.

Ilości zmienne równe, mają granice równe.

Jeżeli dwie ilości zmienne są stale sobie równe i każda z nich zbliża się do pewnéj granicy, to te granice są koniecznie sobie równe. To jest widocznem, bowiem dwie wielkości zawsze równe przedstawiają tylko jednę wartość, a zdaje się niepotrzebną rzeczą dowodzić, że jedna zmienna nie może się odrazu przybliżać do dwóch granic nierównych, tojest do dwóch wielkości stałych różnych pomiędzy sobą.

Granica summy, iloczynu, ilorazu lub potęg jakichkolwiek zmiennych.

Granicą summy zmiennych $x, y, z, \ldots\ldots w$, których liczba jest skończoną i mających za odpowiednie granice ilości $a, b, c, \ldots\ldots l$ dodatne lub ujemne jest summa algebraiczna tych granic.

Zmienne $x, y, z, \ldots. w$ mogą być wyrażone odpowiednio przez $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma, \ldots. l+\lambda$ gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ są różnicami mającemi każda za granicę zero; będzie więc:

$$x+y+z+\ldots.. w=(a+b+c+\cdots\cdot l)+(\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdot\lambda)$$

Lecz ponieważ $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdot\lambda$ przybliża się do granicy zero, bowiem liczba tych ilości, jak podług założenia, jest skończoną, a więc granicą drugiéj strony równania, a tém samém i pierwszéj jest $a+b+c+\cdots\cdot l$.

Granica iloczynu.

Granicą iloczynu wielu zmiennych jest iloczyn ich granic. Przyjąwszy bowiem też same co poprzednio oznaczenia będzie:

$x.y.z\ldots..w=(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)\ldots..(l+\lambda)=abc\ldots..l+\omega$, gdzie ω oznacza summę skończonéj liczby wyrazów, mających każden za granicę zero (jako zawierających w sobie przynajmniéj jeden z czynników $\alpha, \beta, \gamma\ldots..\lambda$) zkąd widzimy, że druga strona równania, a tém samém i pierwsza t.j. $x.y.z.....w$ ma za granicę $a.b.c.....l$, co należało okazać.

Granica ilorazu.

Granicą ilorazu dwóch zmiennych jest iloraz granic tychże zmiennych, gdy granicą dzielnika nie jest zero. I tak:

$$\frac{x}{y}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\frac{b\alpha-a\beta}{b(b+\beta)}$$

Tu widzimy, że mianownik ułamku ostatniego, gdy β przybliża się do zera, zbliża się do granicy b^2, licznik zaś jego w tym samym czasie do granicy zero się przybliża, a tém samém i cały ten ułamek, czyli granicą $\frac{x}{y}$ jest $\frac{a}{b}$.

Granica potęgi.

Granica potęgi, jakiéj zmiennéj równa się granicy tejże zmiennéj podniesionéj do téj saméj potęgi.

Gdy m jest potęgą całkowitą, to na mocy poprzedniéj własności będzie widocznie x^m mieć za granicę a^m. Lecz gdy $m=\frac{p}{q}$ ilości ułamkowéj, gdzie p i q są całkowite jakiekolwiek, to uważamy $x^{\frac{p}{q}}$ za potęgę p z $x^{\frac{1}{q}}$ a wtedy granicą potęgi p z $\sqrt[q]{x}$ będzie granica $\sqrt[q]{x}$ podniesiona do potęgi p. Należy więc tylko oznaczyć granicę $\sqrt[q]{x}$. Tutaj uważać można x za iloczyn q czynników $\sqrt[q]{x}$; a że granica iloczynu czyli granica x równa się iloczynowi granic, więc na odwrot iloczyn granic czynników takich jak $\sqrt[q]{x}$ równa się granicy x; że zaś ta ostatnia jest a, więc wypada że $\sqrt[q]{x}$ ma za granicę $\sqrt[q]{a}$. Ztąd granicą $x^{\frac{p}{q}}$ jest $a^{\frac{p}{q}}$.

O ilościach nieskończenie małych i nieskończenie wielkich.

Mówimy, że ilość zmienna jest nieskończonie mała, gdy jéj wartość liczebna do nieskończoności się zmniejsza, tak iż się do granicy 0 przybliża. Należy tu jednakże uważać, że ilość nie będzie nieskończenie małą chociaż się ciągle zmniejsza, np. obwód wielokąta opisanego na okręgu przy powiększaniu ciągłém liczby jego boków ciągle się zmniejsza, jednak się nie staje nieskończenie małym, gdyż ma za granicę okrąg. Wyrazy szeregu $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$..... ciągle się zmniejszają, lecz granicą ich jest 1.

Ilość zmienna staje się nieskończenie wielką, gdy wartość jéj liczebna nieskończenie się powiększa tak, iż do granicy ∞ się przybliża. Również trzeba uważać, że ilość nie staje się nieskończenie wielką, choć ciągle się powiększa, jak mamy przykład na obwodzie wielokąta wpisanego w koło.

Rząd ilości nieskończenie małych.

Gdy ilości nieskończenie małe w różnych potęgach do jednego rachunku wprowadzimy jak np. α, α^2, α^3..... to te różne potęgi będą nieskończenie małemi rzędu 1go, 2go, 3go i t. d.

I tak jeżeli a i b są nieskończenie małe, tak iż stosunek $\frac{b}{a}$ będzie również ilością nieskończenie małą, wtedy mówimy, że b jest nieskończenie małą drugiego rzędu np. gdy przypuścimy, że cięciwa łuku okręgu jest nieskończenie małą, to wstawa odwrotna tegoż samego łuku jest nieskończenie małą drugiego rzędu, bowiem stosunek odwrotnéj wstawy do cięciwy, jest ten sam co cięciwy do średnicy, że zaś ten ostatni jest ilością nieskończenie małą, to nim jest i pierwszy czyli wstawa odwrotna jest w tym razie ilością nieskończenie małą rzędu drugiego. Powierzchnia nieskończenie mała we wszystkich swych wymiarach, jest ilością nieskończenie małą rzędu drugiego, albowiem ona jest mniejszą jak kwadrat wystawiony na największéj z linij prostych w konturze jéj poprowadzonych, która to prosta jest już z założenia ilością nieskończenie małą.

Podobnież bryła mająca wymiary nieskończenie małe, jest ilością nieskończenie małą rzędu trzeciego.

W ogólności jeżeli przyjmujemy ilość nieskończenie małą i za zasadę ilości nieskończenie małych, to ilość nieskończenie mała α, będzie rzędu n^{tego} wtedy, kiedy granica stosunku:

$$\frac{\alpha}{i^r}$$

staje się zerem dla wszystkich wartości na r mniejszych od n, a nieskończoną dla wszystkich wartości na r większych od n.

Podług więc téj definicyi wypada, że jeżeli oznaczymy przez n liczbę równą lub bezpośrednio większą od r, to stosunek

$$\frac{\alpha}{i^n}$$

będzie pierwszym wyrazem postępu jeometrycznego

$$\alpha,\ \frac{\alpha}{i},\ \frac{\alpha}{i^2}\ldots\ldots$$

który przestaje być ilością nieskończenie małą. Co się zaś tyczy stosunku

$$\frac{a}{i^n}$$

który otrzymujemy przypuściwszy $r = n$, to on może mieć wartość skończoną, zero lub nieskończoną. I tak np.

$$i^n e^i, \ \frac{i^n e^i}{l(i)}, \ i^n e^i\, l(i)$$

są trzy ilości nieskończenie małe rzędu n, zaś ilorazy z nich przez i^n są:

$$e^i, \ \frac{e^i}{l(i)}, \ e^i\, l(i), \text{ które mają za granicę } 1, 0, \tfrac{1}{0}.$$

Twierdzenie I. *Jeżeli w układzie jakimkolwiek weźmiemy 2 ilości nieskończenie małe różnych rzędów, to gdy te 2 ilości przybliżać się będą nieoznaczenie do zera, to wtedy ilość rzędu wyższego otrzymywać będzie ciagle mniejsze wartości liczebne.*

Dowodzenie. Niechaj w układzie, którego i jest zasadą, I i J, są dwie ilości nieskończenie małe rzędów a i b, nadto niech $a > b$. Nadawszy na zmienną r wartość zawartą między a i b to dwa stosunki

$$\frac{I}{i^r}, \ \frac{J}{i^r}$$

będą miały za granicę, pierwszy $\frac{1}{0}$ drugi 0 (*), a tém samém iloraz tych stosunków czyli $\frac{J}{I}$ będzie miał za granicę $0 : \frac{1}{0} = 0$. A zatém wartość liczebna licznika J zmniejsza się bystrzéj jak mianownika I.

---

*) To wynika z definicyi rzędu ilości nieskończenie małéj.

Twierdzenie II. *Summa ilości nieskończenie małych rzędów a, b, c,..... jest nieskończenie małą rzędu a, gdy $a < b < c < \ldots\ldots$*

Dowodzenie. Niech i jest zasadą układu ilości nieskończenie małych, I, J, i t. d. ilości nieskończenie małe dane, rzędów a, b,..... to summa tych ilości nieskończenie małych jest:

$$I + J + \ldots\ldots$$

stosunek téj nowéj ilości nieskończenie małéj do i^r jest:

$$(\alpha) \ldots\ldots \frac{I + J + \ldots\ldots}{i^r} = \left(1 + \frac{J}{I} + \ldots\right) \frac{I}{i^r}.$$

Ponieważ rzędy ilości J,..... są większe od rzędów ilości I, to każdy z ilorazów $\frac{J}{I}$,..... na mocy poprzedniego twierdzenia ma za granicę zero, a powyższa summa w nawiasie, $1^{\text{śé}}$ za granicę mieć będzie, czyli granicą wyrażenia (α) jest

$$\frac{I}{i^r}$$

a że rzędem ilości I jest a, to téż i rzędem ilości $I + J$,..... jest a.

Twierdzenie III. *Gdy wielomian uszykowany jest podług potęg rosnących ilości nieskończenie małéj np.*

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots\ldots$$

lub ogólniéj

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots\ldots$$

to przy bardzo małych wartościach na α, wielomian ten ciągle taki sam znak, jak pierwszy wyraz jego a lub $a\alpha^n$ mieć będzie, gdy $n < n' < n''$.

Dowodzenie. Summa drugiego i innych wyrazów 1go szeregu, będąc nieskończenie małą rzędu pierwszego, jest mniejszą od a ilości skończonéj, w drugim zaś razie summa taka wyrazów szeregu jest nieskończenie małą rzędu np. n', a więc na mocy twierdzenia 1go, wartość téj summy ciągle jest mniejszą od nieskończenie małéj rzędu n^{tego} mniejszego od n'.....

Twierdzenie IV. *Gdy w wielomianie uszykowanym podług potęg wzrastających ilości nieskończenie małéj α t. j.*

$$a\alpha^{n} + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots\ldots$$

potęga drugiego wyrazu jest nieparzysta, to summa wszystkich wyrazów, jest większą od pierwszego, gdy b i α mają jednakowe znaki, a mniejszą, gdy b i α mają znaki przeciwne.

Twierdzenie V. *Gdy w wielomianie uszykowanym podług potęg wzrastających ilości nieskończenie małéj α t. j.*

$$a\alpha^{n} + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots\ldots$$

n' jest liczbą parzystą, to summa wszystkich wyrazów będzie większą od pierwszego, gdy b ujemne.

Gdy w poprzedniém twierdzeniu damy, że $n=0$, to otrzymamy następujące

Twierdzenie VI. *Gdy w uszykowanym podług potęg wzrastających ilości nieskończenie małéj α wielomianie*

$$a + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + \ldots\ldots$$

n' jest parzyste, to pomiędzy wartościami tego wielomianu, odpowiadającemi nieskończenie małéj wartości na α najmniejszą będzie ta, która odpowiadając $\alpha=0$ będzie miała

współczynnik b dodatny (*), *a największą, gdy ten współczynnik będzie ujemny* (**).

Maximum i Minimum,

ta szczególna wartość wielomianu, większa lub mniejsza od wszystkich sąsiednich wartości jego, zowie się *maximum* lub *minimum*.

Twierdzenie VII. *W jakimkolwiek układzie iloczyn dwóch ilości nieskończenie małych, których rzędy są a i b, jest inną ilością nieskończenie małą rzędu $a+b$.*

Dowodzenie. Niech i jest zasadą układu, zaś I i J ilości nieskończenie małe dane, pierwsza rzędu a druga b, to stosunki

$$\frac{I}{i^r}, \quad \frac{J}{i^s}$$

będą miały za granice zero gdy $r<a$, $s<b$, a granicę nieskończoną zawsze, gdy $r>a$, $s>b$, że zaś toż samo powiedzieć można o iloczynie

$$\frac{IJ}{i^{r+s}}$$ wypada więc, że powyższy stosunek będzie miał za granicę zero przy $r+s<a+b$, zaś nieskończoną dla $r+s>a+b$; zatém IJ jest nieskończenie małą rzędu $a+b$.

UWAGA. Gdy jeden z czynników sprowadzi się do ilości skończonéj, to widocznie iloczyn będzie tego rzędu co drugi czynnik.

(*) Albowiem w tym razie gdy $a=0$ opuszczamy wyraz dodatni.

**) Gdy wyraz ujemny opuszczamy, wartość wielomianu się powiększa.

Wniosek. W jakimkolwiek układzie iloczyn ilości nieskończenie małych rzędów $a, b, c, \ldots$. jest ilością nieskończenie małą, rzędu $a+b+c+\ldots$.

Twierdzenie VIII. *Gdy ilości nieskończenie małe są takie, że gdy pierwsza przyjętą jest za zasadę, to druga będzie rzędu a, a gdy druga przyjętą jest za zasadę, to trzecia będzie rzędu b, to w układzie, w którym pierwszą przyjmujemy za zasadę, ostatnia będzie rzędu ab.*

Dowodzenie. Niech i, I i J są trzy ilości dane tym sposobem, że dwa stosunki

$$\frac{I}{i^r}, \quad \frac{J}{I^s}$$

mają za granicę zera, gdy $r < a$, $s < b$, a za granicę nieskończoną gdy $r > a$, $s > b$ to widoczném, że iloczyn

$$\left(\frac{I}{i^r}\right)^s \frac{J}{I^s} = \frac{J}{i^{rs}}$$

będzie miał za granicę zero dla $rs < ab$, a nieskończoną dla $rs > ab$, a tém samém gdy przyjmiemy i za zasadę to J będzie ilością nieskończenie małą rzędu ab.

Wniosek I. Stosunek pomiędzy rzędami dwóch ilości nieskończenie małych J i I pozostanie ten sam, jakakolwiek będzie zasada układu, który przyjmiemy, i ten stosunek równa się liczbie b, która oznacza rząd 1éj ilości, gdy druga przyjętą jest za zasadę. A zatém oznaczywszy przy różnéj zasadzie rzędy kilku ilości nieskończenie małych i zmieniwszy zasadę, to liczby oznaczające te różne rzędy, zmniejszą się lub zwiększą w jednym zawsze stałym stosunku.

Wniosek II. Gdy w twierdzeniu IV przypuścimy, że ilość J sprowadzi się do ilości i, to widocznie $ab=1$ (*) $b=\frac{1}{a}$. A zatém w układzie, którego zasadą jest i, a ilość I jest nieskończenie małą rzędu a, to i będzie nieskończenie małą rzędu $\frac{1}{a}$ w układzie, który będzie miał za zasadę I.

Powyższe wnioski dają:

Wniosek III. Jeżeli dwie ilości nieskończenie małe są takie, że gdy jedna przyjętą jest za zasadę, druga będzie rzędu pierwszego, to liczba oznaczająca rząd ilości nieskończenie małéj któréjkolwiek, pozostanie tąż samą w obudwu układach.

Ogólne uwagi nad funkcjami.

Gdy ilości zmienne są w ten sposób z sobą połączone, że gdy wartość jednéj z nich jest dana, można wynaleźć wartość każdéj z pozostałych, to nazywamy te różne wielkości wyrażone przez jednę z nich, która zowie się *zmienną niezależną*, *funkcjami* téj zmiennéj. Gdy zaś ilości zmienne w takim są między sobą związku, że gdy wartości kilku z nich są dane, można oznaczyć wartość każdéj z pozostałych, wtedy uważamy te wielkości wyrażone za pomocą kilku zpomiędzy nich i innych

---

*) Gdyż $\frac{i}{i^{ab}}$ ma za granicę zero, gdy $ab<1$ bowiem

$$\frac{i}{i^{ab}}=i^{1-ab}$$

a nieskończoną, gdy $ab>1$.

nazwanych *zmiennemi niezależnemi*, jako *funkcje* tychże zmiennych.

Funkcje rozwinięte i nierozwinięte.

Gdy funkcje jednéj lub kilku zmiennych są bezpośrednio przez te zmienne wyrażone np.

$$a x,\ L(x),\ \sin x,\ x+y, \text{ i t. d.}$$

to one zowią się funkcjami rozwiniętemi.

Gdy zaś tylko pomiędzy funkcjami i zmiennemi zachodzą oznaczone stosunki, t. j. wskazane są równania, którym te wielkości zadość czynić muszą, to takie funkcje zowią się funkcjami nierozwiniętemi np.

$$L(y)=x,\ y=A^x,$$

gdzie pierwsza funkcja wyraża się przez drugą wtedy, gdy A jest zasadą logarytmów L.

Funkcje oznaczają się:

$$f(x),\ F(x),\ \varphi(x),\ X(x),\ \psi(x)$$

$$f(x, y, z, \ldots),\ F(x, y, z, \ldots),\ \varphi(x, y, z, \ldots)$$

Funkcje pojedyncze i złożone.

Funkcją pojedynczą jednéj zmiennéj nazywamy tę, która jest wypadkiem jednego działania z tąż zmienną np.

$$a+x,\ a-x,\ a x,\ \frac{a}{x},\ x^a,\ A^x,\ L(x)$$

UWAGA. Nie umieszczamy tu pierwiastków, gdyż takowe na potęgi ułamkowe zamienić się dają.

Do pojedynczych funkcji należą jeszcze:

$$\sin x,\ \cos x,\ \text{arc} \sin x,\ \text{arc} \cos x, \ldots\ldots$$

Funkcja, która się wywodzi z pomocą kilku działań z jedną zmienną, nazywa się funkcją złożoną np.

$$x^x,\ \sqrt[x]{x},\ \frac{l\,x}{x}, \text{ i t. d.}$$

Funkcje funkcji.

Między temi ostatniemi funkcjami należy odróżnić funkcje funkcji, t. j. te, które są wypadkiem kilku następnych działań, z których pierwsze wykonywa się ze zmienną, a każde następne z poprzedzającego wypadku, np. $l(\sin x)$, $l(\cos x)$.

Funkcje algebraiczne, wykładnicze, logarytmowe, całkowite i ułamkowe, linijne i trygonometryczne.

Funkcje, które powstają z pierwszych działań algebraicznych jakoto: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, podnoszenia do potęg i wyciągania pierwiastków zowią się *algebraicznemi.*

Gdy zaś funkcja potęgi i logarytmy zmiennych przyjmuje, to zowie się *wykładniczą, logarytmową.*

Algebraiczne funkcje są jeszcze *wymierne* i *niewymierne.* Pierwsze mają całkowite, drugie ułamkowe wykładniki.

Funkcją całkowitą nazywa się wielomian, który tylko całkowite ma potęgi np.

$$a + bx + cx^2 + \ldots.$$

Potęgą czyli stopniem takiego wielomianu jest najwyższy wykładnik.

Funkcya całkowita 1go stopnia np.

$$a + bx$$

zowie się jeszcze linijną.

Funkcje, które z działań trygonometrji powstają, zowią się jeszcze *trygonometrycznemi.* Te różne nazwy funkcji jednéj zmiennéj można zastosować i do funkcji wielu zmiennych, np. funkcją całkowitą wielu zmiennych, będzie wielomian, zawierający tylko całkowite potęgi. Stopniem zaś tego wielomianu będzie summa potęg największa w jednym wyrazie.

I tak wielomian:

$$a+bxy+czy+dxz+\ldots\ldots$$

jest stopnia 2go.

Funkcją ułamkową, jest iloraz z dwóch funkcji całkowitych.

Funkcjami urojonemi nazywają się wszystkie wyrażenia, które mogą być sprowadzone do kształtu $u+v\sqrt{-1}$, gdzie u i v są funkcjami rzeczywistemi zmiennéj.

Funkcją ciągłą między dwiema granicami zmiennéj x, nazywamy wtedy, gdy powiększając między temi granicami x o nieskończenie mały przyrost, i funkcja o nieskończenie mały przyrost się powiększy; np. gdy x powiększamy o α, to gdy α nieskończenie małe, wtedy granicą $f(x+\alpha)$ jest $f(x)$

czyli

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

przybliża się wraz z α do zera.

Funkcja ciągła w pobliżu szczególnéj wartości na zmienną.

Funkcja jest ciągłą w pobliżu wartości szczególnéj na zmienną x, gdy jest ciągłą między dwiema bardzo blizkiemi siebie wartościami, między któremi wspomniona wartość na x leży.

Funkcja przerwana.

Gdy funkcja w pobliżu pewnéj wartości na zmienną przestaje być ciągłą, to mówimy że jest przerwaną.

I tak np. gdy mamy funkcje: $a+x$, $a-x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, A^x, $L(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\text{arc}\sin x$, $\text{arc}\cos x$, i uważać będziemy kiedy będą ciągłe, to znajdziemy, że:

$$\left.\begin{array}{l} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} \text{są ciągłemi w granicy od } x=-\infty \text{ do } x=+\infty$$

zaś funkcya

$$\frac{a}{x}\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ jest ciągłą w granicy } x=0,\ x=+\infty \\ 2 \text{ jest ciągłą w granicy } x=-\infty,\ x=0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^a \\ L(x) \end{array}\right\} \text{są ciągłe między } x=0,\ x=\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{arc}\sin x \\ \text{arc}\cos x \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pomiędzy granicami } x=-1,\ x=+1 \\ \text{są ciągłemi.} \end{array}$$

Funkcja ciągła wielu zmiennych.

Funkcja wielu zmiennych np.

$$f(x, y, z, \ldots)$$

jest ciągłą w pobliżu wartości szczególnych $X, Y, Z, \ldots$ na zmienne, jeżeli przedstawiwszy sobie przez α, β, γ,.... przyrosty nieskończenie małe zmiennych, zaś przez x, y, z,......... wartości równe lub bardzo blizkie X, Y, Z,..... to różnica

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma \ldots\ldots)-f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

staje się nieskończenie małą. Lecz aby ta ostatnia miała miejsce, musi być koniecznie $f(x, y, z, \ldots)$ ciągłą względem x, względem y, względem z.

Weźmy bowiem różnice

$$f(x+\alpha, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z, \ldots) - f(x+\alpha, y, z, \ldots),$$
$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma \ldots) - f(x+\alpha, y+\beta, z),$$

z których pierwsza staje się nieskończenie małą, gdy α jest nieskończenie małą, druga nieskończenie małą, gdy β nieskończenie małą, trzecia nieskończenie małą, gdy γ nieskończenie małą, a zatém summa tych różnic, czyli

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

jest nieskończenie małą, gdy $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ są nieskończenie małe, czyli granicą

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \ldots) \text{ jest } f(x, y, z, \ldots)$$

Gdy w poprzedzającem wstawimy, $X, Y, Z \ldots$ za $x, y, z, \ldots$ a znowu zamiast $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma, \ldots$ $x, y, z, \ldots$ to otrzymamy:

Twierdzenie I. *Gdy zmienne $x, y, z, \ldots$ mają za granice oznaczone ilości $X, Y, Z, \ldots$ i gdy $f(x, y, z, \ldots)$ ze względu na każdą z tych zmiennych $x, y, z, \ldots$ jest ciągłą w pobliżu wartości szczególnych*

$$x = X, y = Y, z = Z, \ldots$$

to granicą $f(x, y, z, \ldots)$ będzie $f(X, Y, Z, \ldots)$ albowiem w tym razie ilości $x - X$, $y - Y$, $z - Z$ znaczą *toż samo co $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ poprzednio.*

Twierdzenie II. *Gdy funkcja $f(x)$ ze względu na zmienną x jest ciągłą między granicami $x = x_0$, $x = X$, i gdy b jest wartością pośrednią między $f(x_0)$ i $f(X)$ to można będzie nadać na x taką wartość zawartą między x_0 i X, iż sprawdzi się równanie*

$$f(x) = b.$$

Dowodzenie. Aby powyższe twierdzenie dowieść, okażmy naprzód to twierdzenie:

Niech będzie $f(x)$ funkcją rzeczywistą x, która ze względu na x, ciągłą jest między granicami $x=x_0$, $x=X$, to gdy $f(x)$ i $f(X)$ mają znaki przeciwne, to możemy wybrać na x wartość pomiędzy granicami x_0 i X, czyniącą zadość równaniu $f(x)=0$.

$$\text{Niech } x_0 < X,$$
$$X - x_0 = h,$$

podzieliwszy to h na m równych sobie części, zaś m jest całkowite, to będzie szereg

$$f(x_0), f\left(x_0+\frac{h}{m}\right), f\left(x_0+\frac{2h}{m}\right), f\left(x_0+\frac{3h}{m}\right), \ldots.$$
$$f\left(X-\frac{h}{m}\right), f(X).$$

Gdy porównywać będziemy pierwszy wyraz z drugim, drugi z trzecim, trzeci z czwartym i t. d. to dojdziemy w końcu do tego, że dwa wyrazy w tym szeregu zejdą się ze znakami przeciwnemi np.

$$f(x_1), f(X_1)$$

i tak, że $x_1 < X_1$, czyli będzie

$$x_0 < x_1 < X_1 < X,$$
$$X_1 - x_1 = \frac{h}{m} = \frac{1}{m}(X - x_0)$$

Teraz pomiędzy x_1 i X_1 znowu znajdą się dwie wartości x_2 i X_2 dające $f(x_2)$ i $f(X_2)$ obok siebie leżące ze znakami przeciwnemi i będzie $x_1 < x_2 < X_2 < X_1$ i

$$X_2 - x_2 = \frac{1}{m}(X_1 - x_1) = \frac{1}{m^2}(X - x_0).$$

Postępując tak dalej otrzymamy dwa szeregi

1) malejący $X, X_1, X_2, X_3 \ldots.$

2) rosnący $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots.,$

gdzie wyrazy pierwszego przewyższają odpowiednie wyrazy drugiego o iloczyny:

$$(X-x_0), \frac{1}{m}(X-x_0), \frac{1}{m^2}(X-x_0), \ldots$$

Ztąd wynika, że ogólny wyraz 1go szeregu i 2go przybliża się do jednéj granicy, tą zaś granicą niech będzie a; a że ilości dodatne, jakie przedstawiają funkcje zmiennych wziętych z szeregu 1go i ilości ujemne, jakie przedstawiają funkcje zmiennych wziętych z szeregu 2go przybliżają się do jednéj i téj saméj granicy, więc tą granicą musi być 0 czyli przy wartości $x=a$, $f(x)=0$.

Gdy więc teraz zamiast $f(x)$ weźmiemy $f(x)-b$, gdzie b jest ilością stałą, to na mocy powyższego rozumowania znajdziemy

$$f(x)-b=0$$
$$f(x)=b$$

czyli znajdzie się między granicami x_0 i X wartość x, sprawdzająca równanie

$$f(x)=b$$

O szeregach zbieżnych. Zasady co do zbieżności szeregów. Summa niektórych zbieżnych szeregów.

Ogólne uwagi o szeregach.

Gdy summa n pierwszych wyrazów szeregu

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . u_{n-1}$$

przybliża się przy wzrastającéj wartości na n do pewnéj oznaczonéj granicy np. S_0, wtedy szereg ten jest zbieżnym, a S summą wyrazów tego szeregu się zowie. Gdy przeciwnie przy ciągle wzrastającéj wartości na n summa S_n do żadnéj oznaczonéj granicy się nie przybliża, wtedy taki szereg zowie się rozbieżnym, i dla takiego żadnéj summy nie mamy. W obu razach ten wyraz, który znakiem n opatrzony, zowie się wyrazem ogólnym i gdy takowy jako funkcja n jest dany, to szereg jest już dokładnie oznaczony.

Jeden z najprostszych szeregów jest postęp ilorazowy:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots\ldots (1),$$

którego ogólnym wyrazem jest x^n. Summa n pierwszych wyrazów tego szeregu jest:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}$$

Gdy $x > 1$ szereg jest rozbieżnym, gdy $x < 1$ szereg jest zbieżnym, ułamek $\frac{x^n}{1-n}$ do zera się przybliża, a tém samém summa n jego wyrazów będzie:

$$S_n=\frac{1}{1-x}$$

Aby szereg

$$u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots u_n, u_{n+1}, \ldots.$$

był zbieżnym, to konieczną jest rzeczą, aby przy ciągle wzrastającéj wartości na n summa

$$S_n=u_0+u_1+u_2+u_3\ldots\ldots+u_{n-1}$$

przybliżała się do oznaczonéj granicy S, zkąd także wypada, żeby różnice pomiędzy summami

$$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}\ldots.$$

i granicą S, jako téż różnice między niemi samemi były nieskończenie małe. A że różnice te między summami następnemi, a pierwszą są:

$$S_{n+1}-S_n=u_n$$
$$S_{n+2}-S_n=u_n+u_{n+1}$$
$$S_{n+3}-S_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}$$

zatém konieczną jest rzeczą, aby summy wyrazów

$$u_n, u_n+u_{n+1}, u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \ldots\ldots$$

były ilościami nieskończenie małemi.

Zatém i odwrotnie: gdy w szeregu wszystkie te warunki są wypełnione, to szereg bez wątpienia jest zbieżnym.

Weźmy jako drugi przykład następujący szereg:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots\ldots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\ldots (2).$$

Ogólnym wyrazem tego szeregu jest $\frac{1}{n}$, który maleje gdy n wzrasta.

Ten szereg nie jest zbieżnym, gdyż summa wyrazów, począwszy od $\frac{1}{n+1}$, do $\frac{1}{2n}$ włącznie t. j.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

jest widocznie większą od

$$n.\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Oznaczmy przez S_n summę n pierwszych wyrazów szeregu (2), a jeszcze inaczéj się przekonamy, że szereg ten nie jest zbieżnym.

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^m}\right)$$

gdzie 2^m jest najwyższą potęgą 2, która w n się zawiera. Ztąd także wynika

$$S_n > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{m}{2}$$

A więc gdy m wzrasta, to i S_n wzrasta, a że m wzrasta wraz z n, to znaczy, że ta summa ciągle wzrasta, gdy liczba wyrazów szeregu się powiększa, a do żadnéj granicy oznaczonéj się nie przybliża, czyli że szereg jest rozbieżnym.

Weźmy jeszcze szereg:

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ldots\ldots \frac{1}{1.2.3\ldots n}\ldots\ldots(\mathbf{3}).$$

Wyrazy szeregu, które po n^{tym} następują t. j.

$$\frac{1}{1.2\ldots n},\ \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)},\ \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)(n+2)},\ldots$$

będą odpowiednio mniejsze od wyrazów postępu ilorazowego:

$$\frac{1}{1.2\ldots n},\ \frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{n},\ \frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^2},\ldots$$

A że summa tychże ostatnich t. j.

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{n}{1.2\ldots n}\cdot\frac{1}{n-1}=$$

$$=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1}$$

ma za granicę 0, gdy n wzrasta, to tém bardziéj wspomniona summa wyrazów po n^{tym} następujących w szeregu danym, do tejże granicy zero się przybliża, a tém samém i szereg, którego summę n wyrazów nazwiemy przez e, będzie zbieżnym; ta zaś summa przy $n=11$ daje:

$$e=2{,}7182818$$

i jak wiadomo, ona za cechę logarytmów Nepera jest przyjętą.

Gdy szereg

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots$$

jest zbieżnym, S_n summą n pierwszych wyrazów, to będzie:

$$S = S_n + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots \text{ ztąd}$$

$$S - S_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

a uczyniwszy

$$S - S_n = r_n$$

$$\text{to } S = S_n + r_n$$

Gdy wyrazy szeregu jednę i tęż samą zmienną x zawierają; gdy nadto szereg zbiega się, i gdy każdy wyraz szeregu w pobliżu szczególnéj wartości na x jest funkcją ciągłą tejże zmiennéj, to:

$$S_n,\ r_n \text{ tudzież } S$$

są funkcjami ciągłemi zmiennéj x. Co do pierwszych dwóch S_n i r_n to jest widoczném, bowiem gdy x o nieskończenie małą ilość α wzrasta, to i każdy wyraz jako funkcja ciągła tego x również o ilość nieskończenie małą wzrasta, a tém samém S_n i r_n. Ztąd zaś wynika, że i przyrost funkcji S również tylko nieskończenie mały być musi.

Mamy więc następujące:

Twierdzenie. *Gdy wyrazy szeregu*

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots$$

są funkcjami téj saméj zmiennéj i ciągłemi w pobliżu szczególnéj wartości téjże, dla któréj szereg się zbiega, to w pobliżu téj szczególnéj wartości na zmienną, summa szeregu S będzie również funkcją ciągłą na x.

I tak w szeregu (1) summa $S_n = \dfrac{1}{1-x}$ *jest funkcją ciągłą na x pomiędzy granicami $x = -1$, $x = +1$, gdyż tylko w tych granicach na zmienną szereg jest zbieżnym.*

O szeregach, których wszystkie wyrazy są dodatne.

Gdy wszystkie wyrazy szeregu

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots (4)$$

są dodatne, to można za pomocą następujących twierdzeń poznać, czy szereg jest zbieżnym czy rozbieżnym.

TWIERDZENIE I. *Znalazłszy granicę lub granice, do których przybliża się wyrażenie* $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ *gdy n ciągle wzrasta i oznaczywszy przez k największą z tych granic, to przy wartości na* $k<1$, *szereg* (4) *będzie zbieżnym, a przy* $k>1$ *rozbieżnym* (*).

DOWODZENIE. Gdy $k<1$, to możemy obrać liczbę U, która między 1 i k leży tak, iż będzie:

$$k < U < 1$$

Gdy n jest większe od każdéj nadanéj liczby, to największe wartości na $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ nie będą się mogły nieskończenie przybliżać do granicy k, gdy nie będą wprzód ciągle mniejsze od U. Następnie nadać można na n taką wartość, że przy niéj lub większéj od niéj mamy ciągle

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < U$$

$$u_n < U^n$$

zkąd wynika, że wyrazy szeregu

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots u_n,\ u_{n+1} \ldots\ldots$$

są stale mniejsze jak odpowiednie im wyrazy postępu ilorazowego:

$$1,\ U,\ U^2,\ U^3, \ldots\ldots U^n,\ U^{n+1}, \ldots\ldots$$

---

*) Niełatwo jest poznać, czy szereg jest zbieżnym, gdy $k=1$.

że zaś ten postęp jest szeregiem zbieżnym (gdyż $U<1$), to tém bardziéj szereg (4) zbieżnym być musi.

Gdy znów $k>1$, to liczbę U tak obrać możemy, iż będzie

$$k>U>1$$

Niech n większe będzie od każdéj nadanéj liczby, to największe wartości na $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ nie będą się mogły nieskończenie do granicy k przybliżać, gdy nie staną się wprzód ciągle większe od U tak, iż przy dość wielkiéj wartości na n będzie:

$$(u_n)^{\frac{1}{n}}>U$$

$$u_n>U^n$$

Wyrazy więc szeregu

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

będą większe od odpowiednich im wyrazów postępu ilorazowego

$$1, U, U^2, U^3, \ldots U^n, U^{n+1}, U^{n+2}, \ldots$$

Lecz ponieważ ten ostatni jest rozbieżnym (gdyż $U>1$) to tém bardziéj nim szereg (4) być musi.

Twierdzenie II. *Gdy przy wzrastającéj wartości na n iloraz*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

do oznaczonéj granicy k się przybliża to szereg (4) *jest zbieżnym, jeżeli* $k<1$ *a rozbieżnym skoro* $k>1$.

Dowodzenie. Wziąwszy dowolną liczbę ε mniejszą od różnicy jaka jest między 1 i k będzie można łatwo nadać na n tak wielką wartość, że przy niéj lub przy większéj od niéj stosunek

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

będzie ciągle zawarty między dwiema granicami

$$k-\varepsilon,\ k+\varepsilon$$

a mianowicie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k-\varepsilon,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < k+\varepsilon$$

$$u_{n+1} > u_n\,(k-\varepsilon),\quad u_{n+1} < u_n\,(k+\varepsilon)$$

daléj podobnież

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k-\varepsilon,\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k+\varepsilon,$$

$$u_{n+2} > (k-\varepsilon)\,u_{n+1},\quad u_{n+2} < (k+\varepsilon)\,u_{n+1}$$

a tém bardziéj

$$u_{n+2} > u_n\,(k-\varepsilon)^2,\quad u_{n+2} < u_n\,(k+\varepsilon)^2$$

i t. p.

Zkąd okazuje się, że wyrazy szeregu (4) są zawarte między wyrazami odpowiedniemi dwóch postępów ilorazowych

$$u_n,\ u_n\,(k-\varepsilon),\ u_n\,(k-\varepsilon)^2,\ldots\ldots$$

$$u_n,\ u_n\,(k+\varepsilon),\ u_n\,(k+\varepsilon)^2,\ldots\ldots$$

które będą zbieżnemi, gdy $k<1$, a rozbieżnemi, gdy $k>1$, a zatem i t. d.

Przykład. Niech będzie szereg:

$$1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ldots\frac{1}{1.2\ldots n},\ldots$$

to $u_{n+1} = \dfrac{1}{1.2\ldots n(n+1)}$

$$u_n = \frac{1}{1.2\ldots n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1},\quad k = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

co dowodzi, że powyższy szereg jest zbieżnym.

TWIERDZENIE III. *Gdy w szeregu* (4) *każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego, to on jest zbieżnym gdy szereg*

$$u_0,\ 2u_1,\ +4u_3,\ 8u_7,\ 16u_{15}, \ldots\ldots (5)$$

zbiega się, a rozbieżnym gdy ten szereg się rozbiega.

DOWODZENIE. Dajmy na to, że szereg (4) jest zbieżnym i jego summa jest S, to będzie:

$$u_0 = u_0,\ 2u_1 = 2u_1,\ 4u_3 < 2u_2 + 2u_3,$$
$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7, \text{ i t. d.}$$

Z dodania tych nierówności wypada:

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots\ldots < u_0 + 2(u_1 + u_2 + u_3 + \cdots)$$

czyli

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \ldots\ldots < 2S - u_0 \ldots\ldots$$

Zkąd wynika, że szereg (5) jest zbieżnym także

Przypuśćmy znowu, że szereg (4) jest rozbieżnym, to summa jego bardzo wielkiéj liczby wyrazów przewyższać będzie każdą obraną wartość liczebną, a gdy

$$u_0 = u_0,\ 2u_1 > u_1, + u_2,\ 4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14} \text{ itd.}$$

zkąd

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots > u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \ldots \text{ czyli}$$
$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + \ldots\ldots > S.$$

Że zaś S większe jest od każdéj obranéj liczby, dla tego i szereg (5) rozbieżnym być musi.

Przykład. Weźmy szereg:

$$1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{4^n} \text{ i t. d.} \ldots\ldots$$

gdzie n dowolną wielkość oznacza.

Szereg (5) w tym razie przyjmie kształt:

$$1,\ 2 \times \frac{1}{2^n},\ 4 \times \frac{1}{4^n},\ 8 \times \frac{1}{8^n}, \ldots \text{ czyli}$$
$$1,\ 2^{1-n},\ 4^{1-n},\ 8^{1-n}, \ldots$$

Szereg ten jest ilorazowym i zbieżnym, gdy $n > 1$ a rozbieżnym gdy $n < 1$ lub $n = 1$, a więc przy tych samych warunkach i dany szereg będzie zbieżnym, lub rozbieżnym, i tak z szeregów

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2} \text{ i t. d.}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ i t. d.}$$

$$1, \frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{3^{1/2}}, \frac{1}{4^{1/2}} \text{ i t. d.}$$

pierwszy jest zbieżnym, dwa drugie rozbieżnemi.

TWIERDZENIE IV. *Niech L oznacza logarytm dowolnego układu, i przyjmijmy, że przy wzrastającéj wartości na n, iloraz*

$$\frac{L(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}$$

przybliża się do granicy h, to będzie szereg (4) *zbieżnym, gdy $h > 1$ a rozbieżnym gdy $h < 1$.*

DOWODZENIE. Dajmy najprzód, że $h > 1$, to można obrać trzecią ilość a dowolną, tak iżby było: $h > a > 1$, przy bardzo wielkiéj wartości na n będzie wtedy iloraz

$$\frac{L(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)} \text{ lub jemu równy } \frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L(n)}$$

ciągle większy jak a t. j. gdy n pewną granicę przewyższa, to będzie ciągle:

$$\frac{L\left(\frac{1}{u_n}\right)}{L(n)} > a, \text{ lub co na jedno wyjdzie}$$

$$L\left(\frac{1}{u_n}\right) > a\,L(n), \text{ zkąd także } \frac{1}{u_n} > n^a,\ u_n < \frac{1}{n^a}$$

A zatém wyrazy szeregu (4) będą mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu

$$1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, \ldots \frac{1}{n^a}, \frac{1}{(n+1)^a}, \ldots$$

a że ten jest zbieżny gdyż $a>1$, to tym bardziéj, nim będzie szereg (4).

Odwrotnie dowodzi się, że gdy $a<1$, to szereg (1) jest rozbieżnym.

O szeregach urojonych.

Jeżeli wyrazy szeregu są kształtu $u+v\sqrt{-1}$, to taki szereg jest zbieżnym, gdy summa wyrazów rzeczywistych ma za granicę s, a zaś summa współczynników przy $\sqrt{-1}$ przybliża się do t i mówi się wtedy, że granicą szeregu jest $s+t\sqrt{-1}$. Tak więc sprowadza się do zbieżności dwóch szeregów. Można jednak jeszcze inacéj uważać; i tak niech będzie:

$$u+v\sqrt{-1}=\rho\,(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

a szereg dany przyjmie kształt

$$1)\ \begin{cases} \rho_0(\cos\theta_0+\sqrt{-1}\sin\theta_1)+\rho_1(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta_1) \\ \quad +\ldots\ldots+\rho_n(\cos\theta_n+\sqrt{-1}\sin\theta_n)+\ldots \end{cases}$$

Lecz jeżeli szereg

$$2)\ \rho_0+\rho_1+\rho_2+\ldots\ldots\rho_n+\ldots\ldots$$

jest zbieżnym, przyjąwszy wszystkie wyrazy dodatne, to tém bardziéj będą oba następne

$$3)\ \begin{cases} \rho_0\cos\theta_0,\ \rho_1\cos\theta_1,\ldots\ldots\rho_n\cos\theta_n, \\ \rho_0\sin\theta_0,\ \rho_1\sin\theta_1,\ldots\ldots\rho_n\sin\theta_n, \end{cases}$$

Mamy więc następujące prawo:

Szereg urojony jest zbieżnym, gdy szereg wartości bezwzględnych modułów wszystkich jego wyrazów jest zbieżnym.

Gdy szereg (2) nie jest zbieżnym, to możliwém jest, żeby te wyrazy zbliżały się lub nie zbliżały się do zera. Jeżeli one się nie zbliżają do zera, to szeregi (3) nie mogą być oba razem zbieżne, i ponieważ przy jakiéjkolwiek wartości na o niemożliwą jest rzeczą, gdy ρ nie przybliża się do zera, żeby oba wyrazy cos o i sin o(*) przybliżały się do zera, to i szereg (1) jest w tym przypadku rozbieżnym.

Jeżeli zaś wyrazy szeregu (2) zmniejszają się nieoznaczenie, a szereg ten jest rozbieżnym, to jednakże szeregi (3) mogą być zbieżne, ponieważ wszystkie ich wyrazy nie są z jednakowemi znakami.

O wyrażeniach urojonych.

Rozwiązanie równań stopnia drugiego prowadzi nas czasem do pierwiastków kwadratowych z ilości ujemnych. Te rodzaje wyrażeń nie przedstawiają ani liczb dodatnych, ani ujemnych, lecz oznacza się ich szczególną nazwą ilości urojonych.

Jeżeli mamy np. równanie

$$x^2-2ax+a^2+b^2=0$$

to wyprowadza się z niego dwie wartości urojone:

$$x=a\pm\sqrt{-b^2}=a\pm b\sqrt{-1}.$$

Wyrażenie to i podobne jemu nic samo przez się nie znaczą, tak jak $\sqrt{-1}$, lecz gdy wyrażenia urojone wzajemnie połączymy przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub t. p., działając z niemi zawsze tak jakoby $\sqrt{-1}$ był ilością rzeczywistą, któréj kwadrat -1, to

---

*) Albowiem gdy sin o = 0, cos o = 1, gdy cos o = 0, sin o = 1.

otrzymamy na wypadki nowe wyrażenia urojone. Dlatego użyteczną będzie rzeczą oznaczyć wypadki, jakie powstają z takowego połączenia ilości urojonych. Abyśmy łatwiéj cel ten osiągnąć mogli, należy uważać za równe dwa wyrażenia urojone:

$$A+B\sqrt{-1},\ A'+B'\sqrt{-1}$$

gdy 1mo ilości rzeczywiste w tych wyrażeniach są sobie równe, to jest $A=A'$, 2do gdy współczynniki ilości urojonych są także sobie równe, to jest $B=B'$. To przypuściwszy, będzie, że każde równanie urojone jest tylko wyrażeniem algebraiczném dwóch równań pomiędzy ilościami rzeczywistemi.

Uważajmy np. iloczyn dwóch wyrażeń,

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x \text{ i } \cos y+\sqrt{-1}\sin y$$

który jest

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y+\sqrt{-1}(\sin x\cos y+\sin y\cos x)$$

lub

$$\cos(x+y)+\sqrt{-1}\sin(x+y)$$

a otrzymamy równanie algebraiczne

$$\cos(x+y)+\sqrt{-1}\sin(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y+\sqrt{-1}(\sin x\cos y+\sin y\cos x)$$

gdzie łuki x i y są rzeczywiste, wyrażone przez równania.

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x.$$

Podobnież mamy równanie

$$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)$$
$$=\cos(x+y+z)+\sqrt{-1}\sin(x+y+z),$$

jako też i inne temu podobne, gdy liczba czynników jest jakakolwiek.

Przypuściwszy zaś $x=y=z=\ldots\ldots$

otrzymujemy wzór Moivra

1) $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m=\cos mx+\sqrt{-1}\sin mx.$

Rozwinąwszy wiadomym sposobem pierwszą stronę równania (1) i przyrównawszy z sobą ilości rzeczywiste jako też współczynniki przy ilościach urojonych, otrzymamy:

$$\cos mx=\cos^m x-\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos^{m-2}x\sin^2 x+$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{m-4}x\sin^4 x-\ldots$$
$$\sin mx=m\cos^{m-1}x\sin x-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\times$$
$$\times\cos^{m-3}x\sin^3 x+\ldots\ldots$$

Należy także uważać, że rozwinięcie wyrażenia

$$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^m$$

różni się od rozwinięcia

$$(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)^m$$

tylko znakami przy wyrazach zawierających $\sqrt{-1}$ w potęgach nieparzystych, będzie więc

$$(\cos x-\sqrt{-1}\sin x)^m=(\cos mx-\sqrt{-1}\sin mx).$$

Rozumiejąc przez pierwiastek potęgi $n^{\text{téj}}$ z wyrażenia urojonego inne wyrażenie, które podniesione do potęgi $n^{\text{téj}}$ podług znanéj zasady wyda rzeczone dane wyrażenie urojone, to widoczną jest rzeczą, że

$$\cos\frac{x}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{x}{n}$$

jest pierwiastkiem potęgi $n^{\text{téj}}$ wyrażenia

$$\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x$$

Mamy więc

$$(\cos x\pm\sqrt{-1}\sin x)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{x}{n}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{x}{n}$$

a gdy oba wyrażenia podniesiemy do potęgi p, to otrzymamy

$$(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)^{\frac{p}{n}} = \cos \frac{p}{n} x \pm \sqrt{-1} \sin \frac{p}{n} x.$$

Rozciągnęliśmy więc wzór (1) i do tego przypadku, gdy m jest dodatną lecz ułamkową liczbą jakąkolwiek. Okażemy teraz jeszcze prawdziwość wspomnionego wzoru przy potędze ujemnéj, gdy np. $m = -n$. I tak:

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^{-n} = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n} =$$

$$= \frac{1}{\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx}.$$

Lecz że iloraz jest wyrażeniem takiém, iż pomnożony przez dzielnik $\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx$, wyda dzielną 1, to widocznie ten iloraz być musi

$$\cos(-nx) + \sqrt{-1} \sin(-nx),$$

zatém

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^{-n} = \cos(-nx + \sqrt{-1} \sin(-nx).$$

Rozwiążmy teraz zadanie odwrotne, które polega na rozwinięciu $\cos^m x$ i $\sin^m x$ za pomocą wstaw i dostaw łuków wielokrotnych względem x, gdy m jest liczba całą.

Dlatego dajmy

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x = u,$$
$$\cos x - \sqrt{-1} \sin x = v,$$

zkąd

$$2 \cos x = u + v,$$

a następnie

$$2^m \cos^m x = u^m + mu^{m-1} v + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u^{m-2} v^2 + \dots$$
$$\dots + muv^{m-1} + v^m.$$

Uważając teraz, że $uv = 1$, i że $u^k + v^k = 2\cos kx$, będzie

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cos(m-4)x + \ldots..$$

Jeżeli m jest parzyste, to wyraz który się znajduje w środku rozwinięcia $(u+v)^m$ sprowadzi się do

$$\frac{m(m-1)\ldots..\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots..\frac{m}{2}}$$ i tworzyć będzie ostatni wyraz

rozwinięcia $2^m \cos^m x$.

Jeżeli m jest nieparzyste, to dwa wyrazy środkowe na u i v są kształtu

$$u^{\frac{m+1}{2}}\,.\,v^{\frac{m-1}{2}} \text{ i } u^{\frac{m-1}{2}}\,.\,v^{\frac{m+1}{2}},$$

wyrażenia, które widocznie sprowadzą się do u i v, gdyż $uv = 1$. Ostatni wyraz rozwinięcia $2^m \cos^m x$ jest wtedy:

$$2\frac{m(m-1)\ldots\ldots.\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots..\left(\frac{m+1}{2}\right)}\cos x.$$

Rozwińmy teraz $\sin^m x$, uważając że

$$2\sqrt{-1}\sin x = u - v,$$

zkąd

$$2^m(\sqrt{-1})^m \sin^m x =$$
$$= u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}u^{m-2}v^2 - \ldots..$$

Gdy m jest parzyste to wyrazy w równéj odległości od skrajnych będą z jednakowemi znakami, biorąc więc je po dwa, będzie:

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}} \sin mx = 2 \cos mx - 2m \cos (m-2)\, x$$
$$+ 2\, \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} \cos (m-4)\, x - \ldots\ldots$$

Ostatni zaś wyraz będzie:

$$\pm \frac{m\,(m-1)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{m}{2}}.$$

Znak $+$ odpowiada $\frac{m}{2}$ parzystemu, a znak $-$, $\frac{m}{2}$ nieparzystemu. Jeżeli m jest nieparzyste, to rozwinięcie musi mieć kształt:

$$u^m - v^m - m\,(u^{m-2}\ v^{m-2}) + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} \times$$
$$\times\, (u^{m-4} - v^{m-4}) - \ldots\ldots$$

(wstawiając wszędzie za u v jedność).

Jeżeli więc zważymy, że $u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \sin kx$, to wziąwszy tylko współczynniki $\sqrt{-1}$

$$2^m\,(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m x = 2 \sin mx - 2m \sin (m-2)\, x$$
$$+ 2\, \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} \sin (m-4)\, x - \ldots\ldots$$

Ostatni wyraz będzie:

$$\pm 2\, \frac{m(m-1)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)} \sin x.$$

Znak $+$ odnosi się do tego przypadku, gdzie $\frac{m-1}{2}$ jest parzyste, a znak $-$ gdy ono jest nieparzyste.

Użycie linji trygonometrycznych do wyciągania pierwiastków z ilości rzeczywistych lub urojonych.

Pierwiastki stopnia m z liczby rzeczywistéj dodatnéj lub ujemnéj $\pm A$, są pierwiastkami równania

$$y^m \pm A = 0;$$

te pierwiastki mogą się sprowadzić do pierwiastków z jedności, przypuściwszy $y = ax$, gdzie a oznacza pierwiastek arytmetyczny potęgi $n^{\text{téj}}$ z liczby A, równanie zaś dane sprowadzi się do następnego

$$x^m \pm 1 = 0,$$

w którém oznaczymy m pierwiastków wszystkich między sobą nierównych. Weźmy najprzód

$$x^m - 1 = 0,\ x^m = 1.$$

Możemy przedstawić jedność w kształcie:

$$\cos z + \sqrt{-1} \sin z,$$

z którego to wyrażenia, jak nam wiadomo, łatwo wyciągnąć pierwiastek. Należy przypuścić $z = 2n\pi$; gdzie n jest liczbą dowolną dodatną lub ujemną, a będzie identyczność:

$$1 = \cos 2n\pi + \sqrt{-1} \sin 2n\pi;$$

zatém wyrażenie:

$$\cos \frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m} \ldots\ldots (1)$$

daje pierwiastki m^{tego} stopnia z jedności a ztąd wartość na x, przy każdéj całkowitéj wartości na n jest:

$$x = \cos \frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m}.$$

W tém wyrażeniu nadaje się na n wartość 0, 1, 2,.... dotąd, iż mieć będziemy m wartości dla strony pierwszéj.

Jeżeli m jest parzyste, to przypuściwszy $m=2k$,

$$x=\cos\frac{n\pi}{k}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{k}.$$

Należy więc nadawać dla n, wartości 0, 1, 2.....k, Dwie skrajne wartości dadzą $x=1$, $x=-1$, a wszystkie inne wartosci na x są urojone, sprzężone.

Gdy mamy

$$m=2k+1,$$

to należy dawać na n, wartości 0, 1, 2, ...k. Pierwsza daje $x=1$ inne są wszystkie urojone sprzężone.

Gdy mamy

$$x^m+1=0,\ x^m=-1,\ x=\sqrt[m]{-1}.$$

Można również nadać na —1 kształt

$$\cos z+\sqrt{-1}\sin z,$$

przypuściwszy $z=(2n+1)\pi$. Będziemy więc mieli wartość na x z wzoru

$$x=\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m};$$

gdzie należy przyjąć m wartości następnych dla n, ponieważ wszystkie te odpowiadać będą różnym wstawom lub dostawom, inne zaś dadzą też same wartości na x. Wszystkie pierwiastki równania

$$x^m+1=0$$

są dane przez wzór

$$x=\cos\frac{(2n+1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m},$$

nadając na n, wartości dodatne od 0 dotąd, dopóki nie otrzymamy z niego m wartości dla strony drugiéj. Jeżeli $m=2k$, to wartości na n będą 0, 1, 2,.....$k-1$, a wartości na x będą wszystkie urojone sprzężone. Jeżeli $m=2k+1$, to wartości na n będą 0, 1, 2.....k; ostatnia da $x=-1$, wszystkie inne wartości na x będą sprzężone urojone.

Mając więc wiadome pierwiastki z ± 1 otrzymamy tém samém pierwiastek z $\pm A$, mnożąc je przez pierwiastek arytmetyczny z A.

Szukajmy teraz pierwiastku potęgi $m^{\text{téj}}$ z wyrażenia kształtu

$$a \pm b\sqrt{-1},$$

które możemy przedstawić w kształcie

$$\rho(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z),$$

oznaczając ρ i z przez dwa równania

$$\rho\cos z = a,\ \rho\sin z = b$$

zkąd $\rho = \pm\sqrt{(a^2+b^2)}, \cos z = \frac{a}{\rho},\ \sin z = \frac{b}{\rho}$.

Dla większéj dogodności, weźmy tylko wartość dodatną na ρ. Oznaczmy przez φ najmniejszy łuk dodatny, mający za dostawę $\frac{a}{\rho}$ a za wstawę $\frac{b}{\rho}$; można będzie bez zmiany tych linji dodać go do pewnéj liczby okręgów, a wypadnie

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho\left[\cos(\varphi + 2n\pi) \pm \sqrt{-1}\sin(\varphi + 2n\pi)\right];$$

widocznie więc pierwiastek $m^{\text{téj}}$ potęgi pierwszéj strony równa się

$$\rho^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\varphi+2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right].$$

Należy zatém widocznie na n nadać m wartości następnych, dodatnych lub ujemnych; wszystkie bowiem inne dadzą też same wypadki. Nadto te m wartości na n

dadzą różne wartości dla wstaw i dostaw łuku $\frac{\varphi+2n\pi}{m}$, nadając więc na n wartości 0, 1, 2....m—1, to wszystkie pierwiastki szukane, będą dane przez wzór

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right).$$

Wstawy i dostawy wyrażone za pomocą potęg urojonych.

Jeżeli w rozwinięciu e^x zamienimy x na $x\sqrt{-1}$ i gdy przedstawimy szereg wypadkowy przez $e^{x\sqrt{-1}}$, to będzie:

$$e^{x\sqrt{-1}}=1+x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1\,.\,2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1\,.\,2\,.\,3}+$$
$$+\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots..(1)$$

podobnież gdy za x wstawimy $-x\sqrt{-1}$ będzie

$$e^{-x\sqrt{-1}}=1-x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1\,.\,2}+\frac{x^3\sqrt{-1}}{1\,.\,2\,.\,3}+$$
$$+\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\ldots..(2)$$

Te równania mogą być napisane jak następuje:

$$3)\ \begin{cases} e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x, \\ e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\sin x, \end{cases}$$

zkąd wyprowadza się

$$4)\ \begin{cases} \cos x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x=\dfrac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

We wszystkich tych wzorach nie należy zapominać, że $e^{x\sqrt{-1}}$ i $e^{-x\sqrt{-1}}$ nie mają żadnego znaczenia jako wyrażenia wykładnicze, a przedstawiają tylko szeregi, jakie otrzymujemy, podstawiając $+x\sqrt{-1}$ i $-x\sqrt{-1}$ za x w rozwinięciu e^x, postępując z $\sqrt{-1}$ znanym sposobem.

Łatwo tu jest okazać, że z temi wykładniczemi wyrażeniami urojonemi postępuje się tak samo, jak gdyby wykładniki były rzeczywiste.

I tak:

$$e^{(x+y)} = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

zkąd

$$1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots\right)$$

Identyczność nie popsuje się, gdy w miejsce x i y weźmiemy $x\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$, zkąd wynika, że

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}\,.\,e^{y\sqrt{-1}},$$

lub gdy tylko y na $y\sqrt{-1}$ zamienimy, to wypadnie

$$e^{(x+y\sqrt{-1})} = e^x\,.\,e^{y\sqrt{-1}}.$$

Można nadać tak samo jak wykładnikom rzeczywistym, nazwę logarytmów wykładnikom urojonym i aby mieć logarytm wyrażenia kształtu $a \pm b\sqrt{-1}$, należy uczynić

$$a \pm b\sqrt{-1} = \rho(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x) = e^{l[\rho(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)]},$$

a że $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$,

więc $x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)$,

zatém

$$a \pm b\sqrt{-1} = e^{l\rho \pm x\sqrt{-1}} = e^{l\rho \pm (\varphi \pm 2n\pi)\sqrt{-1}},$$

gdzie φ jest najmniejszą wartością dodatną na x; będzie więc

$$l(a \pm b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(a^2 + b^2) \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

Gdy $b = 0$, to mamy dla wszystkich wartości na logarytm a

$$la \pm \sqrt{-1}(\varphi \pm 2n\pi).$$

Łuk φ jest równy 0 jeżeli a jest dodatne, a równy π jeżeli a ujemne.

Mamy więc, rozumiejąc przez la logarytm arytmetyczny liczby a

$$l(+a) = la \pm 2n\pi\sqrt{-1},$$
$$l(-a) = la \pm (2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ostatnie wyrażenie nie daje żadnéj wartości rzeczywistéj, pierwsze daje tylko jedną.

Czyniąc $a = 1$, będzie

$$l(+1) = \pm 2n\pi\sqrt{-1},\ l(-1) = \pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Granica potęgi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, gdy m nieoznaczenie wzrasta do ∞.

Niech m jest liczbą całą dodatną, wzrastającą do nieskończoności, i uważajmy wyrażenie

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

które przedstawia się w kształcie nieoznaczonym 1^∞, gdy uczynimy m nieskończenie wielkiém. Aby oznaczyć granicę, do któréj się to wyrażenie zbliża, skoro m wzrasta nieoznaczenie, rozwińmy je podług wzoru znanego dwumianu

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{m^2}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}\cdot\frac{1}{m^n}+\ldots+\frac{1}{m^m}.$$

Wszystkie wyrazy drugiéj strony są dodatne, a ich liczba równa $m+1$. Lecz można to równanie przedstawić jeszcze w tym kształcie:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m =$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}+\ldots$$

Tu widzimy, że wyrażenie dane wzrasta wraz z m, a gdy $m=\infty$, równanie powyższe zamienia się na

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\ldots$$

A że granicą szeregu, jaki przedstawia nam druga strona równania jest e, to e jest zarazem granicą wyrażenia $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

Weźmy teraz drugi przypadek, w którym m jest dodatne lecz ułamkowe, równe np. $\mu+\varepsilon$, gdzie μ oznacza ilość całkowitą, ε ułamek: to wyrażenie $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ zamieni się na $\left(1+\frac{1}{\mu+\varepsilon}\right)^{\mu+\varepsilon}$. Widoczną jest rzeczą, że gdy mianownik w powyższém wyrażeniu $\mu+\varepsilon$ powiększa się, a wykładnik zostaje ten sam, lub gdy mianownik zostaje ten sam, a wykładnik $\mu+\varepsilon$ się pomniejsza, to rzeczone wyrażenie w każdym z tych przypadków się pomniejsza, i odwrotnie; słowem, że to wyrażenie zawartém jest między dwoma następującemi:

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1} \text{ i } \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu},$$

które można przedstawić w kształcie:

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)}.$$

Gdy μ wzrasta do nieskończoności, a ciągle jest całkowite i dodatne, to granicą dla każdego z czynników

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} \text{ i } \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}$$

jest e, a dla czynników $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$ i $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)$ jest 1; czyli dowiedzionêm zostało, że choć m jest ułamkiem, to zawsze granicą dla $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ jest e.

Rozbierzmy teraz przypadek, w którym m jest ilością ujemną, i w tym celu oznaczmy $\frac{1}{m}=\alpha$, będzie więc

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nadto niech będzie $1+\alpha=\frac{1}{1+\beta}$, gdzie β przybliża się do granicy zero lecz jest dodatne. Z tego równania mamy:

$$\alpha=\frac{-\beta}{1+\beta}, \text{ a ztąd}$$

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{-\beta}}}=(1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}}=(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}(1+\beta).$$

Gdy β przybliża się do zera, to $(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ do granicy e, zaś $(1+\beta)$ do 1 się przybliża, a więc granica $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ czyli $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, gdy m jest ujemne, będzie zawsze e.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY.

ROZDZIAŁ I.

Stosunki jednoczesnych przyrostków funkcji i zmiennych. Różniczka. Współczynnik różniczkowy.

Stosunki jednoczesnych przyrostków funkcji i zmiennych.

1. Niechaj y będzie funkcją jakąkolwiek zmiennéj x, wypełniającą następujące warunki: 1) że gdy h jest przyrostkiem zmiennéj x, a k jednoczesnym przyrostkiem funkcji y, to k przybliża się do zera, jeśli i h do zera się przybliża; 2) że przy każdéj wartości na x można wziąć drugą, różniącą się od pierwszéj o ilość nieskończenie małą; nadto, że gdy x zmienia się w jednakowym stosunku pomiędzy wspomnionemi wartościami, t. j. ciągle maleje lub ciągle wzrasta, to y stale w tym samym stosunku się zmienia, t. j. ciągle wzrasta lub ciągle maleje.

To przypuściwszy, łatwo jest dowieść, że przy tych warunkach dla każdéj wartości na x istnieje skończona granica dla stosunku przyrostków nieskończenie małych i jednoczesnych h i k, t. j. że mogą być tylko wartości wyjątkowe na zmienną x, dla których tenże stosunek wzrasta lub maleje nieoznaczenie.

I tak niech będą x_0 i X dwie wartości na zmienną x, czyniące zadość wspomnionym wyżéj warunkom; y_0 i Y wartościami odpowiedniemi dla y. Podzielmy różnicę $X-x_0$ na n części równych, które oznaczmy przez h i niechaj $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ będą odpowiedniemi przyrostkami dodatnemi dla y, to będzie:

$$X-x_0=nh,\ Y-y_0=k_1+k_2+\ldots k_n\,,$$

zkąd wynika:

$$\frac{Y-y_0}{X-x_0}=\frac{\frac{k_1}{h}+\frac{k_2}{h}+\ldots+\frac{k_n}{h}}{n},$$

t. j. że stosunek niezmienny przyrostków skończonych dla x i y, gdy przechodzimy z x_0 do X jest środkiem arytmetycznym stosunków: $\frac{k_1}{h}, \frac{k_2}{h}, \ldots \frac{k_n}{h}$ przy jakichkolwiek wartościach na n.

Jeżeli teraz n nieoznaczenie powiększać będziemy, to wyrazy tych stosunków do zera przybliżać się będą, a że środek arytmetyczny wspomnionych stosunków będzie ciągle równym ilości skończonéj $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$, to niemożliwą jest rzeczą, aby takowe przybliżały się do zera, lub wzrastały nieoznaczenie. Ten wniosek, odnoszący się do $X-x_0$, mogący być zastosowanym do wszystkich części téj różnicy, każe nam twierdzić, że gdy tylko ta różnica jest skończoną, to wartość $\frac{k}{h}$ ani przybliżać się do zera, ani wzrastać nieoznaczenie nie może przy jakichkolwiek wartościach na x, ale owszem okazać można, że tylko przy wyjątkowych na nie wartościach stosunek $\frac{k}{h}$ może nie mieć wartości skończonéj.

Przypuściliśmy w powyższém dowodzeniu, że $\frac{Y-y_0}{X-x_0}$ miało wartość skończoną, gdy teraz ten warunek wypełniony nie będzie, to zobaczymy, że wszystkie wartości na $\frac{k}{h}$ mogą przybliżać się do zera, lub wzrastać nieoznaczenie.

Jeżeli wszystkie stosunki przybliżają się do zera, to ich środek do zera także przybliżać się musi, a ponieważ on jest stały, więc musi być zerem, zatém $Y-y_0=0$ czyli $Y=y_0$. A ponieważ toż samo mieć będzie miejsce, jeżeli uważać będziemy przestrzeń pomiędzy x_0 a każdą inną wartością wybraną pomiędzy x_0 i X, to wynika ztąd, że wszystkie wartości na y odpowiednie wartościom na x zawartym pomiędzy x_0 i X są równe y_0; funkcja zatém oznaczona przez y jest ilością stałą, i widzimy nadto, że $\frac{k}{h}$ jest ściśle ciągle równém zeru.

Podobnie się rozumuje, gdy wszystkie stosunki $\frac{k}{h}$ wzrastają bez granicy, uważając, że gdy $\frac{k}{h}$ wzrasta do nieskończoności, to $\frac{h}{k}$ do nieskończoności maleje.

2. Powtórzmy powyższe twierdzenie na przykładach. Dajmy że:

$$y=ax,$$

przyrostkiem zmiennéj x niech będzie h, a funkcją z przyrostkiem oznaczmy przez y, to wtedy

$$y'=a(x+h)=ax+ah,$$

zkąd $y'=y+ah,$

$$y'-y=ah,$$

$$\frac{y'-y}{h}=a.$$

Weźmy teraz:

$$y=ax^2,$$

to przyjąwszy też same co powyżej oznaczenia, będzie:

$$y'=a(x+h)^2,$$

$$y'=ax^2+2axh+ah^2,$$

$$y'-y=2axh+ah^2,$$

$$\frac{y'-y}{h}=2ax+ah\ldots\ldots(1)$$

albo gdy:

$$y=ax^3,$$

$$\text{to } y'-y=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-ax^3,$$

$$\frac{y'-y}{h}=3ax^2+3ahx+ah^2\ldots\ldots(2)$$

3. We wszystkich tych przykładach widzimy, że przyrostek funkcyi $y'-y$ znika wraz z przyrostkiem zmiennéj h. W przykładach pierwszych spostrzegamy, że gdy przyrostki przybliżają się do zera nieoznaczenie, to stosunek ich przybliża się do ilości skończonéj i stałéj a. W dwóch ostatnich przykładach stosunek ten przybliża się do ilości skończonych,

$$2ax \text{ i } 3ax^2,$$

to jest mamy w tym przypadku:

$$\frac{y'-y}{h}=2ax,\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{y'-y}{h}=3ax^2\ldots\ldots(4)$$

W ogólności, jeżeli przyjmiemy:

$y=f(x)$, to

$y'=f(x+h)$, czyli funkcja z przyrostkiem oznacza się: $y'=A+Bh+Ch^2+\ldots\ldots(5)$

gdzie A, B, C są funkcjami zmiennéj x. Jeżeli w wyrażeniu (4) przyrostek zmiennéj znika, wtedy funkcja z przyrostkiem zamienia się na funkcją daną, t. j.

$$y=A.$$

4. Aby jeszcze jaśniéj przedstawić to, że choć przyrostki funkcji zmiennéj nieoznaczenie do zera się przybliżają, to stosunek jednak między niemi pewnéj granicy dosięga, zastanówmy się nad następującym przykładem: Niech MA (fig 1) sieczną, a CT styczną jest do danéj krzywéj PCA, nadto niech $GD=x$ zaś $CD=y$, przyrostek x czyli $DB=h$, a przyrostek y czyli $AE=H$.

Przyjąwszy y za funkcją x, to stosunek $H:h$ będzie stosunkiem przyrostku funkcji do przyrostku zmiennéj. Granica zaś tego stosunku jest $CD:FD$, albowiem zmniejszając h nieoznaczenie i H zmniejszać się podobnież będzie, i wtedy gdy te do zera przybliżać się będą, kąt ACD do kąta CFD przybliżać się musi, a trójkąt ACE coraz bardziéj bliższym będzie podobieństwa do trójkąta CFD, a tém samém stosunek boków $AE:CE$ czyli $H:h$ do stosunku boków $CD:FD$ przybliżać się będzie; czyli gdy przyrostki $H:h$ znikają, to stosunek między niemi nie znika, lecz staje się równym ilości skończonéj $\frac{CD}{FD}$.

Określenie różniczki.

5. Biorąc pod uwagę wyrażenia (1) i (2) tudzież (3) i (4) widzimy, że odpowiednie drugie ich strony nie są jednakowe, bowiem pierwsze w wyrażeniach (1) i (2) oznaczają stosunki różnic, t. j. przyrostków skończonych, w równaniach zaś (3) i (4) przyrostki te czyli różnice są nieskończenie małe, *różniczkami* zwane.

Różniczki zatém, zmiennych x, y,.... są to ilości nieskończenie małe, których stosunek jest równy stosunkowi granic przyrostków nieskończenie małych jednoczesnych tychże zmiennych.

Różnica skończona, albo przyrostki zmiennych $x, y, z,$... oznaczają się przez $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$,... a różniczki przez dx, dy, dz,....

Określenie funkcji pochodnych.

6. Gdy $y=f(x)$, $z=F(u)$,.... są funkcjami: pierwsza zmiennéj x, druga zmiennéj u, i t. d., przyrostkami zaś odpowiedniemi tych funkcji i zmiennych, czyli różnicami skończonemi są:

$$\triangle y, \triangle x, \triangle z, \triangle u, \ldots.$$

to granice stosunków $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$, $\dfrac{\triangle z}{\triangle u}$,.....

t. j. $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{du}{dz}$,.....

nazywają się *funkcjami pochodnemi* zmiennych x, u,... i oznaczają się:

$$y'=f'(x),\ z'=F(u).$$

Mamy więc:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

$$\text{zkąd } dy=f'(x)dx\ldots..(6)$$

Różniczka zatém funkcji równa się różniczce zmiennéj, pomnożonéj przez funkcją pochodną, i dlatego téż funkcję tę pochodną, zowią inaczéj ***współczynnikiem różniczkowym.***

Współczynnik różniczkowy wielkie ma znaczenie w rachunku; mając go, łatwo można znaleźć różniczkę funkcji, używając do tego wzoru (6).

7. Gdy funkcja równa się saméj zmiennéj np. gdy $y=x$, to współczynnik różniczkowy takiéj funkcji jest ilością stałą a mianowicie równą jedności, bowiem

$$\frac{dy}{dx}=\text{gran.}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\text{gran.}\frac{\triangle x}{\triangle x}=1.$$

8. *Funkcje równe mają różniczki równe.* W każdym razie gdy dwie funkcje, zawierające ilekolwiek zmiennych, zależnych od jednéj są sobie równe przy wszelkich wartościach na te zmienne, to jasną jest rzeczą, że ich przyrostki odpowiednie są sobie równe, i że następnie ich pochodne jako téż i różniczki względem tych samych zmiennych są sobie równe.

Z powyższego więc wynika, że gdy równanie ma miejsce przy każdéj wartości na zmienną niezależną, to pochodne lub różniczki obu jego stron względem téj zmiennéj są sobie równe przy jakichkolwiek na nią wartościach.

9. Uważajmy teraz funkcję u zmiennéj x, oznaczoną przez szereg równań:

$$u=F(z),\ z=f(y),\ y=\varphi(x).$$

i szukajmy jéj pochodnéj względem x, czyli granicy stosunku $\frac{\triangle u}{\triangle x}$, którego obadwa wyrazy przybliżają się do zera. Niechaj $\triangle u$, $\triangle z$, $\triangle y$ i $\triangle x$, są jednoczesnemi odpowiedniemi przyrostkami dla u, z, y i x, to będziemy mieli równanie identyczne

$$\frac{\triangle u}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle z}\cdot\frac{\triangle z}{\triangle y}\cdot\frac{\triangle y}{\triangle x},$$

a że granicą iloczynu, jest iloczyn granic, zatém:

$$\text{gran.}\frac{\triangle u}{\triangle x}=\text{gran.}\frac{\triangle u}{\triangle z}.\text{gran.}\frac{\triangle z}{\triangle y}.\text{gran.}\frac{\triangle y}{\triangle x},$$

$$\text{czyli}\ \frac{du}{dx}=\frac{du}{dz}.\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}=F'(z)f'(y)\varphi'(x),$$

zkąd:

$$du=F'(z)f'(y)\varphi'(x).$$

Widzimy więc, że współczynnik różniczkowy funkcji u względem zmiennéj x równa się iloczynowi współczynników różniczkowych funkcji u względem z, z względem y i y względem x.

ROZDZIAŁ II.

Różniczkowanie funkcji algebraicznych, trygonometrycznych, logarytmowych i wykładniczych.

Różniczkowanie funkcji algebraicznych.

10. *Różniczkować* funkcją znaczy znaleźć różniczkę danéj funkcji, działanie zaś do tego użyte nazywa się *różniczkowaniem*. Niechaj daną funkcją będzie:

$$1.\ y=a+x,$$

a szukajmy różniczki i współczynników różniczkowych téj funkcji.

Gdy h jest przyrostkiem x, to $y'=f(x+h)$,

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{(a+x+h)-(a+x)}{h}=\frac{h}{h}=1,$$

a zaś

$$\text{gran.}\frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=1,$$

zkąd:

$$dy=dx\ \text{czyli}\ d(a+x)=dx.$$

2. Jeżeli $y=a-x$, to przyjąwszy tu i w następnych też same co powyżéj oznaczenia:

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{[a-(x+h)]-(a-x)}{h}=\frac{a-x-h-a+x}{h}$$

$$=-\frac{h}{h}=-1,$$

$$\text{ztąd gran. } \frac{y'-y}{h}=-\frac{dy}{dx}=-1,$$

zatém $dy=-dx$, $d(a-x)=-dx$.

3. $y=ax$

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{a(x+h)-ax}{h}=\frac{ax+ah-ax}{h}=\frac{ah}{h}=a.$$

$$\text{gran. } \frac{y'-y}{y}=\frac{dy}{dx}=a,$$

zkąd $dy=adx$, $dax=adx$.

4. $y=\frac{a}{x}$.

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{\frac{a}{x+h}-\frac{a}{x}}{h}=\frac{\frac{ax-ax-ah}{x^2+xh}}{h}=$$

$$=\frac{-ah}{x^2h+xh^2}=\frac{-a}{x^2+xh},$$

zatém:

$$\text{gran. } \frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2},$$

ztąd $dy=-\frac{adx}{x^2}$, $d\frac{a}{x}=-\frac{adx}{x^2}$.

5. $y=x^a$

$y'=(x+h)^a$,

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{(x+h)^a-x^a}{h}=$$

$$=\frac{x^a+ax^{a-1}h+\frac{a(a-1)}{1\,.\,2}x^{a-2}h^2+\ldots+h^a-x^a}{h}$$

zatém:

$$\frac{y'-y}{h}=ax^{a-1}+\frac{a(a-1)}{1\,.\,2}x^{a-2}h+\ldots\ldots,$$

$$\text{gran.}\frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=ax^{a-1},$$

zkąd

$$dy=ax^{a-1}dx,\ dx^{a}=ax^{a-1}dx.$$

Różniczkowanie funkcji trygonometrycznych.

11. Znajdźmy najprzód funkcją pochodną funkcji

$$y=\sin x, \ldots\ldots (6).$$

A więc $y'=\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$,

$$y'-y=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x=$$
$$=\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h\ldots\ldots(\alpha),$$

lecz $\sin {}^1/_2\, h=\sqrt{\frac{1-\cos h}{2}}$,

$$2\sin^2\frac{1}{2}h=1-\cos h,$$

$$\cos h-1=-2\sin^2\frac{1}{2}h,$$

a zaś $\sin h=\sin 2\left(\frac{1}{2}h\right)=2\sin\frac{1}{2}h\,.\cos\frac{1}{2}h$, co wstawiwszy we wzór (α) będzie:

$$y'-y=-2\sin x\,.\sin^2\frac{h}{2}+2\cos x\sin\frac{1}{2}h\,.\cos\frac{1}{2}h,$$

$$=2\sin\frac{h}{2}\left(\cos x\cos\frac{1}{2}h-\sin x\sin\frac{h}{2}\right),$$

$$=2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

a ztąd $\frac{y'-y}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\,.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$;

przeszedłszy do granic, to gdy h do zera, wtedy $\sin\frac{h}{2}$ do $\frac{h}{2}$, a $\cos(x+h)$ do $\cos x$ się przybliża, zatém

$$\text{gran.}\frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=\frac{h\,.\cos x}{h}=\cos x,$$

zkąd $dy=\cos x\,.\,dx$.

Podobnie przyjąwszy $y=\cos x$, znajdziemy:

$$dy=-\sin x dx\text{.....}(7)$$

Różniczkowanie funkcji wykładniczych.

12. Niech $y=a^x$ ......(8)

$$\text{to } y'=a^{x+h},$$

$$y'-y=a^{x+h}-a^x=a^x(a^h-1),$$

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{a^h-1}{h}\,.\,a^x\text{.....}(\beta)$$

Oznaczmy $a^h-1=H,$.....(γ)

$$a^h=1+H.$$

$$h=L(1+H)\text{....}(\delta)$$

Wstawiając we wzór (β) wartości (γ) i (δ) mieć będziemy:

$$a^x\frac{H}{L(1+H)}=a^x\,.\,\frac{1}{Le}\text{.....}(\psi)$$

albowiem granicą $(1+H)^{\frac{1}{H}}$ jest e, a więc granicą $L(1+H)^{\frac{1}{H}}$ czyli $\frac{L(1+H)}{H}$ jest $L\,e$, czyli

$$\text{gran.}\frac{H}{L(1+H)}=\frac{1}{L\,e}.$$

Wiadomo zaś z algebry, że dla otrzymania logarytmu liczby jakiéj względem nowéj zasady, należy logarytm téj liczby przy dawnéj zasadzie, pomnożyć przez czynnik stały, który jest ułamkiem, mającym za licznik 1, a za mianownik logarytm nowéj zasady, wzięty w logarytmach dawnéj zasady.

Mamy więc: $Le = le.\frac{1}{la}$,

że zaś $le=1$, gdyż e jest zasadą logarytmów Nepera, to:

$$Le = \frac{1}{la},$$

ztąd $\frac{1}{Le} = la.$

Wzór zatém (ψ) zamieni się na

$$da^x = a^x\, l a\, dx.$$

UWAGA. Gdy $a=e$, to $la=le=1$,
a zaś $de^x = e^x \,.\, dx$.

Różniczkowanie funkcji logarytmowych.

13. Niechaj teraz funkcją daną do różniczkowania będzie:

$$y = L(x), \ldots\ldots (9)$$

to na zasadzie téj własności z algebry, jakiéj i do powyższego rozwiązania użyliśmy, łatwo znajdziemy żądaną różniczkę:

I tak:

$$y' = L(x+h),$$

$$\frac{y'-y}{h} = \frac{L(x+h)-L(x)}{h} = \frac{L\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{L\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h};$$

uczyńmy $\frac{h}{x} = \alpha$, $h = \alpha x$, to ten wzór zamieni się na

$$\frac{y'-y}{h} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{1}{x};$$

przeszedłszy do granic, widzę że:

$$\text{gran.}\frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=\frac{d.L(x)}{dx},$$

zaś granicą $\frac{L(1+\alpha)}{\alpha}$ jest $L\,e$, będzie zatém:

$$\frac{d.L(x)}{dx}=\frac{L\,e}{x},$$

$$d.L(x)=L\,e.\frac{dx}{x}\ldots\ldots$$

UWAGA. Gdy zasada logarytmów będzie e, to $l\,e=1$ a wzór powyższy zamieni się na $dl(x)=\frac{dx}{x}$.

14. Przykłady różniczkowania funkcji pojedynczych i złożonych.

1. $y=\text{tang}\,x$, $\text{tang}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$,

$$d\,\text{tang}\,x=d\,\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{y'-y}{h}=\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]\frac{1}{h},$$

$$\frac{y'-y}{h}=\left(\frac{\sin x.\cos h+\sin h.\cos x}{\cos x.\cos h-\sin x.\sin h}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\frac{1}{h},$$

$$\frac{y'-y}{h}=\frac{1}{h}\,\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)\sin h}{\cos^2 x\cos h.-\sin x.\cos x\sin h}=$$

$$=\frac{1}{h}\,\frac{\sin h}{\cos^2 x.\cos h-\sin x\cos x\sin h},$$

przeszedłszy do granic

$$\text{gran.}\frac{y'-y}{h}=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\text{ztąd } dy=\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

2. $dl(y^2) = \frac{d(y^2)}{y^2}$,

$$dl(y^2) = \frac{2ydy}{y^2} = \frac{2dy}{y}.$$

3. $d\,{}^1/_2\,l(y^2) = \frac{dy}{y}$,

4. $dax^m = adx^m$,

$dx^m = mx^{m-1}dx$,

$dax^m = amx^{m-1}\,dx$.

5. $dA^{B^x} = A^{B^x}\,l(A)dB^x$,

$dB^x = B^x\,l(B)dx$,

zatém $dA^{B^x} = A^{B^x}\,l(A)B^x\,l(B)dx$.

6. $de^{e^x} = e^{e^x}e^x\,dx$.

7. $de^{x^2} = 2xe^{x^2}dx$.

8. $dl\sin x = \frac{d\sin x}{\sin x}$,

$d\sin x = \cos x\,.\,dx$,

$$dl\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx = \cot x\,.\,dx.$$

9. $d\,.\,l\cos x = -\,\mathrm{tang}\,x\,.\,dx$.

Łuki uważane jako funkcje linji trygonometrycznych.

15. Uważajmy teraz łuki jako funkcje wstawy, dostawy, stycznéj i t. p. i wynajdziemy ich różniczki. I tak niech $y = \sin x$, gdzie y jest zmienną, a x funkcją daną. Wiadomo że:

$$dy = \cos x dx,$$

$$dx = \frac{dy}{\cos x}$$

lecz $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, zatém $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$,

ztąd $\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{-1/2}$.

Mamy więc wartość na różniczkę łuku wyrażoną przez jego wstawę i różniczkę téj wstawy.

Podobnież z wzoru $y = \cos x$.

$dy = -\sin x dx$,

$$dx = -\frac{dy}{\sin x} = -\frac{dy}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Weźmy nareszcie $y = \operatorname{tang} x$,

to $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

$dx = dy . \cos^2 x$;

lecz wiadomo, że $\sec x = \frac{1}{\cos x}$,

ztąd $\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x}$;

zatém $dx = dy \frac{1}{\sec^2 x}$,

a że $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tang}^2 x = 1 + y^2$,

to $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

Podobnież znajdziemy z wzoru $y = \sec x$,

$dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$ i t. p.

16. Aby otrzymać rozwinięcie łuku przez wstawę albo przez styczną, uważajmy że:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = (1-y^2)^{-1/2}.$$

Rozwinąwszy drugą stronę podług dwumianu Newtona, będziemy mieli

$$\frac{dx}{dy}=1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}y^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}y^6+\ldots\ldots(\lambda)$$

Ponieważ rozwinięcie zawiera tylko potęgi parzyste, to sam łuk wyrazi się przez szereg, w którym potęgi będą nieparzyste, albowiem różniczka potęgi daje potęgę o 1 mniejszą (*), będzie zatém szereg:

$$x=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\ldots\ldots(\mu).$$

Gdzie w każdym wyrazie znajduje się y, przypuściwszy bowiem, że $y=0$, to i łuk $x=0$, co właśnie być powinno, że łuk niknie wraz z wstawą. Różniczkując wyrażenie (μ), t. j. każdy wyraz w szczególności i biorąc summę tych różniczek będzie:

$$dx=Ady+3By^2dy+5Cy^4dy+7Dy^6dy+\ldots\ldots,$$

$$\text{ztąd } \frac{dx}{dy}=A+3By^2+5Cy^4+7Dy^6+\ldots\ldots(\nu).$$

Porównywając dwa równe szeregi (λ) i (ν) uważamy, że współczynniki przy jednakowych potęgach y powinny być sobie równe, t. j.:

$$A=1,\ 3B=\frac{1}{2},\ 5C=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4},\ 7D=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6},\ \text{i t. d.}$$

$$B=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5},\ D=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7},\ \text{itd.}$$

---

*) A jak późniéj zobaczymy, różniczka summy równa się summie różniczek.

które to wartości podstawiwszy we wzór (μ) będzie:

$$x=y+\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{y^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{y^7}{7}+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{y^9}{9}+\ldots$$

Podobnież znajdziemy, że łuk rozwinięty przez styczną daje szereg:

$$x=\frac{y}{1}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\ldots.$$

UWAGA. Gdy $x=45°$, to tang $x=1$, t. j. $y=1$,

$$\text{zatém łuk } 45°=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots..$$

Lecz ten szereg nie jest bystro malejącym. Dzieląc zatem łuk x na drobniejsze części, to styczna każdéj mniejszą będzie od 1, a tém samém otrzymamy szereg bystrzéj malejący.

Angielski matematyk *Machin* znalazł, że łuk 45° jest równy łukowi, którego styczna równa $\frac{1}{5}$, 4 razy wziętemu, zmniejszonemu łukiem, którego styczna jest $\frac{1}{239}$. Przekonać się o tém bardzo łatwo.

Ponieważ gdy tang $a=\frac{1}{5}$,

$$\text{to tang } 2a=\frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\text{tang } 4a=\frac{2\,\text{tang}\,2a}{1-\text{tang}^2 2a}=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}}=\frac{120}{119}.$$

Skoro więc tang $a>1$, to łuk $4a>45°$, więc uczyniwszy $4a=A$, łuk $45°=B$, a różnicę między temi łukami oznaczywszy przez b, będzie:

$$b=4a-\text{łuk } 45°=A-B.$$

Styczna zaś téj różnicy

$$\text{tang}(A-B)=\frac{\text{tang}\,A-\text{tang}\,B}{1+\text{tang}\,A\,.\,\text{tang}\,B}=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}}=\frac{1}{239}.$$

Rozwijam teraz kolejno a i b:

$$b=\frac{1}{239}-\frac{1}{3(239)^3}+\frac{1}{5(239)^5}-\frac{1}{7(239)^7}+\ldots\ldots$$

$$a=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\ldots\ldots$$

przeto

$$\text{łuk } 45^\circ=\left\{\begin{array}{l}4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\ldots\ldots\right)\\ -\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\ldots\right).\end{array}\right.$$

ROZDZIAŁ III.

Różniczka summy wielu funkcji. Różniczka iloczynu wielu funkcji. Różniczka ilorazu dwóch funkcji. Różniczka funkcji urojonych. Zastosowania. Rugowanie ilości stałych.

Różniczka summy wielu funkcji.

17. Niech $u, v, w, \ldots.$ są funkcjami x, zaś

$$s=u+v+w+\ldots.(1)$$

niech przyrostkami jednoczesnemi funkcji $s, u, v, w, \ldots.$ i zmiennéj x są $s'-s, \alpha, \beta, \gamma \ldots. \triangle x$,

$$\text{to } s'=u+\alpha+v+\beta+w+\gamma+\ldots.$$

$$s'-s=\alpha+\beta+\gamma+\ldots.$$

$$\frac{s'-s}{\triangle x}=\frac{\alpha}{\triangle x}+\frac{\beta}{\triangle x}+\frac{\gamma}{\triangle x}+\ldots.(2).$$

Gdy granicą stosunku $\frac{\alpha}{\triangle x}$ jest p, to p jest współczynnikiem różniczkowym funkcji u, wyraża bowiem granicę stosunku przyrostku funkcji do przyrostku zmiennéj. Jeżeli więc ten współczynnik pomnożymy przez dx, to otrzymamy różniczkę funkcji $pdx = du$ (Nr. 6).

Podobnie gdy granicą $\frac{\beta}{\triangle x}$ jest q, to: $qdx = dv$ jest różniczką funkcji v, gdy zaś r jest granicą $\frac{\gamma}{\triangle x}$, to $rdx = dw$ jest różniczką funkcji w. Przeszedłszy więc do granic, to równanie (2) zamieni się na

$$\frac{ds}{dx} = p + q + r + \ldots\ldots$$

a pomnożywszy obie strony przez dx

$$ds = pdx + qdx + rdx + \ldots\ldots$$

$$ds = du + dv + dw + \ldots\ldots (3)$$

Różniczka iloczynu wielu funkcji.

18. Weźmy teraz funkcją będącą iloczynem funkcji x, np.:

$$s = u \,.\, v \,.\, w \ldots\ldots$$

nadto niech $u \,.\, v \,.\, w \ldots\ldots$ są dodatne, to

$$ls = lu + lv + lw + \ldots\ldots$$

$$dls = dlu + dlv + dlw + \ldots\ldots$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\ldots$$

$$ds = s\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots\ldots\right),$$

a że $s = u \,.\, v \,.\, w \ldots\ldots$; to

$$ds = vwdu + uwdv + uvdw + \ldots\ldots$$

Różniczka ilorazu dwóch funkcji.

19. Niech $y=\frac{u}{v}$,

dajmy że $\frac{u}{v}=t$,

$$\text{ztąd: } u=vt,$$
$$du=vdt+tdv,$$
$$dt=\frac{du-tdv}{v},$$

wstawiwszy wartość za t,

$$d\frac{u}{v}=\frac{du-\frac{u}{v}dv}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Można tu podobnie jak przy różniczkowaniu iloczynu użyć logarytmów, a dojdziemy do tegoż samego wypadku, i tak:

$$ly=lu-lv,$$
$$\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}-\frac{dv}{v},$$
$$dy=y\left(\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}\right),$$

a że $y=\frac{u}{v}$,

$$d\frac{u}{v}=\frac{du}{v}-\frac{udv}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Różniczka wyrażenia urojonego.

20. Wiadomo, że wyrażenia urojone, jako wypadki rachunku algebraicznego, mogą być zawsze sprowadzone do kształtu:

$$y=u+v\sqrt{-1}.$$

Jeżeli jak w algebrze, $\sqrt{-1}$ uważać będziemy za ilość stałą, to zamieniwszy x na $x+\triangle x$, będzie:

$$y+\triangle y=u+\triangle u+(v+\triangle v)\sqrt{-1},$$

a ponieważ

$$y=u+v\sqrt{-1},$$

to otrzymamy:

$$\triangle y=\triangle u+\triangle v\sqrt{-1},$$

$$\text{zkąd } \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}\sqrt{-1}.$$

a przeszedłszy do granic

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\sqrt{-1},$$

lub nakoniec

$$dy=d(u+v\sqrt{-1})=du+dv\sqrt{-1}.$$

Zatém różniczka wyrażenia urojonego otrzymuje się tak, jak różniczka summy, uważając $\sqrt{-1}$ jako ilość stałą.

UWAGA. W jakiejkolwiek funkcji, ilości pierwiastkowe wyrażać będziemy przez ilości z wykładnikami ułamkowemi. I tak np.:

$$\sqrt[s]{u^r}=u^{\frac{r}{s}}=v.$$

Podniosłszy obie strony do potęgi s, będzie:

$$u^r=v^s,$$

różniczkując wypada:

$$ru^{r-1}du=sv^{s-1}dv,$$

lecz ponieważ:

$$u^{\frac{r}{s}}=v, \text{ to}$$

$$u^{\frac{r}{s}(s-1)}=v^{s-1}.$$

$$\text{czyli } u^{r-\frac{r}{s}}=v^{s-1},$$

$$\text{zatém } ru^{r-1}du = su^{r-\frac{r}{s}}dv,$$

$$\text{ztąd } \frac{r}{s}u^{\frac{r}{s}-1}du = dv.$$

Co dowodzi, że zasada różniczkowania potęg ułamkowych nie różni się zupełnie od zasady różniczkowania potęg całkowitych.

Zastosowanie. 21. I. Niech funkcją daną będzie:

$$y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}.$$

Aby zróżniczkować tę funkcją, wyraźmy ją w kształcie:

$$y = a + bx^{1/2} - cx^{-1},$$

a otrzymamy:

$$dy = (\tfrac{1}{2}bx^{-1/2} + cx^{-2})dx = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} + \frac{cdx}{x^2},$$

ztąd zaś

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

II. $$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2},$$

lub $y = a + bx^{-2/3} - cx^{-4/3} + ex^{-2}$.

Różniczkując mamy

$$dy = (-\tfrac{2}{3}bx^{-5/3} + \tfrac{4}{3}cx^{-7/3} - 2ex^{-3})dx,$$

$$= \left(-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3}\right)dx,$$

zkąd nakoniec

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3}.$$

III. $y=(a+bx^n)^m$;

dajmy że:

$$a+bx^n=u,$$

$$\text{to } y=u^m,$$

$$\text{więc } dy=mu^{m-1}du;$$

$$\text{lecz } du=nbx^{n-1}dx,$$

$$\text{zatém } dy=mnb(a+bx^n)^{m-1}x^{n-1}dx.$$

$$\text{IV.}\quad y=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}.$$

Oznaczmy:

$$\frac{b}{\sqrt{x}}=z,\ \sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}=t,$$

$$\text{więc } y=\sqrt[4]{(a-z+t)^3}=(a-z+t)^{3/4},$$

$$dy=\tfrac{3}{4}(a-z+t)^{-1/4}(-dz+dt).$$

$$\text{Lecz } dz=dbx^{-1/2}=-\tfrac{1}{2}bx^{-3/2}dx=-\frac{bdx}{2x^{3/2}},$$

$$dt=d(c^2-x^2)^{2/3}=\tfrac{2}{3}(c^2-x^2)^{-1/3}d(c^2-x^2),$$

$$=-\tfrac{4}{3}(c^2-x^2)^{-1/3}xdx=-\frac{4xdx}{3(c^2-x^2)^{1/3}},$$

zatém $dy=$

$$=\tfrac{3}{4}\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^{-1/4}\left(\frac{bdx}{2x^{3/2}}-\frac{4xdx}{3(c^2-x^2)^{1/3}}\right),$$

czyli

$$dy=\frac{\dfrac{3bdx}{2x^{3/2}}-\dfrac{4xdx}{\sqrt[3]{(c^2-x^2)}}}{4\sqrt[4]{a-\dfrac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}}}$$

V. Dogodnie jest czasem funkcją złożoną różniczkować na mocy znanéj nam już własności (Nr. 1).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Niech będzie:

$$y=\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^4,$$

to uczyniwszy,

$$b-\frac{c}{x^2}=u, \text{ wtedy } y=(a+\sqrt{u})^4,$$

ztąd

$$du=\frac{2cxdx}{x^4}=\frac{2cdx}{x^3},$$

$$\text{więc } \frac{du}{dx}=\frac{2c}{x^3};$$

dalej będzie:

$$dy=2(a+\sqrt{u})^3u^{-1/2}du,$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{2(a+\sqrt{u})^3}{\sqrt{u}},$$

a zatém

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2(a+\sqrt{u})^3}{\sqrt{u}}\cdot\frac{2c}{x^3}=\frac{4c\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{x^3\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}}.$$

Podobnie jak powyższe, różniczkują się następujące funkcje:

VI. $y=(a+\sqrt{x})^3$,

VII. $y=x^2(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$,

VIII. $y=\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$,

IX. $y=f(a+x)$,

X. $y=f(a+bx^2)$,

XI. $y=f\left(\frac{a}{x}\right)$,

XII. $y=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{x+a}{b-x}\right)$,

XIII. $y=\cot x$,

XIV. $y=\sec x$,

XV. $y=\operatorname{arc}\cot u$,

XVI. $y=\operatorname{arc}\sin\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}$,

XVII. $y=\operatorname{arc}\sin 2x\sqrt{1-x^2}$,

XVIII. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tang}\left(\frac{u}{v}\right)$,

XIX. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

XX. $y=\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{u+v}{1-uv}$,

XXI. $y=\frac{lx}{x}$,

XXII. $y=e^{x^m}$,

XXIII. $y=e^{\sin x}$,

XXIV. $y=e^{\operatorname{arc}\sin x}$,

XXV. $y=e^{ax}\sin bx$,

XXVI. $y=\frac{e^{a^x}}{x}$,

XXVII. $y=u^v$,

XXVIII. $y=u^{\frac{1}{v}}$,

XXIX. $y=x^x$,

XXX. $y=x^{\frac{1}{x}}$,

XXXI. $y=l(\operatorname{tang} x)$,

XXXII. $y=\sin(lx)$,

XXXIII. $y=\sin^m x\cos^n x$,

XXXIV. $y=l\,\mathrm{arc}\cos\sqrt{1-x^2}$,

XXXV. $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$,

XXXVI. $y=\frac{\sin x(2+a\cos x)}{(1+a\cos x)^2}$.

Rozwiązanie przykładów.

6go $dy=\frac{3(a+\sqrt{x})^2dx}{2\sqrt{x}}$,

7go $dy=\frac{2a^4+a^2x^2-5x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}xdx$,

8go $dy=\frac{(3a-2x)\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{(a-x)^3}}$,

9go $dy=f'(a+x)dx$,

10go $dy=2f'(a+bx^2)bxdx$,

11go $dy=-af'\left(\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$,

12go $dy=-\frac{2}{x^3}\left(\frac{a+x}{b-x}\right)dx+\frac{(a+b)f'\left(\frac{a+x}{b-x}\right)dx}{x^2(b-x)^2}$,

13go $dy=-\frac{dx}{\sin^2 x}$,

14go $dy=\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$,

15go $dy=-\frac{du}{1+u^2}$,

16go $dy=\frac{\frac{1}{a}\cdot\frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{2ax-x^2}{a^2}}}dx=\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, 17go $dy = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

18go $dy = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2}$,

19go $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

20go $dy = \frac{(1-uv)(du+dv)+(u+v)(udv+vdu)}{(u+v)^2+(1-uv)^2}$

$$= \frac{(1+v^2)du+(1+u^2)dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{du}{1+u^2} + \frac{dv}{1+v^2}.$$

To zadanie jeszcze w ten sposób rozwiązać można, uważając

$$\text{arc tang}\,\frac{u+v}{1-uv} = \text{arc tang}\,u + \text{arc tang}\,v.$$

21go $dy = \frac{1-lx}{x^2}dx$,

22go $dy = me^{x^m} x^{m-1} dx$,

23go $dy = e^{\sin x} \cos x dx$,

24go $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{arc}\sin x}$,

25go $dy = (b \cos bx + a \sin bx)e^{ax} dx$,

26go $dy = \frac{xde^{a^x} - e^{a^x} dx}{x^2}$, $de^{a^x} = e^{a^x} da^x$,

$$da^x = a^x ladx, \; de^{a^x} = e^{a^x} a^x ladx,$$

zatém

$$dy = \frac{e^{a^x} a^x xla.dx - e^{a^x} dx}{x^2} = e^{a^x}\left(\frac{a^x.la}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

27go Ponieważ $y=u^v$, to biorąc logarytmy obu stron, będzie

$$ly=vlu,$$

$$\frac{dy}{y}=v\,.\,dlu+lu\,.\,dv=v\frac{du}{u}+lu.dv,$$

$$dy=yv\frac{du}{u}+ylu\,.\,dv,$$

zatém

$$dy=vu^{v-1}du+u^v\,lu\,dv.$$

28go $dy=\dfrac{u^{\frac{1}{v}-1}du}{v}-u^{\frac{1}{v}}lu\dfrac{dv}{v^2}.$

29go $dy=x^x(1+lx)dx.$

30go $dy=x^{\frac{1}{x}-2}(1-lx)dx.$

31go $dy=\dfrac{dx}{\sin x\cos x}.$

32go $dy=\dfrac{\cos(lx)}{x}dx.$

33go $dy=\cos^{n-1}x\sin^{m-1}x(m\cos^2x-n\sin^2x)dx.$

34go $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

35go $dy=\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}dx.$

36go $dy=\dfrac{(2+a^2)\cos x+3a}{(1+a\cos x)^3}dx.$

22. Pokażmy teraz, jak rachunek różniczkowy zastosowywa się do wyznaczania krzywych, mających dane własności.

1) Znaleźć krzywą taką, żeby jéj podnormalna NP (fig. 2) miała dla każdego punktu stałą długość a.

Gdy wpółrzędne prostopadłe, to:

$$NP=MP\times\text{tang}\,PMN.$$

Lecz $MP = y$, $\text{tang}\, PMN = \text{tang}\, MTN = \frac{dy}{dx}$, (*)

$$\text{więc } NP = y\frac{dy}{dx},$$

potrzeba więc przypuścić, że

$$y\frac{dy}{dx} = a,$$

zkąd wypada:

$$ydy = adx,$$
$$\text{lub } 2ydy = 2adx,$$
$$\text{lecz } 2ydy = dy^2;$$
$$2adx = d2ax,$$
$$\text{więc } dy^2 = d2ax.$$

Wiadomo zaś nam już, że dwie funkcje, które mają różniczki równe, nie mogą się różnić jak tylko ilością stałą: nazwawszy więc przez c stałą niezależną, mamy równanie

$$y^2 = 2ax + c,$$

które przedstawia parabole, mające tenże sam parametr $2a$, a za oś wspólną oś x.

2) Znaleźć krzywą, którejby podnormalna była potęgą daną z odciętéj.

Mieć będziemy wtedy:

$$y\frac{dy}{dx} = x^m,\quad d\frac{y^2}{2} = d\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

---

*) Uważajmy bowiem (fig. 3)

$$WM = dy,$$
$$RW = dx,$$
$$\frac{MP}{TP} = \frac{MW}{RW},$$
$$\text{tang}\, MTP = \frac{dy}{dx}.$$

zkąd

$$y^2=\frac{2}{m+1}x^{m+1}+c.$$

3) Znaleźć krzywą, którejby podstyczna PT była w stosunku odwrotnym do rzędnéj

$$TP=MP\times\text{tang}\,TMP,$$

$$\text{tang}\,TMP=\frac{dx}{dy},$$

zatém

$$TP=y\frac{dx}{dy}=a.\frac{a}{y}=\frac{a^2}{y},$$

zkąd

$$dx=\frac{a^2dy}{y^2},$$

$$\frac{a^2}{y^2}dy=-d\frac{a^2}{y},$$

$$\text{więc}\ x=-\frac{a^2}{y}+c,$$

lub

$$xy-cy=-a^2.$$

Zatém krzywa jest hyperbolą równoramienną, któréj jedną assymptotą jest oś x a drugą assymptotą jest równoległa od osi y.

4) Jeżeli szukamy krzywéj, którejby normalna MN była stałą, to trzeba przypuścić:

$$y^2+y^2\frac{dy^2}{dx^2}=a^2,$$

$$\text{bowiem}\ \overline{MP}^2+\overline{PN}^2=\overline{MN}^2;$$

z równania zaś powyższego wynika:

$$\frac{ydy}{dx}=\sqrt{a^2-y^2},$$

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

zkąd $x=-\sqrt{a^2-y^2}+c$,

a nakoniec $(x-c)^2+y^2=a^2$.

Zatém krzywa szukana jest kołem, którego promień jest a, a środek na osi x.

Rugowanie ilości stałych.

23. Pomiędzy równaniem daném i równaniem, jakie otrzymuje się z niego przez różniczkowanie, można *wyrugować ilość stałą*, zkąd otrzymamy nowe równanie, wyrażające własność stycznéj wspólnéj wszystkim krzywym, jakie przedstawia równanie dane, gdy na ilość stałą różne wartości nadawane będą.

I tak niechaj będzie:

$$y^3=2ax,$$

to ztąd

$$ydy=adx;$$

rugując więc a, wypada:

$$y\frac{dx}{dy}=2x,$$

co znaczy, że we wszystkich parabolach, mających wspólną oś i wspólny wierzchołek, podstyczna jest dwa razy większa od odciętéj punktu styczności, bez względu na to, jaki będzie parametr.

Równanie

$$y^2=ax+a^2,$$

które przedstawia szereg parabol, mających wspólną oś i wspólne ognisko, położone w początku osi współrzędnych, po różniczkowaniu daje

$$ydy=adx,$$

zkąd $a=y\dfrac{dy}{dx}$,

po wyrugowaniu więc a otrzymujemy równanie:

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0,$$

lub

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{2x}{y}\frac{dy}{dx}-1=0,$$

które rozwiązane jako trójmienne stopnia drugiego, prowadzi do wypadku

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

lub

$$x+y\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Lecz $x=FP$ (fig. 4), $y\dfrac{dy}{dx}=PN$, $\sqrt{x^2+y^2}=FM$,

będzie więc

$$FP+PN=x+y\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}=FM,$$

to jest:

$FN=FM$, następnie $FM=FT$.

To jest, że w każdéj paraboli ognisko jest równo oddalone od punktów, w których styczna i normalna spotykają oś, nadto, że te odległości są równe odległości ogniska od punktu styczności.

ROZDZIAŁ IV.

Określenie różniczek różnych rzędów czyli różniczek następnych. Przykłady. Różniczki następne zmiennéj zależnéj. Przemiana zmiennéj niezależnéj.

Określenie różniczek różnych rzędów czyli różniczek następnych.

24. Współczynnik różniczkowy, będąc nową funkcją x, może być różniczkowany, i gdy weźmiemy granicę stosunku przyrostku jego do przyrostku zmiennéj, to otrzymamy jego własny współczynnik różniczkowy, który także jako funkcja x może być znowu różniczkowanym. I tak różniczkując następnie otrzymane współczynniki różniczkowe, wyprowadzimy z danéj funkcji ciąg granic czyli współczynników różniczkowych, które dzielimy na rzędy podług liczby różniczkowań uskutecznionych.

Jeżeli przypuścimy, że $y' = \frac{dy}{dx}$, to

$\frac{dy'}{dx} = y''$, $\frac{dy''}{dx} = y'''$ i t. d. Tak więc

y' jest *funkcją pochodną*, czyli *współczynnikiem różniczkowym 1go rzędu* względem funkcji danéj y, y'' będzie *funkcją pochodną* 1go *rzędu* dla y', a *drugiego* dla y, y''' będzie 1go dla y'', 2go dla y', a 3go *rzędu* dla y i t. p.

25. Szukajmy teraz wartości na te funkcje pochodne różnych rzędów.

Niech y będzie funkcją x, to pochodna 1go rzędu

$$y' = \frac{dy}{dx}, \text{ zkąd } dy = y'dx,$$

$$2\text{go rzędu } y'' = \frac{dy'}{dx}, \text{ zkąd } dy' = y''dx,$$

$$3\text{go rzędu } y''' = \frac{dy''}{dx}, \text{ zkąd } dy'' = y'''dx,$$

i t. d.

Różniczkując powyższe równania jako funkcje x zmiennéj niezależnéj, gdzie tém samém dx będzie ilością stałą, otrzymamy *różniczki następne drugiego, trzeciego i t. d. rzędu.* I tak

$$ddy = d^2y = dx \,.\, dy',$$

lub wstawiwszy wartość za dy'

$$d^2y = dx^2 y'',$$

zkąd także wyprowadza się wartość na funkcję pochodną drugiego rzędu

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Podobnież

$$dd^2y = d^3y = dx^2 dy'',$$

czyli wstawiwszy wartość za dy'',

$$d^3y = dx^3 y''',$$

a następnie wartość na funkcję pochodną rzędu 3go będzie:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Takim samym sposobem wyprowadza się $d^4y = dx^4 y^{\text{IV}}$, $d^5y = dx^5 y^{\text{V}}$, $d^6y = dx^6 y^{\text{VI}}, \ldots$ a następnie

$$y^{\text{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4},\ y^{\text{V}} = \frac{d^5y}{dx^5},\ y^{\text{VI}} = \frac{d^6y}{dx^6}, \ldots$$

Mamy więc w ogóle

$$d^ny = dx^n y^{(n)},\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Przykłady. 26. I. Jeżeli mamy znaleźć funkcje pochodne funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$, to zastanówmy się najprzód nad tą własnością, że chociaż łuk równać się będzie $x+a$, to różniczka jego wstawy, jako téż i dostawy zawsze podług ogólnéj zasady się znajdzie. Widzimy bowiem, że

$$d\sin(x+a) = \cos(x+a)\,d(x+a),$$

a że $d(x+a) = dx$, to

$$d\sin(x+a) = \cos(x+a)dx,$$

czyli $d\sin(x+a) = \sin(x+a+{}^1/_2\pi)\,dx$.

Pamiętając więc na tę zasadę, łatwo znajdziemy funkcje pochodne żądane.

I tak:

$$d\sin x = \sin(x+{}^1/_2\pi)dx,$$

a zaś $dd\sin x = d^2\sin x = \cos(x+{}^1/_2\pi)dx$

$$= \sin(x+{}^1/_2\pi+{}^1/_2\pi)dx,$$

czyli $d^2\sin x = \sin(x+{}^2/_2\pi)dx$;

daléj $dd^2\sin x = d^3\sin x = \cos(x+{}^2/_2\pi)dx$

$$= \sin(x+{}^2/_2\pi+{}^1/_2\pi)dx,$$

zatém $d^3\sin x = \sin(x+{}^3/_2\pi)dx$.

Podobnież znajdziemy

$$d^4\sin x = \sin(x+{}^4/_2\pi)dx, \text{ i t. d.}$$

czyli w ogólności

$$d^n\sin x = \sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)dx.$$

Tak samo znajdziemy:

$$d^n\cos x = \cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

UWAGA. Każde z wyrażeń $\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$, $\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ przedstawiać tylko może cztery wartości różne, które rodzą się peryodycznie i zawsze w tym samym porządku. Gdy bowiem całkowitą liczbę n podzielimy przez 4, to na resztę otrzymamy 1 lub 2 lub 3 albo zero. W pierwszym razie

$$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,$$

w drugim razie

$$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)=-\sin x,$$

w trzecim razie

$$\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)=\sin(x+{}^3/_2\pi)=-\cos x,$$

w czwartym przypadku

$$\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)=\sin x.$$

Podobnież $\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$ daje cztery tylko wartości,

$$-\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x.$$

II. Weźmy teraz inną funkcję np. $y=a^x$ i szukajmy dla niéj różniczek następnych.

Gdy $y=a^x$, to $dy=a^x l(a)dx$,

$$\frac{dy}{dx}=y'=a^x l(a),$$

$$dy'=da^x.\,l(a)=a^x(la)^2dx,$$

$$\frac{dy'}{dx}=y''=a^x(la)^2 \text{ i t. d.}$$

Podobnież znajdzie się

$$y^{(n)}=a^x(la)^n.$$

Jeżeli $a=e$ t. j. zasadzie logarytmów Nepera, wtedy

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^n}=y^{(n)}=e^x.$$

III. Niech teraz

$$y=x^a,$$

to $dy = ax^{a-1}dx$,

$$y' = \frac{dy}{dx} = ax^{a-1},$$

$$dy' = a(a-1)x^{a-2}dx;$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = a(a-1)x^{a-2},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = a(a-1)(a-2)x^{a-3} \text{ i t. d.}$$

aż w końcu gdy liczba różniczkowań jest taką, jak potęga zmiennéj, to funkcja pochodna tego rzędu będzie ilością stałą, a mianowicie:

$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots\ldots 1;$$

wszystkie zaś następne pochodne staną się tém samém zerami.

IV. Gdy $y = l(x)$,

to

$$dy = \frac{dx}{x},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$dy' = d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$dy'' = d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2xdx}{x^4} = \frac{2dx}{x^3},$$

$$y''' = \frac{1.2}{x^3}.$$

Podobnież znajdziemy

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1.2.3}{x^4}.$$

I w ogólności

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n},$$

$$\text{ztąd } d^{(n)}y=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{x^n}dx^n.$$

Różniczki następne zmiennéj zależnéj.

27. Niechaj $y=f(x)$ i z będą dwie funkcje, których związek wyraża się przez równanie $z=F(y)$. Różniczkując to równanie znajdziemy

$$dz=F'(y)dy\ldots\ldots(1),$$

albowiem różniczka funkcji równa się funkcji pochodnéj pomnożonéj przez różniczkę zmiennéj. Daléj różniczkując równanie (1), przyczém mając uwagę na to, że y jest zmienną zależną, a więc jéj różniczka nie jest ilością stałą, znajdziemy podług wzoru na różniczkę iloczynu:

$$d^2z=dydF'(y)+F'(y)d^2y.$$

Lecz $dF'(y)=F''(y)dy$,

$$\text{zatém } d^2z=F''(y)dy^2+F'(y)d^2y\ldots\ldots(2),$$

podobnym sposobem różniczkując i to równanie, wypada:

$$d^3z=d[F''(y)dy^2]+d[F'(y)d^2y]\ldots\ldots(3).$$

Że zaś $d[F''(y)dy^2]=dy^2dF''(y)+F''(y)ddy^2$,

gdzie $F''(y)=F'''(y)dy$, $ddy^2=2dy\,.\,d^2y$,

to $d[F''(y)dy^2]=F'''(y)dy^3+2F''(y)dyd^2y$.

Uważam teraz, że:

$$d[F'(y)d^2y]=d^2ydF'(y)+F'(y)dd^2y,$$

lecz $dF'(y)=F''(y)dy$,

a $dd^2y=d^3y$,

to $d[F'(y)d^2y]=F''(y)dy\,.\,d^2y+F'(y)d^3y$.

Równanie zatém (3) zamienia się na

$$d^3z = F'''(y)dy^3 + 3F''(y)dy \,.\, d^2y + F'(y)d^3y \ldots (4) \text{ i t. d.}$$

Równania (1) (2) (4) przedstawiają wzory na różniczki następne funkcyj zmiennych zależnych.

28. Odwrotnie teraz, gdy znamy różniczki lub pochodne dla x i y uważanych jako funkcje zmiennéj niezależnéj t, to można z nich wyprowadzić pochodne dla y, uważanéj jako funkcję x.

I tak gdy $y = f(x)$,

$$dy = f'(x)dx,$$

ztąd $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} \ldots\ldots (5)$

$$df'(x) = d\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2},$$

zatém

$$\frac{df'(x)}{dx} = f''(x) = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} \ldots\ldots (6),$$

czyli

$$f''(x) = \frac{1}{dx} \,.\, d\frac{dy}{dx};$$

podobnież znajdziemy

$$f'''(x) = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5} \ldots (7).$$

Wzory (5) i (6) pokazują, że 1) pochodne 1go rzędu ilości zmiennych, czy takowe są niezależnemi, czy zależnemi zawsze są sobie równe; 2) żeby z funkcji pochodnéj 2go rzędu zmiennéj niezależnéj x, przyjść do funkcji tegoż rzędu gdy ta zmienna jest zależną, to należy zamienić $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ na $\dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$,

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ na $\dfrac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}$ i t. d.

Przemiana zmiennéj niezależnéj.

29. Powyższy sposób podaje nam możność wykonywania przemiany zmiennéj niezależnéj (*changement de la variable indépendante*) pomiędzy funkcjami złożonemi téj saméj zmiennéj.

Jeżeli przyjmiemy y za zmienną niezależną, to równanie

$$y=f(x),$$

rozwiązane względem x, da wartość kształtu

$$x=F(y).$$

Zatém $F(y)$ jest funkcją odwrotną dla $f(x)$. Należy więc uczynić $y=t$, zkąd

$$dy=dt,\ d^2y=0,\ d^3y=0,$$

a następnie: (*)

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}=\frac{1}{F'(y)},$$

---

*) Wiedząc z poprzedzającego, że współczynnik różniczkowy pokazuje, że funkcja y różniczkowaną była względem x i dzielona następnie przez dx, należy teraz okazać, czy gdy równanie $\frac{dy}{dx}=A$ ma miejsce, to równanie

$$1=A\frac{dx}{dy},$$

jest prawdziwém. Dlatego uważam, że

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

a gdy $v=x$, to

$$\frac{dx}{dx}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

z wzoru (6) mamy

$$f''(x) = -\frac{dyd^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{F''(y)}{F'(y)^3},$$

a ze wzoru (7)

$$f'''(x) = -\frac{-dxdyd^3x + 3dy(d^2x)^2}{dx^5}$$

$$= \frac{\frac{-dxd^3x}{dydy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} = \frac{3F''(y)^2 - F'(y)F'''(y)}{F'(y)^5}.$$

Oto przykład przemiany zmiennéj niezależnéj.

30. Niech będzie:

$$y = f(x), \text{ i}$$

$$u = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1+f'(x)^2]^{3/2}}{f''(x)} \ldots\ldots (8),$$

wyrażeniem, w którém dy i d^2y są różniczkami y lub $f(x)$ względem zmiennéj niezależnéj x.

1) Jeżeli przyjmiemy teraz za zmienną niezależną, zmienną jakąkolwiek t, związaną z x i y przez równanie

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

to w wyrażeniu (8) należy tylko za $\frac{d^2y}{dx^2}$ podstawić war-

---

$$\text{czyli } 1 = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$\text{ztąd } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

tość $\dfrac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}$ (jak to wyżéj nadmieniliśmy) i będzie:

$$u=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3/2}}{\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}}=\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dxd^2y-dyd^2x};$$

a że $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$,

to $dx=d\varphi(t)\ldots\ldots dy=d\psi(t)$

$d.\varphi(t)=\varphi'(t)dt\ldots\ldots d\psi(t)=\psi'(t)dt$,

zatém

$$u=\frac{\left(1+\frac{\psi'(t)^2}{\varphi'(t)^2}\right)^{3/2}}{\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}}=\frac{[\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2]^{3/2}}{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}.$$

2) Jeżeli przyjmiemy za zmienną niezależną funkcję odwrotną y, to będzie, przypuściwszy $x=F(y)$

$$u=\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}=-\frac{[1+F'(y)^2]^{3/2}}{F''(y)}.$$

ROZDZIAŁ V.

Stosunki jakie istnieją pomiędzy funkcjami rzeczywistemi jednéj zmiennéj i ich pochodnemi.

TWIERDZENIE I. 31. *Gdy funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą względem x w pobliżu wartości szczególnéj $x=x_0$, to gdy x, począwszy od x_0 wartość swoję powiększać będzie, wtedy i funkcja zwiększać będzie swą wartość, jeżeli odpowiednia jéj funkcja pochodna $y'=\frac{dy}{dx}$ mieć będzie wartość skończoną dodatną, a przeciwnie, gdy ta ostatnia mieć będzie wartość skończoną ujemną.*

DOWODZENIE. Niech przyrostkami nieskończenie małemi będą $\triangle x$, $\triangle y$, pierwszy zmiennéj x, drugi funkcji y, to granicą stosunku $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ będzie $\frac{dy}{dx}=y'$. Że zaś gdy y' dodatne, to i $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ dodatne, a gdy y' ujemne, to i $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ujemne być musi, więc gdy funkcja pochodna jest dodatną, to przyrostek funkcji i przyrostek zmiennéj mają znaki jednakowe; czyli z powiększaniem się zmiennéj, powiększa się funkcja i odwrotnie; jeżeli zaś funkcja pochodna jest ujemną, to przyrostki $\triangle y$ i $\triangle x$ mają znaki przeciwne, czyli z powiększaniem się zmiennéj, funkcja się pomniejsza i odwrotnie.

WNIOSEK I. *Gdy funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą między dwiema granicami zmiennéj x, t. j. $x=x_0$ i $x=X$, to powiększając zmienną od pierwszéj granicy do drugiéj i funkcja y zwiększać się będzie, gdy pochodna y' jest dodatną; lecz gdy ta pochodna jest ujemną, to powiększając wartość*

x, przechodząc od jednéj granicy do drugiéj, funkcja y zmniejszać się będzie. Ztąd okazuje się, że funkcja wtedy tylko zmniejsza się, a następnie wzrasta, kiedy funkcja pochodna z ujemnéj przechodzi na dodatną, i odwrotnie; wtedy tylko wzrasta a następnie zmniejsza się, gdy funkcja pochodna z dodatnéj przechodzi na ujemną.

UWAGA. Widoczném jest, że w tém przejściu funkcja pochodna staje się zerem.

Wniosek II. *Gdy funkcja $y=f(x)$ jest ciągłą w pobliżu wartości szczególnéj $x=x_0$, a znika przy téj wartości na zmienną, to jeżeli funkcja pochodna jest dodatną, wtedy powiększając zmienną, począwszy od $x=x_0$, i funkcja powiększać się będzie, począwszy od $f(x_0)$, czyli od zera, a tém samém będzie dodatną ciągle; i odwrotnie, gdy x pomniejszać będziemy od $x=x_0$, to funkcja y pomniejszać się będzie, począwszy od $f(x_0)$ czyli od zera, a tém samém stawać się będzie ciągle ujemną.*

Gdy zaś funkcja pochodna y' jest ujemną: to gdy $x>x_0$, wówczas $f(x)<0$; a jeżeli $x<x_0$, to $f(x)>0$.

Twierdzenie II. 32. *Gdy $f(x)$ i $F(x)$ są funkcjami ciągłemi zmiennéj x między dwiema granicami tychże zmiennych $x=x_0$, $x=X$, tudzież gdy te funkcje znikają przy $x=x_0$, a $F'(x)$ nie zmienia znaku pomiędzy powyższemi granicami, to jeżeli ułamek*

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

jest zawarty pomiędzy granicami A i B, to między temiż samemi granicami zawierać się będzie ułamek

$$\frac{f(x)}{F(x)}.$$

Dowodzenie. Ponieważ ułamek $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zawiera się pomiędzy granicami A i B, to znaczy, że jest większy od A, czyli

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}-A>0,$$

a mniejszy od B, czyli

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}-B<0.$$

Skoro pochodna $F'(x)$ nie zmienia znaku pomiędzy granicami, między któremi $f(x)$ i $F(x)$ są ciągłemi, to zawsze jeden z iloczynów

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)}-A\right\}=f'(x)-AF'(x)\ldots.(1),$$

$$F'(x)\left\{\frac{f'(x)}{F'(x)}-B\right\}=f'(x)-BF'(x)\ldots.(2),$$

jest dodatny, drugi ujemny. Lecz wyrażenia (1) i (2) są widocznie pochodnemi wyrażeń

$$f(x)-AF(x)\ldots.(3),$$
$$f(x)-BF(x)\ldots.(4).$$

Że zaś z tych ostatnich jedna ma funkcję pochodną dodatną, a druga ujemną, to na mocy twierdzenia I, wniosku II, jedna z tych funkcji będzie ciągle wzrastać, a druga zmniejszać się, gdy x od x_0 do X powiększać się będzie. Gdy jednak obie te funkcje są zerami przy $x=x_0$, to gdy x większe jest od x_0 np. gdy $x=X$, wtedy wyrażenia te będą mieć znaki przeciwne, t. j. jeżeli mamy

$$f(X)-AF(X)>0 \text{ czyli } \frac{f(X)}{F(X)}-A>0,$$

$$\text{to } f(X)-BF(X)<0 \text{ czyli } \frac{f(X)}{F(X)}-B<0;$$

a zatém ułamek $\frac{f(X)}{F(X)}$ zawiera się między granicami A i B.

Wniosek I. *Jeżeli funkcje pochodne* $f'(x)$, $F'(x)$ *są także ciągłemi między granicami zmiennéj* $x=x_0$, $x=X$, *a przechodząc od jednéj granicy do drugiéj, ułamek* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ *zawsze zawartym będzie między granicami* A *i* B, *przybierając różne wartości pośrednie, to jak wiadomo i ułamek* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *również między temi granicami* A *i* B *zawierać się będzie, a ztąd koniecznie być musi jedna z wartości pośrednich ułamku* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ *np. odpowiadająca wartości* ξ *na* x, *zawartéj między* x_0 *i* X, *równa wartości ułamku* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *czyli znajdzie się*

$$\frac{f(X)}{F(X)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\ldots\ldots(5).$$

Dla skrócenia nazwijmy

$$X=x_0+h$$

$$\xi=x_0+h,$$

gdzie h jest tegoż samego znaku co $h,$, tylko od niego większe liczebnie. A więc równanie (5) będzie:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h,)}{F'(x_0+h,)}\ldots(6),$$

ponieważ $h,<h$ to można uczynić $h'=\theta h$, gdzie $\theta<1$, czyli wzór (6) zamieni się na:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}\ldots(7).$$

Wniosek II. *Jeżeli założymy, że funkcje*

$$f(x), f'(x), f''(x)\ldots.f^{(n-1)}(x),$$

$$F(x), F'(x), F''(x)\ldots.F^{(n-1)}(x),$$

znikają przy $x=x_0$ *i są ciągłemi, tak jak ich pochodne miedzy granicami* $x=x_0$ *i* $x=X$, *to uważając dwie pierwsze funkcje*

$$f(x),\ f'(x),$$
$$F(x),\ F'(x),$$

mamy na mocy poprzedniego wniosku

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f'(x_0+h_{,})}{F'(x_0+h_{,})},$$

z uważania zaś

$$f'(x),\ f''(x),$$
$$F'(x),\ F''(x);$$

mamy

$$\frac{f'(x_0+h_{,})}{F'(x_0+h_{,})}=\frac{f''(x_0+h_{,,})}{F''(x_0+h_{,,})},$$

i t. d. postępując dojdziemy do

$$\frac{f^{(n-1)}(x_0+h_{(n-1)})}{F^{(n-1)}(x_0+h_{(n-1)})}=\frac{f^{(n)}(x_0+h_n)}{F^{(n)}(x_0+h_n)}.$$

W połączeniu zaś te równania dają:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+h_{(n)})}{F^{(n)}(x_0+h_{(n)})}.$$

Lecz gdy $h_n=\theta h$, *gdzie* $\theta<1$, *to*

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}\ldots..(8).$$

Wniosek III. *Gdy we wzorze* (7) *uczynimy* $x_0=0$ *a* $F(x)=x$, *to ten wzór zamieni się na*

$$f(h)=hf'(\theta h)\ldots..(9),$$

albowiem $f(x_0+h)=f(h)$,

$$F(x_0+h)=F(h)=h,$$
$$f'(x_0+\theta h)=f'(\theta h),$$
$$dF(x_0+\theta h)+d(x_0+\theta h)=d\theta h,$$
$$F'(x_0+\theta h)=1.$$

Wniosek IV. *Jeżeli zaś we wzorze* (8) *uczynimy* $x=0$, $F(x)=x^n$, *to ten wzór wyda:*

$$f(h)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(\theta h);$$

$$\begin{aligned}
\textit{gdyż}\quad & f(x_0+h)=f(h),\\
& F(x_0+h)=h^n,\\
& f^{(n)}(x_0+\theta h)=f^{(n)}(\theta h),\\
& d^nF(x_0+\theta h)=d^n(\theta h)^n=1.2.3\ldots n.d(\theta h),\\
& F^{(n)}(x_0+\theta h)=1.2.3\ldots n.
\end{aligned}$$

Wniosek V. Dajmy teraz, że $f(x)$ otrzymuje wartość dodatną lub ujemną skończoną przy $x=x_0$ i obie funkcje $f(x)$, $f'(x)$ są ciągłemi między granicami $x=x_0$ i $x=X$.

Niech będzie

$$f(x)=f(x)-f(x_0),$$
$$F(x)=x-x_0,$$

że zaś $f'(x_0)=0$, więc $f'(x)=f'(x)$.

Następnie widzimy, że

$$F'(x)=1.$$

Takie więc wartości podstawiwszy we wzór (7) mamy

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{X-x_0}=f'(x_0+\theta h),$$

$$\text{lecz } X-x_0=h,$$

$$\text{zatém } \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)\ldots\ldots(10);$$

co znaczy: *że skoro funkcja $f(x)$ zachowuje wartość skończoną dla $x=x_0$ i jest ciągłą tak jak jéj pochodna $f'(x)$ pomiędzy wartościami $x=x_0$, i $x=x_0+h$, to znajdzie się pomiędzy granicami* 0 *i* 1 *wartość θ, sprawdzającą równanie*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h).$$

Wniosek VI. Ze wzoru zaś (8), czyniąc

$$f(x)=f(x)-f(x_0),$$
$$F(x)=(x-x_0)^n,$$

otrzymamy:

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{(X-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n},\ (*)$$

czyli:

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{h^n}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{1.2.3\ldots n}\ldots\ldots(11);$$

co znaczy, *że skoro funkcje*

$$f(x),\ f'(x),\ldots f^{(n-1)}x,$$

sprowadzą się pierwsza do ilości skończonéj, następne do zera, i będą ciągłemi, tak jak $f^{(n)}(x)$ *pomiędzy* $x=x_0$ *i* $x=x_0+h$, *to znajduje się między granicami* 0 *i* 1 *wartość* θ, *sprawdzająca równanie*

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f(x_0+\theta h).$$

---

*) Gdyż $F^{(n)}(x)=1.2.3\ldots n$, bowiem n oznacza potęgę całkowitą.

ROZDZIAŁ VI.

Oznaczenie wartości jakie przyjmują funkcje rzeczywiste jednéj zmiennéj, gdy się przedstawiają w formie nieoznaczonéj $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0\times\pm\infty$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$ i t. d.

Oznaczenie wartości ułamku $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{0}{0}$.

33. Niechaj $\frac{f(x)}{F(x)}=s$ jest ułamkiem, który przy wartości $x=x_0$ zmienia się na $\frac{0}{0}$.

Gdy x do x_0 się przybliża, wtedy funkcje $f(x)$, $F(x)$ odpowiednio do $f(x_0)$, $F(x_0)$ się przybliżają, a tém samém wartość ułamku danego do $\frac{f(x_0)}{F(x_0)}$ przybliżać się będzie.

Niech X będzie ilością bardzo mało różniącą się od x_0, a ξ wartością pośrednią między x_0 i X, to każda z funkcji $f(x)$, $f'(x)$, $F(x)$ i $F'(x)$ będzie ciągłą i zachowa ten sam znak między szczególną wartością $x=x_0$ i $x=X$; zatém można będzie między niemi wybrać taką wartość na x np. ξ (Nr. 31), któraby dała

$$\frac{f(X)}{F(X)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)};$$

że zaś X ma za granicę x_0, to tém bardziéj ξ do tejże granicy przybliżać się będzie, a tém samém i cały ułamek $\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ będzie miał za granicę wartość ułamku

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

odpowiedniego $x=x_0$, czyli ułamek $\frac{f(x)}{F(x)}$ staje się równym

$$\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

wtedy gdy x jest równe x_0.

Co znaczy, *że gdy wartość szczególna* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *przedstawia się w formie* $\frac{0}{0}$, *to ta wartość schodzi się z wartością odpowiednią ułamku* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

Przykłady. 34. Oznaczmy wartość następujących wyrażeń przy $x=0$.

1) $$\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}.$$

Lecz gdy $f(x)=e^x-e^{-x}$,

$F(x)=\sin x$,

to $f'(x)=e^x+e^{-x}$,

$F'(x)=\cos x$;

a ztąd: $$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

2) $$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{0}{0},$$

że zaś $f(x)=\sin^2 x$,

to $f'(x)=2\sin x\cos x$,

$F(x)=x$,

więc $F'(x)=1$;

dlatego $$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{2\sin x\cos x}{1}=\frac{0}{1},$$

zatém

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{0}{1}=0.$$

3) $\frac{\sin x}{x^2} = \frac{0}{0}$,

$$\text{ponieważ } f(x) = \sin x,$$
$$\text{a } F(x) = x^2,$$
$$\text{to } f'(x) = \cos x,$$
$$F'(x) = 2x;$$
$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\cos x}{2x} = \frac{1}{0},$$

zatém

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Oznaczmy teraz wartość następnych wyrażeń, które stają się nieoznaczonemi przy $x=1$.

4) $\frac{lx}{x-1} = \frac{0}{0}$.

$$f(x) = lx,\ F(x) = x-1,$$
$$f'(x) = \frac{1}{x},\ F'(x) = 1,$$
$$\frac{lx}{x-1} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

5) $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$.

$$f(x) = x-1,\ F(x) = x^2-1,$$
$$f'(x) = 1,\ F'(x) = 2x,$$
$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

6) $\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{0}{0}$,

$$f(x) = x-1,\ F(x) = x^n-1,$$
$$f'(x) = 1,\ F'(x) = nx^{n-1},$$
$$\frac{x-1}{x^n-1} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$

UWAGA. Widoczném jest, że powyższa własność dająca równanie

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)},$$

ma miejsce i w tym razie, gdy stała x_0 staje się nieskończenie wielką; tylko wtedy X i ξ przedstawiają dwie ilości, których wartości liczebne są bardzo wielkie, a wartość ξ większa od X.

35. Gdy funkcje $f'(x)$ i $F'(x)$ znikają także przy $x=x_0$, to wartość szczególna stosunku $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ staje się również nieoznaczoną, i jest kształtu $\frac{0}{0}$, a tém samém podług tego co się wyżéj powiedziało, ta wartość zejdzie się z wartością ułamku $\frac{f''(x)}{F''(x)}$, którego dwa wyrazy są funkcjami pochodnemi 1go rzędu funkcji $f'(x)$ i $F'(x)$.

Podobnie daléj przypuszczając i rozumując dochodzimy do takiego twierdzenia,

że *skoro funkcje*

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots\ldots$$
$$F(x), F'(x), F''(x), \ldots\ldots$$

znikają przy wartości $x=x_0$, *to wartość odpowiednia stosunku*

$$s=\frac{f(x)}{F(x)},$$

zejdzie się z wartością stosunku $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$.

36. Powyższe twierdzenie można w ten sposób okazać jeszcze:

Ponieważ $f(x_0)=0$, $F(x_0)=0$, to

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}}.$$

Lecz gdy x przybliża się do swojéj granicy x_0, wtedy widocznie ułamki $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ przybliżają się do granic $f'(x_0)$, $F'(x_0)$; a zatém

$$\text{gran.}\ \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x_0)}{F'(x_0)},$$

lub

$$\text{gran.}\ \frac{f(x)}{F(x)}=\text{gran.}\ \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Przykłady. 37. Oznaczmy wartości następnych wyrażeń, które przy szczególnéj wartości na x_0 przyjmują kształt $\frac{0}{0}$.

$$1)\quad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{ax^2-2acx+ac^2}{bx^2-2bcx+bc^2}.$$

Ten ułamek, gdy $x=c$, staje się $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}\text{Ponieważ } f(x)&=ax^2-2acx+ac^2,\\ F(x)&=bx^2-2bcx+bc^2,\\ \text{to } f'(x)&=2ax-2ac,\\ F'(x)&=2bx-2bc;\end{aligned}$$

$$\text{zatém } \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{ax-ac}{bx-bc}=\frac{0}{0}.$$

Dlatego uważam jeszcze pochodne 2go rzędu

$$\begin{aligned}f''(x)&=a,\\ F''(x)&=b;\end{aligned}$$

więc $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\dfrac{f''(x)}{F''(x)}=\dfrac{a}{b}$.

2) $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Gdy $x=0$, ułamek ten ma wartość $\dfrac{0}{0}$.

$$f(x)=1-\cos x,$$
$$F(x)=x^2;$$
$$f'(x)=\sin x,$$
$$F'(x)=2x;$$
$$f''(x)=\cos x,$$
$$F''(x)=2;$$

zatém $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\dfrac{f''(x)}{F''(x)}=\dfrac{1}{2}$.

3) $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Przy $x=0$, ten ułamek ma kształt $\dfrac{0}{0}$.

$$f(x)=e^x-e^{-x}-2x,$$
$$F(x)=x-\sin x;$$
$$f'(x)=e^x+e^{-x}-2,$$
$$F'(x)=1-\cos x,$$
$$f''(x)=e^x-e^{-x},$$
$$F''(x)=\sin x;$$
$$f'''(x)=e^x+e^{-x},$$
$$F'''(x)=\cos x.$$

Zatém

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)}=\frac{f''(x)}{F''(x)}=\frac{f'''(x)}{F'''(x)}=\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

4) Uważajmy teraz ułamek

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^x-x}{1-x+lx},$$

przy $x=1$.

$$f(x)=x^x-x,$$
$$F(x)=1-x+lx;$$
$$f'(x)=x^x(1+lx)-1,$$
$$F'(x)=-1+\frac{1}{x},$$
$$f''(x)=x^x(1+lx)^2+x^{x-1},$$
$$F''(x)=-\frac{1}{x^2};$$

ztąd $\dfrac{f(x)}{F(x)}=\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\dfrac{f''(x)}{F''(x)}=\dfrac{x^x(1+lx)^2+x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-1.$

Oznaczenie wartości wyrażeń przyjmujących kształt $\dfrac{\infty}{\infty}$.

38. Jeżeli wartość szczególna $x=x_0$ czyni nieskończonemi $f(x)$, $F(x)$, to następujące ułamki sprowadzą się do zera.

$$\frac{1}{f(x)},\ \frac{1}{F(x)},$$

lub gdy $f(x)=y$, $F(x)=z$,

to $\dfrac{1}{y}=0$, $\dfrac{1}{z}=0$;

że zaś pochodne tych ostatnich są:

$$-\frac{y'}{y^2},\ -\frac{z'}{z^2},$$

to podług powyższego (Nr. 33) mamy

$$\frac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{z}}=\frac{-\dfrac{y'}{y^2}}{-\dfrac{z'}{z^2}},$$

ztąd

$$\frac{z^2}{y^2} \times \frac{y'}{z'} = \frac{z}{y},$$

$$\frac{y'}{z'} = \frac{y}{z}.$$

Mamy więc: *że skoro wartość szczególna stosunku* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *przedstawia się w formie nieoznaczonéj* $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, *to ta wartość zejdzie się z wartością odpowiednią stosunku* $\frac{f'(x)}{F'(x)}$.

Przykład. $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)}$.

Ten ułamek staje się $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, gdy $x=0$, zatém biorąc funkcje pochodne,

$$f'(x) = -\frac{1}{x},$$

$$F'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

mamy $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0}$.

Wartość zaś tego ostatniego wyrażenia, jako mającego kształt $\frac{0}{0}$ znajdzie się, biorąc pochodne licznika i mianownika, i tak:

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

39. Gdy funkcje $f'(x)$ i $F'(x)$ stają się również nieskończonemi przy $x=x_0$, to ta wartość szczególna stosunku $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ zejdzie się z wartością stosunku $\frac{f''(x)}{F''(x)}$. Podobnież rozumując dojdziemy do tego, że skoro funkcje

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ldots\ldots$$
$$F(x),\ F'(x),\ F''(x)\ldots\ldots$$

stają się wszystkie nieskończone przy $x=x_0$, to wartość prawdziwa stosunku $\frac{f(x)}{F(x)}$ zejdzie się z wartością stosunku $\frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$.

Przykład. Niech a będzie ilością całkowitą dodatną, zaś n liczbą całkowitą, bezpośrednio większą od téj stałéj.

Gdy ułamek $\frac{x^a}{e^x}$ przedstawia się w formie nieoznaczonéj, to będzie podług tego co się wyżéj powiedziało:

$$\frac{x^a}{e^x}=\frac{a(a-1)\ldots\ldots(a-n+1)x^{a-n}}{e^x}=$$

$$=\frac{a(a-1)\ldots\ldots(a-n+1)}{x^{n-a}e^x}=0.$$

Oznaczenie wartości funkcji mających kształt
$x^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$ i t. d.

40. Można także z łatwością wyprowadzić wartość funkcji jednéj zmiennéj, przedstawiających się w formach: $x^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$, i t. d.

I tak gdy y i z oznaczają dwie funkcje zmiennéj x, które stają się dla $x=x_0$ pierwsza zerem, druga nieskończoną, to wartość funkcji $s=yz$, odpowiednia $x=x_0$, przyjmie kształt: $0\times\pm\infty$.

Lecz ponieważ $yz=\dfrac{y}{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{z}{\left(\dfrac{1}{y}\right)}$,

a te ostatnie wyrażenia przyjmują znany już nam kształt $\dfrac{0}{0}$, lub $\dfrac{\infty}{\infty}$, dlatego téż i dana funkcja $s=yz=0\times\pm\infty$ przywiedzioną być może do téj postaci, a z takowéj, wartość jéj oznaczyć się daje.

Przykłady. Niech $x=0$, to

1) $x\,l(x)=\dfrac{lx}{x^{-1}}=\dfrac{-\infty}{\infty}$, a że $f(x)=lx$,

$$F(x)=x^{-1},\ f'(x)=\frac{1}{x},\ F'(x)=-\frac{1}{x^2},$$

$$\text{zatém } \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(x)}{F'(x)}=-x=0.$$

2. Przy téj saméj wartości na x mamy:

$$x^a.lx=\frac{lx}{x^{-a}}=\frac{x^{-1}}{-ax^{-a-1}}=-\frac{x^a}{a}=0.$$

Gdy funkcje y i z są takie, że przy $x=0$

$y=0$, $z=0$ lub $y=\infty$, $z=0$, lub $y=1$, $z=\pm\infty$,

to wartości $s=y^z$ odpowiednie $x=0$ przedstawią się w formach nieoznaczonych: 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$.

Dla otrzymania wartości oznaczonéj, uważam, że ponieważ $s=y^z$, to $ls=z\,ly=\dfrac{l\,y}{z^{-1}}$, ztąd $s=e^{\frac{ly}{z^{-1}}}$. Należy więc znaleźć wartość stosunku $\dfrac{ly}{z^{-1}}$, która przy powyższém oznaczeniu na y i z staje się nieoznaczoną; biorąc zatém funkcje pochodne licznika i mianownika mamy:

$$\frac{ly}{z^{-1}} = \frac{\frac{y'}{y}}{-\frac{z'}{z^2}} = -\frac{y'z^2}{yz'}, \text{ a więc } s = e^{\frac{-y'z^2}{yz'}}.$$

ROZDZIAŁ VII.

O maximach i minimach funkcji rzeczywistéj jednéj zmiennéj.

Określenie maximum i minimum.

41. Skoro wartość szczególna funkcji $f(x)$ jest rzeczywistą i przewyższa wszystkie inne sąsiednie wartości rzeczywiste, to ta szczególna wartość funkcji jest *maximum.*

Skoro wartość szczególna $f(x)$ jest mniejszą od wszystkich sąsiednich rzeczywistych wartości, wtedy ona jest *minimum.*

Niech będzie np. krzywa MBN (fig. 5), któréj równanie jest

$$y = b + cx^2,$$

to widocznie, rzędne MP, $M'P'$,..... zmniejszają się aż do punktu B, a zaś od tego punktu zaczynają się ciągle zwiększać, zatém rzędna AB jest minimum funkcji y; krzywa zaś CDE (fig. 6), któréj równanie jest:

$$y = b - cx^2$$

przedstawia maximum dla y w punkcie D; ponieważ rzędne, które następują, i które poprzedzają AD, są mniejsze jak AD, a więc rzędna AD jest *maximum*.

Są linje, które mają tylko maximum, inne tylko minimum, a w końcu i takie, które mają i maximum i minimum jak np. koło XCY (fig. 7), gdzie dla téj saméj odcięte, rzędną minimum jest DE, a maximum jest CE.

Znaleźć maximum lub minimum funkcji.

Zadanie. 42. Znaleźć maximum lub minimum funkcji rzeczywistéj $f(x)$ danéj zmiennéj.

Rozwiązanie. Przedewszystkiem przypomnijmy sobie znaną własność (Nr. 31), że gdy $f(x)$ i $f'(x)$ są ciągłemi w pobliżu wartości szczególnéj na x, i gdy $f'(x)$ jest dodatną, to powiększając x i $f(x)$ wzrasta dotąd, dopóki $f'(x)$ nie stanie się równą zeru; odwrotnie zaś gdy $f'(x)$ jest ujemną, to z powiększaniem się x, zmniejsza się $f(x)$ i dotąd, dopóki taż pochodna nie stanie się zerem. Słowem, że funkcja $f(x)$ jest maximum lub minimum przy $f'(x)=0$.

Poznajmy teraz zasady rozwiązania powyższego zadania.

1) Należy szukać wartości na x, przy któréj funkcja przestanie być ciągłą, każdéj bowiem z tych wartości odpowiadać będzie wartość jéj funkcji, będąca albo maximum, albo minimum, albo ilością nieskończenie wielką, np.

$$1)\ f(x)=x^{1/2}.$$

Funkcja ta staje się przerwaną t. j. przestaje być ciągłą przy $x>0$, albowiem

$$(-x)^{1/2}=\sqrt{-x}.$$

Lecz nim funkcja dana przechodzi na urojoną, to wprzód x staje się zerem i przy téj to ostatniéj wartości na zmienną, funkcja staje się minimum, t. j. $x^{1/2}=0$.

$$2)\ f(x)=\frac{1}{lx},\ f(x)=x\,lx.$$

Te funkcje również przestają być ciągłemi przy ujemnéj wartości na x, w takim bowiem razie wypadają logarytmy ilości ujemnych. Przy wartości więc $x=0$, pierwsze i drugie wyrażenie staje się maximum, albowiem

$$\frac{1}{lx}=\frac{1}{-\infty}=0,$$

$x\,.\,l(x)=0\times-\infty$ (jest wyrażeniem nieoznaczoném, dlatego wartość jego znajdzie się znanym sposobem Nr. 40);

$$x\,lx=0.$$

Gdybyśmy na x dawali wartości większe od zera, logarytmy stałyby się ujemne, a tém samém całe wyrażenie mniejsze od zera; nadając zaś na x wartości mniejsze od zera, funkcje stają się przerwanemi.

2) Szukać należy pierwiastków równania

$$f'(x)=0.$$

I tak niech jednym z tych pierwiastków będzie x_0, to odpowiednia téj wartości funkcja, t. j. $f(x_0)$ będzie maximum, gdy w pobliżu $x=x_0$, funkcja pochodna jest dodatną dla $x<x_0$, i ujemną dla $x>x_0$. Przeciwnie $f(x_0)$ będzie minimum, gdy $f'(x)$ jest ujemną dla $x<x_0$, i dodatną dla $x>x_0$. Nakoniec jeżeli w pobliżu $x=x_0$, $f'(x)$ była ciągle dodatną, albo ciągle ujemną, to $f(x_0)$ nie będzie już ani maximum, ani minimum.

Przykład. Niech funkcje dane będą:

$$f(x)=x^2,\ F(x)=x^{2/3},$$

to pochodne ich

$$2x,\ \frac{2}{3x^{1/3}},$$

przechodzą z dodatnych na ujemne, gdy x przechodzi z dodatnéj na ujemną; t. j. $f'(x)$, $F'(x)$ są ujemne dla $x<0$, i dodatne dla $x>0$, a więc przy $x=0$ pierwsza i druga staje się minimum

$$2x=0,\ x^{2/3}=0.$$

Dwie zaś następne funkcje:

$$x^3,\ x^{1/3}.$$

których pochodne

$$3x^2,\ \frac{1}{3x^{2/3}},$$

będące jedna zerem, a druga nieskończoną przy $x=0$, pozostaną ciągle dodatne przy wszelkich wartościach na x, przeto dane funkcje nie mają ani maximum, ani minimum.

Funkcja

$$x^2+px+q,$$

jest ciągłą tak jak jéj pochodna

$$2x+p$$

przy wszelkich wartościach możliwych na x.

Lecz ponieważ pochodna znika przy $2x=-p$, czyli $x=-\frac{p}{2}$, a staje się ujemną przy $x<-{}^1/_2 p$, dodatną dla $x>{}^1/_2 p$, wynika więc, że funkcja dana przedstawia wartość minimum odpowiednią $x=-{}^1/_2 p$.

Ta wartość minimum jest

$$q-{}^1/_4 p^2.$$

Oznaczmy przez A liczbę większą od jedności, przez $L(x)$ logarytm przy zasadzie A, to funkcja

$$\frac{A^x}{x},$$

ma za pochodną

$$\frac{A^x}{x}\left(\frac{1}{Le}-\frac{1}{x}\right).$$

A ponieważ ta pochodna przy wartości na $x>0$ jest ujemną przy $x<L(e)$, dodatną przy $x>L(e)$, i równą zeru przy $x=L(e)$, to ztąd wypada, że funkcja dana jest minimum przy $x=L(e)$, czyli staje się

$$\frac{A^{L(e)}}{Le}=\frac{e}{Le}.$$

Przeciwnie funkcja $\dfrac{L(x)}{x}$,

której pochodna $\dfrac{1}{x^2}\{Le-L(x)\}$,

jest dodatną, zero, lub ujemną przy $x>0$, stosownie do tego, czy $x<e$, $x=e$, $x>e$, przyjmie maximum przy $x=e$ i stanie się

$$\frac{Le}{e}.$$

43. W pierwszych przykładach znaleźliśmy maximum lub minimum funkcji, nie czyniąc tych funkcji przerwanemi, ale owszem łatwym bardzo sposobem przekonaliśmy się, przy jakich wartościach $f'(x)$ staje się dodatną, ujemną i zerem; gdy jednak nie zawsze tak można postąpić, a niewiadomo, który z pierwiastków równania

$$f'(x)=0,$$

daje maximum lub minimum funkcji danej (t. j. nie wiemy czy przy wartości tego pierwiastku $x=x_0$, $f'(x)$ staje się dodatną lub ujemną przy $x>x_0$, i ujemną lub dodatną przy $x<x_0$), należy więc uważać jeszcze funkcją pochodną rzędu drugiego. I tak: niechaj x_0 będzie jednym z wspomnionych pierwiastków, i niech wartość odpowiednia $f''(x)$ sprowadzi się do ilości skończonéj. Pierwiastkowi x_0 odpowiadać będzie maximum $f(x)$, jeżeli $f'(x)$ przechodzi z ujemnéj na dodatną, stając się zerem przy $x=x_0$, t. j. innemi słowy, jeżeli $f'(x)$ zwiększa się wraz ze zmienną x, w pobliżu wartości szczególnéj $x=x_0$. Ten zaś ostatni warunek wtedy jest wypełniony (Nr. 31), jeżeli pochodna funkcji $f'(x)$ t. j. $f''(x)$, jest ciągle dodatną lub zerem dla wartości na x bardzo mało różniącéj się od x_0. Wartość zatém zero, jest w takim razie minimum funkcji $f''(x)$, ujemną bowiem już ta funkcja być nie może. Podobnież $f(x_0)$ będzie maximum $f(x)$, jeżeli $f'(x_0)=0$, i wartość $f'(x)$ zmniejsza się dla wartości zwiększających się na x, w pobliżu wartości szczególnéj $x=x_0$, to zaś ostatnie będzie miało miejsce wtedy, gdy $f''(x_0)$ przedstawia wartość skończoną i ujemną, albo wartość zero, która to wartość zero będzie wtedy maximum $f''(x)$ (bowiem ta funkcja dodatną być nie może).

Przykłady.

1) $f(x)=\dfrac{A^x}{x}$,

$$f'(x)=\frac{A^x}{x}\left(\frac{1}{Le}-\frac{1}{x}\right)=f(x)\left(\frac{1}{Le}-\frac{1}{x}\right),$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{Le}-\frac{1}{x}\right)f'(x)+\frac{1}{x^2}f(x)=$$

$$=\left(\frac{1}{Le}-\frac{1}{x}\right)^2 f(x)+\frac{1}{x^2}f(x).$$

A zatém skoro wartość $x=Le$ przyprowadzająca $f'(x)$ do zera, czyni $f''(x)$ równą $\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1}{x^2}\frac{A^x}{x}=\frac{A^x}{x^3}$ t.j. ilością dodatną, to ona wyda minimum funkcji danéj $\frac{A^x}{x}$.

$$2)\ f(x)=e^x-2\cos x+e^{-x},$$
$$f'(x)=e^x+2\sin x-e^{-x},$$
$$f''(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}.$$

A zatém skoro wartość $x=0$, sprowadzająca $f'(x)$ do zera , czyni $f''(x)$ równą

$$1+2+1=4,$$

t. j. dodatną, to ona wyda minimum funkcji danéj.

44. Jeżeli wartość na $x=x_0$ nie czyni przerwaną $f(x)$, lecz przy téj wartości pochodne

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)\ldots\ldots$$

aż do $f^{(n-1)}(x)$ znikają, t. j. $f^{(n)}(x)$ jest pierwszą, która nie znika, to jeżeli $f(x_0)$ jest maximum albo minimum $f(x)$, to koniecznie podług tego co się poprzednio powiedziało $f''(x_0)$, powinna być maximum albo minimum $f''(x)$. A skoro $f''(x_0)$ jest maximum lub minimum $f''(x)$, to $f'''(x_0)$, powinna się sprowadzić do zera, zaś funkcja $f^{\text{IV}}(x_0)$ do ilości skończonéj dodatnéj lub ujemnéj, albo do zera będącego maximum lub minimum $f^{\text{IV}}(x)$, a że to ostatnie, podług założenia, rzeczywiście ma miejsce, to skoro $f^{\text{IV}}(x_0)$ jest maximum albo minimum $f^{\text{IV}}(x)$, powinno być koniecznie, żeby $f^{\text{V}}(x_0)$ sprowadziła się do zera, a $f^{\text{VI}}(x_0)$ do ilości skończonéj ujemnéj lub dodatnéj, albo téż do zera, będącego wtedy maximum lub minimum $f^{\text{VI}}(x_0)$. Podobnie daléj rozumując, okazuje się: że gdy $f^{(n)}(x)$

jest pierwszą z funkcji pochodnych, która nie znika, to aby funkcja $f(x)$ była maximum przy $x=x_0$, to $f^{(n)}(x_0)$ powinna być skończoną ujemną, a zaś n liczbą parzystą; aby zaś wspomniona funkcja była minimum, to $f^{(n)}(x_0)$ powinna być skończoną dodatną, a zaś n zawsze parzyste.

Przykład.
$$f(x)=e^x+2\cos x+e^{-x},$$
$$f'(x)=e^x-2\sin x-e^{-x},$$
$$f''(x)=e^x-2\cos x+e^{-x},$$
$$f'''(x)=e^x+2\sin x-e^{-x},$$
$$f^{\text{IV}}(x)=e^x+2\cos x+e^{-x}.$$

Wartość $x=0$, czyniąca pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ równe zeru, sprowadzi funkcją $f^{\text{IV}}(x)$ do ilości dodatnéj $1+2+1=4$, a tém samém wartość odpowiednia funkcji danéj $f(x)$, t. j. liczba 4, będzie minimum tejże funkcji.

Zastosowanie teorji maximum i minimum do rozwiązania różnych zadań.

45. *Podzielić liczbę a na dwie takie części, żeby iloczyn z nich był maximum.*

Niech jedna część będzie x, to druga $(a-x)$ być musi, zatém
$$y=x(a-x)=ax-x^2,$$
ztąd
$$dy=adx-2xdx,$$
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=a-2x,$$
$$f''(x)=-2.$$

Funkcja $f''(x)$ jako ujemna pokazuje, że dana funkcja $f(x)=y$ ma maximum, lecz to maximum jest, gdy

$$f'(x)=0,$$

to jest

$$a-2x=0,$$

$$x=\frac{a}{2}.$$

2) *Znaleźć z pomiędzy walców wpisanych w ostrokrąg prosty ten, któryby był maximum co do bryłowatości.*

Niech $a=SC$ (fig. 8), $b=AC$, $x=SD$, t. j. odległości wierzchołka ostrokręgu od środka górnéj podstawy walca.

Widzimy, że:

$$SC:AC=SD:DE,$$

$$a:b=x:ED,$$

$$ED=\frac{bx}{a}.$$

Powierzchnia koła o promieniu ED, jest równą

$$\pi\times\frac{b^2x^2}{a^2},$$

a bryłowatość walca o takiéj podstawie i wysokości $(a-x)$ jest

$$y=\frac{\pi b^2x^2}{a^2}(a-x),$$

$$y=\frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2-x^3),$$

$$dy=\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-3x^2)dx,$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-3x^2),$$

$$f''(x)=\frac{\pi b^2}{a^2}(2a-6x);$$

dla maximum lub minimum powinno być

$$\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-3x^2)=0,$$

to jest:

$$x(2a-3x)=0;$$

dajmy, że pierwszy czynnik równa się zeru, t. j.

$$x=0,$$

to przy téj wartości funkcja

$$f''(x)=2a.\frac{\pi b^2}{a^2}=\frac{2\pi b^2}{a},$$

staje się ilością dodatną, więc $f(x)$, ma minimum przy $x=0$, czyli walec zero, jest minimum zpomiędzy wpisywanych w ostrokrąg. Jeżeli zaś x nie jest zerem, to drugi czynnik daje równanie

$$2a-3x=0,$$

to

$$x=\frac{2a}{3}.$$

A że funkcja $f''(x)$ w tym razie ma wartość ujemną, to $f(x)$ jest maximum przy $x=\frac{2a}{3}$, czyli wysokość walca wpisanego, maximum co do objętości, jest

$$CD={}^1/_3 SC.$$

3) *Podzielić prostą AB* (fig. 9), *na dwie części AC i CB, w ten sposób, iżby iloczyn* $\overline{AC}^3 \times CB$, *był maximum.*

Niech a oznacza długość danéj linji, x jéj część szukaną, to

$$y=x^3(a-x),$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=3ax^2-4x^3,$$

$$f''(x)=6ax-12x^2;$$

gdy

$$f'(x)=0, \text{ to jest}$$
$$3ax^2-4x^3=0,$$

albo

$$(3a-4x)x^2=0,$$

zkąd albo $x^2=0$, albo $3a-4x=0$, to

z pierwszego $x=0$, z drugiego $x=\frac{3a}{4}$;

a że przy téj saméj wartości

$$f''(x)=6a\times\frac{3a}{4}-12\times\frac{9a^2}{16}=-\frac{9a^2}{4},$$

przeto $f(x)$ jest maximum, gdy $x=\frac{3a}{4}$.

4) *Znaleźć wymiary walca, któryby pomieścił daną ilość wody, a powierzchnią wewnętrzną miał minimum.*

Niech $V=$ objętości wody,

x promień podstawy walca kołowego,

to $V=\pi x^2\times$wysokość walca,

zatém

$$\text{wysokość walca}=\frac{V}{\pi x^2},$$

a zaś powierzchnia boczna $=\frac{V}{\pi x^2}\times\pi x=\frac{2V}{x}$,

zatém powierzchnia boczna z podstawą walca

$$y=\frac{2V}{x}+\pi x^2,$$

zkąd

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{2V}{x^2}+2\pi x,$$

$$f''(x)=\frac{4V}{x^3}+2\pi;$$

gdy

$$f'(x)=0,$$

$$\text{to}\quad -\frac{2V}{x^2}+2\pi x=0,$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},$$

a że podług téj wartości

$$f''(x)=\frac{4V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^3}+2\pi=4\pi+2\pi=6\pi,$$

zatém wartość na $x=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, odpowiada żądanemu minimum, a ztąd wysokość walca być musi

$$\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

5) *Znaleźć zpomiędzy wszystkich ostrokręgów wpisanych w kulę ten, który będzie maximum co do powierzchni bocznéj.*

Dajmy, że przez obrót półkola AMB (fig. 10), tworzyła się kula, a przez obrót cięciwy AM, około osi AB, ostrokrąg o wysokości AP i o promieniu podstawy PM. Powierzchnia boczna tego ostrokręgu będzie:

$$2\pi\times PM\times {}^1/_2 AM=\pi\times PM\times AM.$$

Niechaj $AB=2a$, $AP=x$, to

$$x:PM=PM:(2a-x),$$
$$PM=\sqrt{2ax-x^2},$$
$$x:AM=AM:2a,$$
$$AM=\sqrt{2ax},$$

Zatém powierzchnia boczna ostrokręgu

$$y = \pi . \sqrt{2ax - x^2} . \sqrt{2ax},$$

$$= \pi \sqrt{4a^2 x^2 - 2ax^3},$$

$$f'(x) = \frac{\pi(4a^2 - 3ax)}{\sqrt{4a^2 - 2ax}},$$

$$\text{a gdy } f'(x) = \frac{\pi(4a^2 - 3ax)}{\sqrt{4a^2 - 2ax}} = 0,$$

$$\text{to } x = \frac{4a}{3},$$

że zaś

$$f''(x) = \frac{-8a^3 + 3a^2 x}{(4a^2 - 2ax)^{3/2}},$$

podług powyższéj wartości na x staje się ujemną, zatém funkcja dana y, czyli powierzchnia boczna ostrokręgu szukanego, jest maximum przy wartości $x = \frac{4a}{3}$.

6) *Przez punkt C* (fig. 11), *dany wewnątrz kąta prostego YAX przeprowadzić liniję prostą DE spotykającą ramiona jego w ten sposób, że długość téj prostéj DE będzie minimum.*

Niech $AI = a$, $IC = b$, $IE = x$,

$$IE : IC = AE : AD,$$

$$x : b = a + x : AD,$$

$$AD = \frac{b}{x}(a + x),$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2}{x^2}(a + x)^2,$$

$$\overline{AE}^2 = (a + x)^2,$$

$$DE = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{\frac{b^2}{x^2}(a+x)^2 + (a+x)^2} =$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b^2}{x^2}+1\right)(a+x)^2}=\sqrt{\frac{b^2+x^2}{x^2}(a+x)^2}=$$

$$=\frac{a+x}{x}\sqrt{b^2+x^2}=y,$$

$$dy=\left\{\frac{a+x}{x}\times{}^1/_2(b^2+x^2)^{-1/2}2x+(b^2+x^2)^{1/2}\times\frac{x-(a+x)}{x^2}\right\}dx,$$

$$f'(x)=\frac{x^3-ab^2}{x^2\sqrt{b^2+x^2}};$$

gdy

$$f'(x)=0,$$

to

$$x^3-ab^2=0,$$

ztąd

$$x=\sqrt[3]{ab^2};$$

zaś

$$f''(x)=\frac{(x+3a)b^2x^2+2ab^4}{x^3(b^2+x^2)^{3/2}},$$

ma wartość widocznie dodatną przy $x=\sqrt[3]{ab^2}$, czyli dana funkcja jest minimum przy téj wartości na x.

7) *Znaleźć największy trójkąt prostokątny, jaki można wybudować na prostéj danéj.*

Niech tą prostą będzie $AB=a$ (fig. 12), zaś x jednym z boków trójkąta, to bok drugi będzie $\sqrt{a^2-x^2}$. Powierzchnia zatém trójkąta:

$$y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$dy={}^1/_4\frac{2a^2x-4x^3}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Gdy $f'(x)=0$,

to

$$a^2-2x^2=0,$$

ztąd

$$x^2=\frac{a^2}{2};$$

a że funkcja

$$f''(x)=\frac{(3a^2-2x^2)x}{2(a^2-x^2)^{3/2}},$$

jest ujemną przy wartości powyższéj na $x=\frac{a^2}{2}$, dlatego też dana funkcja jest przy téj wartości maximum.

8) *Znaleźć odległość minimum danego punktu $M(a, b)$* (fig. 13) *od krzywéj, któréj równanie znane*

$$y=f(x).$$

Niech K jest punktem jakimkolwiek na téj krzywéj, MK linją łączącą ten punkt z drugim, to będzie:

$$\overline{MK}^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Pochodna tego wyrażenia jest:

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0,$$

czyli

$$\frac{(y-b)}{(x-a)}\frac{dy}{dx}+1=0.$$

Lecz ponieważ $\frac{dy}{dx}$ jest styczną trygonometryczną kąta, jaki czyni linja styczna z osią odciętych w punkcie x, y do téj krzywéj poprowadzonéj, a $\frac{y-b}{x-a}$ styczną trygonometryczną kąta, jaki czyni linja MK z osią odciętych, zatém skoro iloczyn tych stycznych równa się -1, to linja MK musi być prostopadłą do stycznéj.

Dajmy np., że krzywą tą jest okrąg koła, którego równanie jest

$$x^2+y^2=r^2.$$

Zatém mieć będziemy:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

a podług tego

$$1+\frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{dy}{dx}=1-\frac{y-b}{x-a}\cdot\frac{x}{y}=0,$$

zkąd

$$y=\frac{b}{a}x,$$

czyli że linja *MK* przechodzi przez środek koła *O*.

Tak więc dla oznaczenia x i y mamy dwa równania:

$$x^2+y^2=r^2,$$

$$y=\frac{b}{a}x,$$

za pomocą których znaleźć można punkta przecięcia okręgu z prostą *MO*. Wtedy *KM* będzie linją minimum, a *K'M* maximum, co łatwo jest widzieć także, uważając funkcję pochodną drugiego rzędu.

Przypuśćmy, że punkt dany *N* leży na osi odciętych w odległości a od środka, to kwadrat z odległości *NH* wyrazi się przez

$$y^2+(x-a)^2,$$

czyli

$$r^2-2ax+a^2.$$

Lecz pochodna téj funkcji jest ilością stałą $(-2a)$ która tém samém nie może być równą zeru. Zatém chociaż istnieje odległość minimum, która jest *NA*, to ztąd pochodzi, że podług określenia funkcja jest minimum przy pierwszéj wartości na zmienną, skoro ona wzrasta przy wszelkich wartościach większych i mniejszych od téj zmiennéj. Lecz jeżeli *NH* jest uważane jako funkcja x, to *NA* nie jest już minimum w tém znaczeniu jakeśmy powiedzieli, ponieważ ta funkcja będąc rzeczywistą przy wartościach na x mniejszych od r, staje się urojoną przy wartościach na x większych od r. W takim to więc razie, jak i poprzednio nadmieniliśmy, należy uważać, kiedy fuukcja dana staje się przerwaną.

I tak: dana funkcja

$$r^2-2ax+a^2,$$

staje się przerwaną, gdy

$$r^2+a^2<2ax,$$

$$x>\frac{r^2+a^2}{2a},$$

Słowem, im x staje się większe, tém funkcja coraz bardziéj zmniejsza się i zbliża do téj granicy, w któréj staje się przerwaną, a więc przy największéj możliwéj wartości na x, przy któréj jeżeli ta funkcja jest ciągłą, to ona jest zarazem minimum. Że zaś największa wartość na x jest $x=r$, więc przy téj wartości na zmienną, odległość szukana jest minimum, czyli jest to linja NL.

9) *Dane są dwa punkta A i B* (fig. 14) *położone w dwóch różnych środkach, przedzielonych płaszczyzną P. Ruchadło* (*un mobile*) *porusza się w pierwszym środku z prędkością jednostajną u, a w drugim środku z prędkością jednostajną v; oznaczyć drogę AHB, jaką to ruchadło ma przejść od punktu A do B, w czasie jak najkrótszym.*

Jasną jest rzeczą, że ta droga powinna być złożona z linji prostych. Nadto ta linja łamana, szukana w zadaniu, powinna być na płaszczyznie $ABCD$ poprowadzonéj przez AC i BD prostopadle do płaszczyzny P. I tak: przypuśćmy, że tą linją jest AGB, spotykająca płaszczyznę P w punkcie G, i nieleżąca na płaszczyznie $ABCD$. Poprowadźmy GL prostopadłą do CD, i połączmy AL i BL. Trójkąty AGL i BGL, jako prostokątne przy L dają $AL < AG$, $BL < BG$; a zatém ruchadło prędzéj przejdzie drogę ALB, jak AGB.

Szukajmy więc na płaszczyznie $ABCD$, prostopadłéj do płaszczyzny P, linji AHB, którą przebiega ruchadło w czasie jak może być najkrótszym. Niech

$$AC = a,\ BD = b,\ CD = c \text{ i } CH = x.$$

Czas, jaki ruchadło potrzebuje do przejścia od A do H, będzie $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}$, a czas potrzebny do przejścia od H do B, będzie $\frac{BH}{v} = \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$, a zatém funkcja, która ma dać minimum jest:

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}.$$

Uczyńmy więc

$$f'(x) = \frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0,$$

czyli

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Gdybyśmy chcieli w tym przypadku wynaleźć wartość na x, należałoby rozwiązać równanie stopnia 4go. Lecz ponieważ

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI,$$

to widocznie w razie minimum (*) mieć będziemy:

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHI}{v} \text{ lub } \frac{\sin AHK}{\sin BHI} = \frac{u}{v}.$$

---

*) Jasną jest rzeczą, że funkcja ta maximum mieć nie może.

10. *Mała powierzchnia biała jest położona na stole poziomo i oświecona przez świecę, od któréj odległość jéj wyrażona przez rzut poziomy jest stałą; pytanie w jakiéj wysokości od poziomu płomień znajdować się powinien, żeby oświecenie powierzchni było maximum?*

Niech A (fig. 15), będzie tą powierzchnią, BC świecą.

$$AB=a,\ AC=x;\ BC=\sqrt{x^2-a^2}.$$

Ponieważ z optyki wiadomo, że oświecenie jest proporcjonalne wprost do wstawy kąta padania promienia światła, a odwrotnie do kwadratu z odległości tegoż światła od powierzchni oświeconéj, należy więc tylko uczynić stosunek:

$$\frac{\sin CAB}{AC^2},$$

lub

$$\frac{CB}{AC^3}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}=f(x),$$

maximum. W tym celu bierzemy funkcję pochodną, która jest:

$$f'(x)=\frac{-2x^2+3a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Aby zaś funkcja $f(x)$ była maximum, to należy, iżby

$$\frac{-2x^2+3a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}=0,$$

zkąd

$$2x^2-3a^2=0,$$

$$x=a\sqrt{3/2}.$$

I ta jest wysokość światła dla maximum oświecenia powierzchni A.

ROZDZIAŁ VIII.

Rozwinięcie funkcji rzeczywistéj zmiennéj x podług potęg wzrastających i całkowitych téj zmiennéj.

46. Okazaliśmy wyżéj (Nr. 32), że gdy funkcje (*)

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ldots\ldots f^{(n-1)}(x),$$
$$F(x),\ F'(x),\ F''(x)\ldots\ldots F^{(n-1)}(x),$$

znikają wraz ze zmienną x i są ciągłemi tak jak i pochodna $f^{(n)}(x)$ pomiędzy granicami $x=x_0$ i $x=x_0+h$, to istnieje pomiędzy granicami 0 i 1 wartości θ sprawdzająca wzór

$$f(x)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)\ldots\ldots(1).$$

Ta własność nastręcza nam łatwy sposób rozwinięcia funkcji rzeczywistéj téj saméj zmiennéj, podług potęg wzrastających i całkowitych.

Niechaj $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennéj x, która zachowuje wartość skończoną tak jak i jéj pochodne rzędu niższego i równego n przy wartości zero na x.

Przypuśćmy teraz, że funkcje

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x)\ldots\ldots f^{(n)}(x),$$

pozostają rzeczywiste i ciągłe od $x=0$ do $x=h$, to otrzymamy z równania (1) przyjąwszy

$$f(x)=f(x)-f(0) \text{ i } n=1\ (^{**}),$$
$$f(x)-f(0)=xf'(\theta x),$$

potém dajmy, że

$$f'(\theta x)=f'(0)+P,$$

---

*) W których przyjęliśmy $x_0=0$, zaś $F(x)=x^n$.

**) $f(x)-f(0)$ jest to funkcja, która widocznie znika wraz z x.

$$\text{to } f(x)-f(0)=xf'(0)+xP,$$
$$\text{zkąd } f(x)-f(0)-xf'(0)=xP;$$

a że strona pierwsza tego równania jest funkcją, która znika wraz z x dlatego podług wzoru (1) mieć jeszcze będziemy, przyjąwszy $n=2$:

$$f(x)-f(0)-xf'(0)=\frac{x^2}{1.2}f''(\theta x).$$

Uczyniwszy teraz

$$f''(\theta x)=f''(0)+Q,$$
$$\text{to } f(x)-f(0)-xf'(0)=\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^2}{1.2}Q,$$
$$\text{zkąd } f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)=\frac{x^2}{1.2}Q.$$

Lecz funkcja przedstawiona przez pierwszą stronę tego równania staje się zerem przy $x=0$, przyjąwszy więc $n=3$ mieć będziemy:

$$f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)=\frac{x^3}{1.2.3}f'''(\theta x).$$

Podobnie i daléj rozumując dojdziemy w końcu do następującego wzoru:

$$f(x)-f(0)-xf'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)-\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)\ldots\ldots\ldots$$
$$-\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)=\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(\theta x),$$

czyli

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(\theta x)\ldots\ldots[A].$$

47. **Przykłady.** 1) Niechaj daną funkcją będzie:

$$f(x)=e^x,$$

która jest ciągłą wraz z jéj pochodnemi różnych rzędów przy jakiéjkolwiek wartości na x,

$$\text{to } f^{(n)}(x)=e^x,$$
$$\text{ztąd } f^{(n)}(0)=1.$$

Podług więc powyższego wzoru mieć będziemy:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\frac{x^n}{1.2..n}e^{\theta x}.$$

2) Dajmy teraz, że

$$f(x)=\cos x,$$

która jest ciągłą przy jakichkolwiek wartościach na x.

$$\text{to } f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2},$$

a zatém

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots..$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\cos\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

lub gdy

$$f(x)=\sin x,$$

$$\text{to } f^{(n-1)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

a więc

$$\sin x=1-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots..$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\sin\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{x^n}{1.2\ldots n}\sin\left(\theta x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Rozwińmy teraz w szereg funkcje

$$f(x)=(1+x)^\mu,\ f(x)=l(1+x),$$

które to funkcje wraz z ich pochodnemi różnych rzędów są ciągłemi zawsze, gdy $1+x>0$. μ oznacza ilość stałą.

3) $f(x)=(1+x)^{\mu}$,

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n},$$

$$f^{(n)}(0)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1),$$

$$(1+x)^{(\mu)}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)}x^{n-1}+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}x^n(1+\theta x)^{\mu-n}.$$

4) $f(x)=l(1+x)$,

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\times\frac{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots\ldots(n-1),$$

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots\pm\frac{x^{n-1}}{n-1}+\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

5) Przypuściwszy, że

$$f(x)=\operatorname{arc\,tang} x,$$

to będzie:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right\},$$

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{-1})^{n-1}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n-\left(\frac{-1}{1+x\sqrt{-1}}\right)^n\right\},$$

$$f^{(n)}(0)=\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}\{1-(-1)^n\}(\sqrt{-1})^{n-1}.$$

Gdy n jest liczbą całkowitą nieparzystą, to otrzymamy:

$$f^{(n)}(0)=1.2.3\ldots(n-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

gdy zaś to n jest parzyste, wtedy mieć będziemy:

$$f^{(n)}(0)=0;$$

podług więc tego przy wszelkich wartościach rzeczywistych na x funkcja dana rozwinięta, gdy n parzyste, będzie

$$\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{x^{n-1}}{n-1} \mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} - (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}},$$

gdy n nieparzyste:

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots.$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{x^{n-2}}{n-2} \mp \frac{x^n}{n} \frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n} + (1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}.$$

48. Skoro funkcja $f(x)$ jest całkowitą i potęgi n, to jéj różniczka rzędu n^{tego} a tém samém i pochodna tegoż rzędu sprowadzą się do ilości stałéj, czyli będzie: $f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0)$, a wzór powyższy na rozwinięcie funkcji, przedstawi kształt:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0).$$

Przykład. Niechaj:

$$f(x) = (1+x)^n,$$

to $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{n}{1} x^{n-1} + x^n.$

49. Dajmy teraz, że a jest wartością szczególną zmiennéj x, i niech $f(a)$ jest całkowitą lub niecałkowitą, zachowującą dla $x=a$ wartość skończoną, jak również i jéj pochodne rzędu niższego lub równego n, nadto załóżmy, że funkcje

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x) \ldots\ldots f^{(n)}(x),$$

pozostają rzeczywiste i ciągłe od $x=a$, do $x=a+h$.

Wtedy jeżeli uczynimy, $x=a+z$, $F(z)=f(a+z)=f(x)$

to $F'(z)=f'(a+z)$, $F''(z)=f''(a+z)$,.....

$F'(0)=f'(a)$, $F''(0)=f''(a)$,.....

Będzie więc podług znanego wzoru [A]:

$$F(z)=F(0)+\frac{z}{1}F'(0)+\frac{z}{1.2}F''(0)+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\frac{z^{n-1}}{1.2...(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{z^n}{1.2...n}F^{(n)}(\theta z),$$

lub co jedno znaczy:

$$[\mathrm{B}]\quad f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2...(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].$$

50. **Przykłady.** Niechaj a będzie ilością stałą, a przyjmijmy za $f(x)$ dwie fuukcje rzeczywiste:

$$x^\mu,\ l\left(\frac{x}{a}\right),$$

które pozostają ciągłemi, tak jak ich pochodne przy dodatnéj i skończonéj wartości na x.

Pochodne tych funkcji są:

$$f^{(n)}(x)=\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1.2.3...(n-1)}{x^n}.$$

Wzór więc [B] da nam podług tego:

$$x^\mu=a^\mu+\mu a^{\mu-1}(x-a)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}(x-a)^2+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\frac{\mu(\mu-1)\dots\dots(\mu-n+2)}{1.2\dots\dots(n-1)}a^{\mu-n+1}(x-a)^{n-1}+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)\dots\dots(\mu-n+1)}{1.2\dots\dots n}(x-a)^n[a+\theta(x-a)]^{\mu-n},$$

a zaś

$$l\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{x-a}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3-\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{1}{n-1}\left(\frac{x-a}{n}\right)^{n-1}\mp\frac{1}{n}\left\{\frac{x-a}{a+\theta(x-a)}\right\}^n.$$

51. Wzór [A] i wzór [B] uważać można jako złożone z dwóch części a mianowicie: pierwszéj, która jest w obu razach funkcją całkowitą:

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0),$$

$$f(a)+\frac{x-a}{1.2}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

i drugiéj reszty, która jest

$(a)\ldots\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$ w pierwszém rozwinięciu, a zaś

$(b)\ldots\ldots\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ w drugiém rozwinięciu.

Często jednakże zdarza się potrzeba podstawienia za te reszty innego równego mu co do wartości wyrażenia. Dochodzimy do tego następującym sposobem.

Przypuśćmy we wzorze [A], że x jest ilością stałą, a zaś zmienną i oznaczmy przez $\varphi(a)$ to, czém się stanie wtedy reszta (b) uważana jako funkcja a, to jest:

$$\varphi(a)=\frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^{(n-1)}[a+\theta(x-a)]\ldots.(1)$$

będzie więc:

$$2)\ f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\varphi(a).$$

Uczyniwszy we wzorze [B] $n=1$ otrzymamy:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'[a+\theta(x-a)],$$

a tu zamieniwszy f na φ będzie:

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(x-a)\varphi'[a+\theta(x-a)] \text{ zkąd:}$$
$$\varphi(a)=\varphi(x)-(x-a)\varphi'[a+\theta(x-a)]\ldots\ldots(3).$$

Lecz $\varphi(x)$ jest to funkcja kształtu, jaki nam pokazuje wzór (1) gdzie $x=a$ czyli jest to funkcja

$$\varphi(x)=0,$$

dlatego też wzór (2) zamienia się na:

$$\varphi(a)=-(x-a)\varphi'[a+\theta(x-a)]\ldots\ldots(4)$$

Szukajmy teraz pochodnéj $\varphi'(a)$. Ze wzoru (2) mamy:

$$\varphi(a)=f(x)-f(a)\frac{x-a}{1}f'(a)-\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(x-a)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{(n-2)}(a)-\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a).$$

Biorąc pochodną téj funkcji, i przy różniczkowaniu uważając, że x jest ilością stałą, czyli pochodne $f(x)$ są zerami, otrzymamy:

$$\varphi'(a)=-\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a)\ (*)$$

Gdy za a weźmiemy $a+\theta(x-a)$,

---

*) $$d\frac{(x-a)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{(n-2)}(a):da=$$
$$=\frac{(x-a)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{(n-1)}(a)-\frac{(n-2)(x-a)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)(n-2)}f^{(n-2)}(a)$$
$$d\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a):da=$$
$$=\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a)-\frac{(n-1)(x-a)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)(n-1)}f^{(n-1)}(a),$$

po dodaniu podobnych funkcji, w których każden wyraz oprócz przedostatniego, znajduje sobie równy z przeciwnym znakiem, wypada $\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a)$.

to

$$\varphi'[a+\theta(x-a)]=-\frac{[x-a-\theta(x-a)]^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$$

czyli

$$\varphi'[a+\theta(x-a)]$$
$$=-\frac{(x-a-\theta x+a\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

lub

$$\varphi'[a+\theta(x-a)]$$
$$=-\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

a ztąd wzór (4) da:

$$\varphi(a)=\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

a tym sposobem wzór (2) zamieni się na:

$$(\beta)\ f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+$$
$$+\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}[a+\theta(x-a)],$$

a zaś gdy $a=0$,

$$(\alpha)\ f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{(1-\theta)^{n-1}x^{n}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x).$$

ROZDZIAŁ IX.

Twierdzenie Maclaurina i Taylora.

52. Jeżeli przy wartościach na x zawartych między pewnemi granicami, i przy wartościach na θ mniejszych od jedności, jedne z wyrażeń:

$$\frac{x^n}{1.2...n} f^{(n)}(\theta x).....(1),$$

$$\frac{x^n}{1.2...(n-1)}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x).....(2),$$

maleje nieskończenie, gdy n wzrasta, to przy $n=\infty$ w równaniu [A] lub (α), takowe zamieni się na szereg:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+...(3)$$

którego wyrazem głównym jest:

$$\frac{x^n}{1.2...n} f^{(n)}(0).$$

Szereg ten (3), który przy wartości na x zawartéj między danemi granicami jest zbieżnym, to jest przedstawia summę równą $f(x)$, stanowi *szereg Maclaurina.*

Ponieważ ułamek

$$\frac{x^n}{1.2...n}.....(*)$$

---

*) Łatwo jest okazać, że ułamek $\frac{x^n}{1.2...n}$ staje się zerem przy $n=\infty$. Uważajmy iloczyn:

$$m(n-m+1)=mn-m^2+m=\frac{4mn-4m^2+4m}{4}=$$

$$=\frac{4m-4m^2+4m+n^2+n+1-(n^2+n+1)}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{2}-\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)-m\right]^2.$$

znika przy wartości $n=\infty$, to widoczną jest rzeczą, że w przypadku, gdzie ilość

$$f^{(n)}(\theta x),$$

zachowuje wartość skończoną, gdy n nieskończenie

Widocznie iloczyn wzrasta, gdy i m wzrasta, a maleje, gdy m maleje. I tak gdy $m=1$,

$$m(n-m+1)=m, \text{ przy } m=2,$$
$$m(n-m+1)=2(n-1), \text{ gdy } m=3,$$
$$m(n-m+1)=3(n-2) \text{ i t. d.}$$

Lecz ponieważ pierwszy iloczyn mniejszy od drugiego, drugi od trzeciego i t. d., to tém bardziéj:

$$\begin{array}{l} n<2(n-1) \\ n<3(n-2) \\ n<4(n-3) \\ \vdots \qquad \vdots \\ n = n \\ \hline n^n<(1.2.3\ldots n)^2 \end{array}$$

czyli $n^{\frac{n}{2}}<(1.2.3\ldots n)$,

a ztąd $\dfrac{x^n}{1.2\ldots n}$

mniejsza jest od

$$\frac{x^n}{n^{\frac{n}{2}}}=\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

To zaś drugie wyrażenie jako ułamek w potędze n staje się coraz mniejszém, gdy n wzrasta, a więc tém bardziéj i ułamek:

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}$$

do zera się przybliża, gdy n wzrasta nieoznaczenie.

wzrasta, wyrażenie (1) do granicy zero się przybliża czyli szereg

$$f(0),\ \frac{x}{1}f'(0),\ \frac{x^2}{1.2}f''(0),\ \frac{x^3}{1.2.3}f'''(0),......$$

jest szeregiem zbieżnym, to jest sprawdza wzór (3).

53. **Przykłady.** Weźmy funkcje

1) e^x, $\cos x$, $\sin x$,

których pochodne rzędu n^{tego} są:

$$e^x,\ \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\ \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

a że te ostatnie pozostają skończone przy jakimkolwiek x, gdy n wzrasta, to podług twierdzenia Maclaurina mieć będziemy:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots..(4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots..(5)$$

$$\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots..(6)$$

We wzorze (4) podstawiwszy zamiast x iloczyn $xl(A)$, czyli uczyniwszy:

$$e^{xlA}=A^x,$$

będzie:

$$A^x=1+\frac{x}{1}lA+\frac{x^2}{1.2}(lA)^2+\frac{x^3}{1.2.3}(lA)^3+\ldots..(7).$$

Teraz rozbieżmy ten przypadek, w którym funkcja $f^{(n)}(\theta x)$ staje się nieskończoną wraz z n, a twierdzenie Maclaurina ma jednak miejsce.

I tak niech będzie:

2) $f(x)=l(1+x)$,

i że na zmienną x nadaje się wartość liczebna mniejsza od jedności, to znajdzie się

$$f^{(n)}(x)=\pm\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n};$$

a ponieważ stosunek

$$\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1+x)^n},$$

zawsze jest większy od iloczynu (str. 135)

$$\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^n}=\frac{1}{1+x}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{1+x}\right)^{n-1},$$

który zwiększa się nieoznaczenie wraz z n, to toż samo powiedzieć można o funkcjach $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(\theta x)$.

Wyrażenie zatém drugie stanie się:

$$\pm\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}=\pm\frac{x^n}{1-\theta}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\ldots\ldots(8),$$

a ponieważ ułamek:

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}=1-\frac{\theta(1+x)}{(1+\theta x)}\ldots\ldots(8),$$

jest liczbą mniejszą od jedności, to widoczną jest rzeczą, że wyrażenie (8) znika przy $n=\infty$. Dla wszelkich więc wartości na x zawartych między granicami -1, $+1$ mamy:

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots(9).$$

Jeżeli wartość liczebna zmiennéj x stanie się większą od jedności, wtedy wyraz główny szeregu

$$\frac{x}{1},-\frac{x^2}{2},\frac{x^3}{3},-\frac{x^4}{4},\ldots(10),$$

to jest:

$$\pm\frac{x^n}{n},$$

przybliżać się będzie przy wartościach wzrastających na n do granicy $\pm\infty$ a tém samém i szereg (10) będzie rozbieżnym.

Jeżeli we wzorze (9) przypuścimy, że $x=-1$ następnie $x=1$, to będzie:

$$l(0)=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\right)=-\infty,$$

$$l(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

Dajmy teraz, że

$$3)\ f(x)=\text{arc tang } x,$$

to podług znanego wzoru (w Nrze 47 przykład 5) wyrażenie (1) zamieni się na

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

$$=\mp\frac{x^n}{n}\,\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}+(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\ \ldots\ldots(11).$$

Niechaj p_n i q_n będą dwie ilości rzeczywiste, oznaczone przez równanie:

$$\frac{x^n}{n}(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}=p_n+q_n\sqrt{-1}\ \ldots\ldots(12),$$

to będzie widocznie:

$$\frac{x^n}{n}(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}=p_n-q_n\sqrt{-1}\ \ldots\ldots(13),$$

a następnie:

$$\frac{x^n}{n}\,\frac{(1-\theta x\sqrt{-1})^{-n}+(1+\theta x\sqrt{-1})^{-n}}{2}=p_n\ \ldots\ldots(14).$$

Ze wzoru (12) i (13) mamy:

$$\left(\frac{x^n}{n}\right)^2(1+\theta^2x^2)^{-n}=p_n{}^2+q_n{}^2,$$

lub

$$p_n{}^2+q_n{}^2=\frac{1}{n^2}\left(\frac{x^2}{1+\theta^2x^2}\right)^n\ \ldots\ldots(15).$$

Jeżeli nadamy na zmienną x wartość liczebną mniejszą od jedności, to wartość dwumianu (15) stanie się widocznie zerem przy $n=\infty$, a tém samém i wyrażenie (14). Będzie zatém:

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

Gdy wartość na x staje się większą od jedności, to ten szereg jest rozbieżnym, bowiem ułamek:

$$\frac{x^n}{n}.$$

przy wzrastającéj wartości na n przybliza się do ∞.

Rozwińmy teraz funkcją.

$$4)\quad f(x) = (1+x)^m,$$

gdzie m jest ilością stałą jakąkolwiek, pochodne takiéj funkcji są:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},\ldots\ldots$$

$$f^{(n-1)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+2)(1+x)^{m-n+1}$$

$$f^{(n)}(\theta x) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n},$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1),\ldots\ldots$$

$$f^{(n-1)}(0) = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2),$$

a następnie

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\,.\,2\ldots(n-1)}x^{n-1} +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}.$$

Dajmy najprzód, że wartość liczebna na x jest większa od jedności, to szereg powyższy będzie rozbieżnym. Mamy bowiem wyrażenie dwóch następnych wyrazów:

$$U_{p+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1\,.\,2\ldots p}x^p,$$

$$U_p = \frac{m(m-1)\dots(m-p+2)}{1.2\dots(p-1)} x^{p-1},$$

a ztąd:

$$\frac{U_{p+1}}{U_p} = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right)x.$$

Ponieważ ten stosunek, gdy p wzrasta, przybliża się do $-x$ a $x>1$, to szereg powyższy jest rozbieżnym.

Gdy przeciwnie $x<1$, to szereg wspomniony jest zbieżnym i ma za summę $(1+x)^m$.

Tutaj mogą być dwa przypadki:

1) jeżeli $x>0$, to wyrażenie (1) da

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} x^n(1+\theta x)^{m-n} \dots\dots(7),$$

czyli

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n \times \left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n-m}.$$

Gdy $i<n$ to pierwszy czynnik tego wyrażenia musi być przedstawiony w kształcie:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i} x^i \times \frac{m-i}{i+1} x \; \frac{m-i-1}{i+2} x \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots \frac{m-n+1}{n+1} x.$$

Te ostatnie czynniki przybliżają się do $-x$, a przyjąwszy i dość wielkie i gdy k jest liczbą dodatną mniejszą od jedności, lecz większą od x, to wartość na i można obrać taką, iżby każden z tych czynników był mniejszy jak k (bez względu na znak), a tém samém ich iloczyn będzie mniejszy jak k^{n-i}, czyli tak mały jak tylko chcemy. Iloczyn więc:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n$$

będzie tak mały jak tylko chcemy, gdy n wzrasta. Co się tyczy czynnika $\left(\frac{1}{1\theta+x}\right)^{n-m}$, ponieważ jego wykładnik staje się dodatnym, to również gdy n wzrasta, on przybliża się do zera, jeżeli θ, której wartość zależy od n, nie przybliża się nieoznaczenie do zera. Z tego wynika, że wyrażenie (17) czyli reszta szeregu (16) przybliża się zawsze do zera, skoro n wzrasta, czyli że summą tego szeregu jest $(1+x)^m$, gdy $x<1$ lecz dodatne.

2) Jeżeli wartość na x jest ujemna, wtedy uciekamy się do innego kształtu na resztę szeregu, a mianowicie bierzemy pod uwagę wyrażenie (2), które tutaj przedstawi nam wzór:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}x^n(1-\theta)^{n-1}(1\theta+x)^{m-n}.$$

Jeżeli przypuścimy, że $x=-z$, to otrzymamy w miejsce powyższego wyrażenia:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}z^n(1-\theta)^{n-1}\frac{(1-\theta z)^{m-1}}{(1-\theta z)^{n-1}},$$

lub

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}z^n\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}(1-\theta z)^{m-1}\ldots.(18),$$

pierwszy czynnik zbliża się również do zera, gdy n wzrasta, jak to wyżéj uważaliśmy.

Z innéj strony uważając, ponieważ $\frac{1-\theta}{1-\theta z}<1$, to témbardziéj $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}$ jest mniejsze od jedności.

Czynnik zaś $(1-\theta z)^{m-1}<1$, jeżeli $m-1$ jest dodatne a $<\frac{1}{(1-z)^{1-m}}$ jeżeli $m-1$ jest ujemne; w obu więc razach jest ilością skończoną. Wyrażenie zatém (18) może stać się mniejsze od każdéj danéj ilości, jeżeli n jest dość wielkie. Z tego wszystkiego wypada, że gdy x zawiera się między -1 i $+1$ to zawsze mamy przy jakimkolwiek m:

$$(1-x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

53. Przypuściwszy teraz, że przy wszystkich wartościach na x zawartych między $x=a$, $x=a+h$ i przy wartości liczebnéj θ mniejszéj od jedności jedno z wyrażeń

$$\frac{(x-a)^n}{1.2...n}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].....(19),$$

$$\frac{(x-a)^n}{1.2...(n-1)}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}[a+\theta(x-a)].....(20),$$

zmniejsza się nieoznaczenie, gdy n wzrasta, to przyjąwszy $n=\infty$ równanie $[B]$ i (β) Rozdział VIII, wyda:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+.....(21),$$

Uczyniwszy zaś $x=a+h$ będzie:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+,....$$

Nakoniec jeśli w tém równaniu, zamiast a, oznaczającego wartość szczególną x, napiszemy x, to otrzymany wzór

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x),+\frac{h^2}{1.2}f''(x).....$$

istnieć będzie zawsze, gdy funkcje

$$f(x+z),\ f'(x+z),\ f''(x+z)$$

są ciągłemi między granicami $z=0$ i $z=h$, a jeden z iloczynów

$$\frac{h^n}{1.2...n}f^{(n)}(x+\theta h),$$

$$\frac{h^n}{1.2...n}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h),$$

na jakie przeszły wyrażenia (19) i (20) zniknie przy $n=\infty$, szereg zaś zbieżny

$$f(x),\ \frac{h}{1}f'(x),\ \frac{h^2}{1.2}f''(x),\ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x),...$$

mający za wyraz główny

$$\frac{h^n}{1.2...n}f^n(x),$$

i którego summa wyrazów równa $f(x+h)$ stanowi tak nazwany *szereg Taylora.*

Przykład. Niech danemi funkcjami będą:

$$l(x),\ x^\mu$$

to gdy przyjmiemy $h<x$ wtedy będzie:

$$l(x+h)=lx+\frac{h}{x}-{}^1/_2\frac{h^2}{x^2}+{}^1/_3\frac{h^3}{x^3}.....$$

$$(x+h)^\mu=x^\mu+\frac{\mu}{1}x^{\mu-2}h+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^{\mu-1}h^2+$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^{\mu-3}h^3+.....$$

55. Widoczną jest rzeczą, że szeregi Maclaurina i Taylora zastosować się dają dla funkcji mających wartość urojoną. I tak niech będzie:

$$f(x)=\varphi(x)+\chi(x)\sqrt{-1},$$

$\varphi(x)$ i $\chi(x)$ oznaczają dwie funkcje rzeczywiste zmiennéj x. Jeżeli $\theta<1$, a jedno z wyrażeń:

$$\frac{x^n}{1.2...n}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

$$\frac{x^n}{1.2...(n-1)}(1-\theta)^{n-1}\varphi^{(n)}(\theta x),$$

sprowadzi się do zera przy wartości nieskończonéj na n, to będzie:

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+.....(22)$$

podobnież jeżeli jedno z wyrażeń

$$\frac{x^n}{1.2...n}\chi^{(n)}\theta(x),$$

$$\frac{x^n}{1.2...(n-1)}(1-\theta)^{n-1}\chi^{(n)}(\theta x),$$

niknie przy $n=\infty$ to znajdziemy:

$$\chi(x)=\chi(0)+\frac{x}{1}\chi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\chi''(0)+\ldots..(23)$$

Z wzorów zaś (22) i (23) wypada:

$$\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\chi(x)=\varphi(0)+\sqrt{-1}\chi(0)+$$

$$+\frac{x}{1}[\varphi'(0)+\sqrt{-1}\,\chi'(0)]+\frac{x^2}{1.2}[\varphi''(0)+\sqrt{-1}\,\chi''(0)]+\ldots.$$

Przykład. Jeżeli przypuścimy

$$1)\ f(x)=\cos x+\sqrt{-1}\sin x,$$

to otrzymamy:

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x=1+\frac{x}{1}\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1.2}-$$

$$-\frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots..$$

$$2)\ f(x)=e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx),$$

gdzie a i b oznaczają dwie stałe rzeczywiste, to

$$f'(x)=e^{ax}.a(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)+$$

$$+e^{ax}(-\sin bx+\sqrt{-1}\cos bx)b,$$

$$=e^{ax}(a\cos bx+a\sqrt{-1}\sin bx)+$$

$$+e^{ax}[\sin bx(\sqrt{-1})^2.b+b\sqrt{-1}\cos bx],$$

$$=e^{ax}[(a+b\sqrt{-1})\cos bx+(a+b\sqrt{-1})\sin bx\sqrt{-1}],$$

$$=(a+b\sqrt{-1})(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)e^{ax},$$

czyli

$$f'(x)=(a+b\sqrt{-1})f(x),$$

podobnież się znajdzie:

$$f''(x)=(a+b\sqrt{-1})f'(x)=(a+b\sqrt{-1})^2f(x)\text{ i t. d.}$$

$$f^{(n)}(x)=(a+b\sqrt{-1})^nf(x),$$

ztąd

$$f(0)=1,\ f'(0)=a+b\sqrt{-1},\ f''(0)=(a+b\sqrt{-1})^2, \ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(0)=(a+b\sqrt{-1})^n.$$

Wzór więc Taylora daje:

$$e^{ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)=$$

$$=1+\left(\frac{a+b\sqrt{-1}}{1}\right)x+\frac{(a+b\sqrt{-1})^2}{1.2}x^2+$$

$$+\frac{(a+b\sqrt{-1})^3}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots$$

Gdy $ax=p$, $bx=q$, to mamy:

$$e^p(\cos q+\sqrt{-1}\sin q)=$$

$$=1+\frac{p+q\sqrt{-1}}{1}+\frac{(p+q\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(p+q\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

ROZDZIAŁ X.

Różniczki funkcji wielu zmiennych. Pochodne częściowe, (partielles) różniczki częściowe.

Niech będzie:

$$u=f(x,y,z,\ldots\ldots)$$

funkcją zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots.$ Oznaczmy przez i przyrost nieskończenie mały nadany jednéj jakiejkolwiek zmiennéj, a przez

$$\varphi(x,y,z\ldots\ldots),\ \chi(x,y,z\ldots\ldots),\ \psi(x,y,z\ldots\ldots),\ldots\ldots$$

granice do których zbliżają się stosunki:

$$\frac{f(x+i,y,z\ldots)-f(x,y,z\ldots)}{i}$$

$$\frac{f(x,y+i,z\ldots)-f(x,y,z\ldots)}{i},\quad \frac{f(x,y,z+i,\ldots)-f(x,y,z\ldots)}{i}$$

wtedy gdy i przybliża się nieoznaczenie do zera. $\varphi(x,y,z\ldots)$ jest pochodną wyprowadzoną z funkcji $u=f(x,y,z\ldots)$, uważając tylko x za zmienną, zaś inne $y,z\ldots$ za stałe ilości, i ta téż pochodna nazywa się pochodną częściową dla u względem x. Podobnie

$$\chi(x,y,z\ldots),\ \psi(x,y,z\ldots),\ldots.$$

są pochodnemi częściowemi funkcji u względem zmiennych $y,z,\ldots$

Uważajmy teraz, że nadane są na zmienne $x,y,z,\ldots$. przyrostki jednoczesne $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ i niech $\triangle u$ będzie przyrostkiem jednoczesnym, odpowiednim funkcji u, tak iż mamy:

$$\triangle u=f(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\triangle z)-f(x,y,z\ldots)\ldots\ldots(1)$$

Jeżeli wartości na $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ są skończone, to i wartość na $\triangle u$ z równania (1) jest skończoną; jeżeli znów przeciwnie $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ są ilości nieskończenie małe, natenczas gdy przyrostki

$$\triangle x \triangle y \triangle z \ldots\ldots \triangle u$$

przybliżać się będą nieoznaczenie i jednocześnie do granicy zero, to ich stosunki przybliżać się mogą do granic skończonych, będących stosunkami granic tychże przyrostków. Przy powyższém założeniu, jeżeli chcemy otrzymać ilości lub wyrażenia algebraiczne mogące być uważane za różniczki zmiennych $x,y,z,\ldots$ lub funkcji u, a tém samém oznaczone przez $dx,dy,dz\ldots du$, potrzeba według tego co było powiedziane w 1 rozdziale, wybrać te ilości i te wyrażenia w taki sposób, iżby stosunki między niemi były dokładnie równe stosunkom granic wyżéj wspomnionych przyrostków.

Gdy zmienne $x,y,z,\ldots$ są niezależne, to i ich przyrostki odpowiednie $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ będą również zupełnie niezależne, otrzymamy więc różniczki $dx,dy,dz,\ldots$.

Co się tyczy różniczki du, takowa wyprowadza się na mocy następującego rozwiązania.

Gdy przybliżać będziemy do zera przyrostki

$$\triangle x, \triangle y, \triangle z, \ldots\ldots \triangle u,$$

to one widocznie staną się proporcjonalne do

$$dx, dy, dz, \ldots\ldots du,$$

$$\text{bowiem gran. } \frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{dx}{dy}.$$

Jeżeli więc oznaczymy przez α jeden z tych stosunków

$$\frac{\triangle x}{dx}, \frac{\triangle y}{dy}, \frac{\triangle z}{dz}, \ldots\ldots \frac{\triangle z}{du}, \ldots\ldots (2)$$

$$\text{np. } \frac{\triangle x}{dx}, = \alpha, \ldots\ldots (3)$$

to gdy α do granicy zero przybliżać się będzie, wtedy

$$\frac{du}{dx} = \text{gran. } \frac{\triangle u}{\triangle x},\ du = \text{gran. } \frac{\triangle u}{\frac{\triangle x}{dx}},$$

czyli

$$du = \text{gran. } \frac{\triangle u}{\alpha} \ldots\ldots (4)$$

Tym samym sposobem znajdzie się

$$dy = \text{gran. } \frac{\triangle y}{\alpha}, dz = \text{gran. } \frac{\triangle z}{\alpha} \ldots\ldots (5)$$

podług zaś założenia

$$dx = \frac{\triangle x}{\alpha} \ldots\ldots (6)$$

Skoro we wzór (4) podstawimy wartość na $\triangle u$ z równania (1), to będzie:

$$du = \text{gran. } \frac{f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z, \ldots) - f(x,y,z\ldots)}{\alpha} \ldots\ldots (7)$$

pozostaje tylko szukać granicy, do której zbliża się druga strona równania (7), gdy (przypuściwszy $\triangle x = \alpha dx$)

przybliżać będziemy α do granicy zero. W tym celu, jeżeli w funkcji

$$u=f(x,y,z,\ldots),$$

będziemy zwiększać jedne po drugiéj zmienne $x,y,z,\ldots$ o ilości $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ i t. d., to będzie podługwzoru st. 94

$$f(x+\triangle x,y,z,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)=\triangle x\varphi(x+\theta_1\triangle x,y,z,\ldots)$$

$$f(x+\triangle x,y+\triangle y,z,\ldots)-f(x+\triangle x,y,z,\ldots)=$$
$$=\triangle y\chi(x+\triangle x,y+\theta_2\triangle y,z,\ldots)$$

$$f(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\triangle z,\ldots)-f(x+\triangle x,y+\triangle y,z,\ldots)$$
$$=\triangle z\psi(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\theta_3\triangle z,\ldots)$$

i t. d.

$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots$ oznaczają liczby zawarte między zerem a jednością. Po dodaniu powyższych równań wypada:

$$(8)\ f(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\triangle z,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)=$$
$$=\triangle x\varphi(x+\theta\triangle x,y,z,\ldots)+\triangle y\chi(x+\triangle x,y+\theta_2\triangle y,z,\ldots)+$$
$$+\triangle z\psi(x+\triangle x,y+\triangle y,z+\theta_3\triangle z,\ldots)$$

dzieląc następnie przez α obiedwie strony równania (8), potém przybliżając α do granicy zero, ze względu na równanie (5), (6) i (7), będzie:

$$(9)\ du=\varphi(x,y,z,\ldots)dx+\chi(x,y,z,\ldots)dy+\psi(x,y,z,\ldots)dz+\ldots$$

Przykład.

1) Gdy $u=x+y+z$,

$$\varphi(x,y,z)=\frac{dx}{dx}=1,$$

$$\chi(x,y,z)=\frac{dy}{dy}=1,$$

$$\psi(x,y,z)=\frac{dz}{dz}=1,$$

zatém $du=dx+dy+dz$.

2) Podobnież się znajdzie:

$$d(x-y)=dx-dy.$$

3) $d(ax+by+cz)=adx+bdy+cdz.$

4) $d(x^a+y^b+z^c)=x^ay^bz^c\left(a\frac{dx}{x}+b\frac{dy}{y}+c\frac{dz}{z}\right)$.

5) $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$.

6) $dx^y=yx^{y-1}dx+x^yl(x)dy$.

57. Wiadomo nam już, że różniczka funkcji równa się różnicze zmiennéj, pomnożonéj przez funkcją pochodną; w równaniu zatém (9) wyrażenia

$$\varphi(x,y,z...)dx,\chi(x,y,z,...)dy,\psi(x,y,z,...)dz \text{ i t. d.}$$

są różniczkami funkcji, pierwsza względem saméj zmiennéj x, druga względem tylko y, trzecia uważając tylko z za zmienną i t. d., czyli są tak nazwanemi *różniczkami częściowemi* funkcji u względem zmiennych $x,y,z,...$ i dlatego można je oznaczać w następujący sposób:

$$d_xu,d_yu,d_zu,\ldots..$$

$$\text{zatém } \left.\begin{aligned} \varphi(x,y,z,...)&=\frac{d_xu}{dx}\\ \chi(x,y,z,...)&=\frac{d_yu}{dy}\\ \psi(x,y,z,...)&=\frac{d_zu}{dz}\end{aligned}\right\}(11).$$

Równanie więc (9) przedstawione być może w jednéj z następujących postaci:

$$du=d_xu+d_yu+d_zu+\ldots..(12)$$

$$du=\frac{d_xu}{dy}dx+\frac{d_yu}{dy}dy+\frac{d_zu}{dz}dz+\ldots..(13).$$

Często dla skrócenia opuszczają się głoski małe u dołu litery d napisanéj, lecz wtedy nie należy rozumieć wyrażeń:

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{du}{dz},\ldots..$$

za ilorazy z du przez dx, przez dy, przez dx,.... lecz trzeba uważać takowe za funkcje pochodne funkcji u względem zmiennéj x, względem zmiennéj y, względem zmiennéj z,.... Przy takiém znaczeniu równanie (13) zamieni się na następujące:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots\ldots (14)$$

58) Wskażemy tu sposób znalezienia różniczki zupełnéj du, który i w dalszym ciągu nauki będzie miał zastosowanie. Wiadomo nam, że wzór (7) będzie sprowadzony przy wartościach na

$$\triangle x = \alpha dx, \triangle y = \alpha dy, \triangle z = \alpha dz, \ldots (15),$$

gdy α jest ilością nieskończenie małą i taką, która znika wraz z $\triangle x, \triangle y, \triangle z, \ldots\ldots$, czyli mieć będziemy:

$$du = \text{gran.} \frac{f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\alpha} \quad (16).$$

Jeżeli w wyrażeniu $f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots)$ uważać będziemy α za samą zmienną i następnie uczynimy

$$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots) = F(\alpha) \ldots (17)$$

to będziemy mieli

$$u = F(0),$$
$$\triangle u = F(\alpha) - F(0),$$

a następnie

$$du = \text{gran.} \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = F'(0) \ldots (18).$$

Chcąc więc mieć różniczkę zupełną du, potrzeba znaleźć wartość szczególną pochodnéj funkcji $F(\alpha)$ wtedy, gdy $\alpha = 0$.

Użycie pochodnych cząstkowych w różniczkowaniu funkcji nierozwiniętych.

59. Niechaj

$$S=F(u,v,w,\ldots..)$$

będzie funkcją zmiennych $u,v,w,\ldots$ które są również funkcjami zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots.$

Jeżeli oznaczymy przez $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ przyrostki bezwzględne jednoczesne zmiennych $x,y,z,\ldots$ to związek pomiędzy odpowiedniemi im przyrostkami $\triangle u,\triangle v,\triangle w,\ldots$ ...$\triangle s$, funkcji $u,v,w,\ldots s$ wyrazi wzór:

$$\triangle s=F(u+\triangle u,v+\triangle v,w+\triangle w,\ldots)-F(u,v,w,\ldots) \quad (19).$$

Dajmy następnie, że

$$\varphi(u,v,w\ldots),\chi(u,v,w\ldots),\psi(u,v,w\ldots),\ldots$$

są pochodnemi częściowemi funkcji $F(u,v,w,\ldots)$ wziętemi pierwsza względem zmiennéj u, druga względem zmiennéj v, trzecia względem zmiennéj w, i t. d.

Ponieważ równanie (8) ma miejsce przy jakichkolwiek wartościach na zmienne $x,y,z,\ldots$ i ich przyrosty $\triangle x,\triangle y,\triangle z,\ldots$ to wstawiając zamiast $x,y,z,\ldots$ ilości $u,v,w,\ldots$ a zamiast f pisząc F będziemy mieli:

$$F(u+\triangle u,v+\triangle v,w+\triangle w,\ldots)-F(u,v\,w,\ldots)=$$
$$\triangle u\varphi(u+\theta_1\triangle u,v,w,\ldots)+\triangle v\chi(u+\triangle u,v+\theta_2\triangle u,w,\ldots)+$$
$$+\triangle w\psi(u+\triangle u,v+\triangle v,w+\theta_3\triangle w,\ldots) \quad (20).$$

W tém ostatniém równaniu $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\ldots$ są liczby mniejsze od jedności.

Jeżeli teraz przypuścimy, że

$$\triangle x=\alpha dx,\triangle y=\alpha dy,\triangle z=\alpha dz,\ldots \quad (21),$$

gdzie α ilość nieskończenie mała, to będzie na zasadzie wzoru (16).

$$du = \text{gran.}\frac{\triangle u}{\alpha},\ dv = \text{gran.}\frac{\triangle v}{\alpha},\ dw = \text{gran.}\frac{\triangle w}{\alpha},\ldots$$

$$ds = \text{gran.}\frac{\triangle s}{\alpha}.$$

Dzieląc następnie przez α obie strony równania (19) i przeszedłszy do granic wypada:

$$ds = \varphi(u,v,w,\ldots)du + \chi(u,v,w,\ldots)dv + \psi(u,v,w,\ldots)dw\ldots$$

Tutaj różniczki $du, dv, dw,\ldots$ nie są ilościami niezależnemi, ale owszem są to nowe funkcje zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$ połączonych w pewny sposób ze stałemi niezależnemi $dx, dy, dz,\ldots$

Równanie różniczkowe.

60. Niech r będzie drugą funkcją zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$ to jeżeli mamy

$$s = r \ldots\ldots (22)$$

wtedy

$$ds = dr \ldots\ldots (23).$$

W razie szczególnym, gdy r sprowadza się do zera lub do ilości stałéj c, to

$$s = 0 \text{ lub } s = c,\ dr = 0 \quad (24),$$

a zaś równanie (23) zamienia się na

$$ds = 0 \ldots\ldots (25).$$

Równanie (23) i (25) nazywają się *równaniami różniczkowemi.* Drugie z tych równań może być przedstawione w kształcie

$$\varphi(u,v,w,\ldots)du + \chi(u,v,w,\ldots)dv + \psi(u,v,w,\ldots)dw + \ldots = 0$$

i istnieje w tym nawet razie, gdy jedna jakakolwiek z ilości $u,v,w,\ldots$ sprowadzi się do jednéj jakiejkolwiek ze zmiennych niezależnych, $x,y,z,\ldots$

I tak np. gdy $F(x,v)=0$ to

$$\varphi(x,v)dx+\chi(x,v)dv=0,$$

a jeżeli $F(x,y,w)=0$, to

$$\varphi(x,y,w)dx+\chi(x,y,w)dy+\psi(x,y,w)dw=0 \text{ i t. d.}$$

W tych ostatnich równaniach v jest widocznie funkcją nierozwiniętą zmiennych x,y i t. d.

Podobnież gdy przypuścimy, że zmienne $x,y,z....$ przestają być niezależnemi, a związek między niemi wyraża równanie kształtu

$$f(x,y,z.....)=0 \quad (26),$$

to jak wiadomo będzie

$$\varphi(x,y,z,...)dx+\chi(x,y,z,...)dy+\psi(x,y,z,...)dz+...=0 \quad (27);$$

za pomocą tego równania można oznaczyć różniczkę jednéj ze zmiennych uważanéj jako funkcją nierozwiniętą wszystkich innych. I tak np. gdy

$$x^2+y^2=a^2,$$

to będzie $2xdx+2ydy=0$,

czyli $xdx+ydy=0$,

zkąd

$$dy=\frac{x}{y}dx.$$

Przypuściwszy teraz

$$y^2-x^2=a^2,$$

zkąd $ydy-xdx=0$,

$$dy=\frac{x}{y}dx.$$

Że zaś z równań danych wypada

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y=\pm\sqrt{a^2+x^2},$$

to $dy=d(\sqrt{a^2-x^2})=-\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

a w drugim razie

$$dy = d(\sqrt{a^2+x^2}) = \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Podobnież gdy

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

$$\text{to } xdx+ydy+zdz=0,$$

$$\text{zkąd } dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy.$$

Gdy oznaczymy $f(x,y,z...)$ przez u, to równanie (26) i (27) przyjmie kształt

$$u=0,\ du=0\ .....(28).$$

Jeżeli zaś związek między zmiennemi $x,y,z...$ zamiast wyrazić się przez jedno równanie kształtu $u=0$, wyraża się dwoma równaniami tegoż rodzaju jak np.

$$u=0,\ v=0,\ .....(29)$$

wtedy otrzymamy także dwa równania różniczkowe

$$du=0,\ dv=0\ ....(30),$$

za pomocą których można będzie oznaczyć różniczki dwóch zmiennych uważanych jako funkcje nierozwinięte wszystkich innych.

W ogólności jeżeli związek pomiędzy zmiennemi $x,y,z,....$ których liczba jest n, pokazuje m równań

$$u=0,\ v=0,\ w=0 \text{ i t. d.} \quad (31),$$

wtedy będzie w tym samym razie m równań różniczkowych

$$du=0,\ dv=0,\ dw=0 \text{ i t. d.} \quad (32),$$

za pomocą których można będzie oznaczyć różniczki m zmiennych, uważanych jako funkcje nierozwinięte wszystkich innych.

Twierdzenie funkcji jednorodnych.

61. Zasady powyższe posłużą nam do okazania ważnego twierdzenia, nazwanego *twierdzeniem funkcji jednorodnych.*

Mówimy, że funkcja wielu zmiennych jest jednorodną skoro mnożąc wszystkie zmienne, jakie ona zawiera przez jeden i ten sam czynnik, otrzymamy na wypadek wartość pierwiastkową funkcji mnożoną przez pewną potęgę tego czynnika. I tak funkcja $f(x,y,z....)$ jest funkcją jednorodną, gdy mamy:

$$f(tx,ty,tz...)=t^a f(x,y,z,...) \quad (33),$$

a jest stopniem funkcji.

Twierdzenie. *Jeżeli pomnożymy pochodne częściowe funkcji jednorodnéj stopnia a przez zmienne im odpowiednie, to summa tak odpowiednich iloczynów będzie równą iloczynowi wypadłemu z pomnożenia téjże funkcji przez a.*

Dowodzenie. $u=f(x,y,z,...)$ jest funkcją daną, a

$$\varphi(x,y,z....),\ \chi(x,y,z....),\ \psi(x,y,z....),...$$

jéj pochodne częściowe względem $x,y,z,...$ i t. d.

Jeżeli różniczkować będziemy obie strony równania (33) uważając t jako zmienną, będzie:

$$\varphi(tx,ty,tz,...)xdt+\chi(tx,ty,tz,...)ydt+\psi(tx,ty,tz,...)zdt$$
$$+\ldots\ldots=at^{a-1}f(x,y,z,...)dt.$$

Potém dzieląc przez dt, a następnie przypuściwszy $t=1$ będzie:

$$x\varphi(x,y,z,...)+y\chi(x,y,z,...)+z\psi(x,y,z,...)+...=af(x,y,z,..)(34)$$

lub co na jedno wychodzi:

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}+\ldots\ldots=au\ldots\ldots(35).$$

Wniosek. Dla funkcji jednorodnéj stopnia zero będzie:

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}+\ldots\ldots=0 \quad (36).$$

Przykłady. Jeżeli

$$u=1/_2(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy),$$

to na mocy równania (35)

$$(Ax+Fy+Ez)x+(Fx+By+Dz)y+(Ex+Dy+Cz)z=$$
$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy.$$

Przypuściwszy zaś

$$u=L\left(\frac{x}{y}\right),$$

gdzie stopień funkcji jest zero, to równanie (36) daje:

$$\frac{1}{y}x-\frac{x}{y^2}y=0.$$

ROZDZIAŁ XI.

Różniczki następne i pochodne różnych rzędów funkcji wielu zmiennych.

62. Niechaj będzie:

$$u=f(x,y,z,\ldots)$$

funkcją wielu zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$

Jeżeli różniczkować będziemy kilka po sobie razy tę funkcją względem wszystkich zmiennych, lub jednéj któréjkolwiek z nich, wtedy otrzymamy funkcje zwane *różniczkami następnemi zupełnemi lub częściowemi danéj funkcji.* Można nawet różniczkować raz względem jednéj zmiennéj, następnie względem innéj i t.d., a w każdym razie wypadek z jednego, dwóch, trzech i t. d. różniczkowań, zowie się *różniczką pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. rzędu*.

I tak różniczkując kilka razy względem wszystkich zmiennych, utworzą się różniczki zupełne:

$$du, ddu, dddu, ddddu, \ldots\ldots$$

$$\text{czyli } du, d^2u, d^3u, d^4u \text{ i t. d.}$$

Różniczkując zaś kilka razy względem jednéj zmiennéj np. x, otrzymamy różniczki częściowe:

$$d_xu, d_xd_xu, d_xd_xd_xu, d_xd_xd_xd_xu, \ldots\ldots$$

$$\text{lub } d_xu, d_x{}^2u, d_x{}^3u, d_x{}^4u \ldots\ldots$$

W ogólności gdy n jest liczbą całą, to różniczka zupełna rzędu n będzie d^nu, a odpowiednia częściowa względem jednéj ze zmiennych $x, y, z, \ldots$ będzie:

$$d^n_xu, d^n_yu, d^n_zu, \ldots\ldots$$

Gdy różniczkować będziemy dwa lub więcéj razy względem dwóch lub więcéj zmiennych, otrzymamy różniczki częściowe drugiego lub wyższych rzędów, mogące być oznaczone przez

$$d_xd_yu, d_yd_xu, d_xd_zu, \ldots\ldots d_xd_yd_zu \ldots\ldots$$

63. Łatwo tu jest okazać, że różniczki takie zachowują też same wartości, chociaż różniczkowanie w różnym porządku, ale zawsze względem tych samych zmiennych, wykonaném będzie np.

$$d_xd_yu = d_yd_xu \ldots\ldots \quad (1)$$

I tak niech $\triangle_xu$ jest przyrostkiem $f(x,y,z,\ldots)$, gdy tylko x o ilość nieskończenie małą αdx zwiększamy, to będzie:

$$\triangle_xu = f(x + \alpha dx, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots) \quad (2)$$

$$d_xu = \text{gran.} \frac{\triangle_xu}{\alpha}.$$

Uważając $d_y u$ jako nową funkcję, to przyrost téj funkcji względem jednéj tylko zmiennéj x wyrazi się przez:

$$\triangle_x d_y u = d_y(u + \triangle_x u) - d_y u = d_y \triangle_x u \quad (3)$$

dzieląc przez α wypada:

$$\frac{\triangle_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \triangle_x u}{\alpha} = d_y \frac{\triangle_x u}{\alpha}.$$

Przybliżając następnie α do granicy zero, otrzymamy równanie (1). Podobnie się znajdzie:

$$d_x d_z u = d_z d_x u, d_y d_z u = d_z d_y u, \ldots\ldots$$

Przykład. $u = \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y}$.

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \quad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy,$$

$$d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^a} dx dy.$$

Toż samo prawo da się zastosować i w tym przypadku, gdy różniczkowanie odbywa się więcéj jak względem dwóch zmiennych. I tak aby okazać, że:

$$d_x d_y d_z u = d_z d_y d_x u,$$

uważam że: $d_y d_z u = d_z d_y u$,

więc $d_x d_y d_z u = d_x d_z d_y u$,

następnie widzimy; że

$$d_x d_z u = d_z d_x u,$$

zatém $d_x d_y d_z u = d_z d_x d_y u$,

a ponieważ $d_x d_y u = d_y d_z u$,

to $d_x d_y d_z u = d_z d_y d_x u$.

64. To twierdzenie ma miejsce i w tym razie gdy względem każdéj zmiennéj więcéj jak jedno różniczkowanie się wykonywa. I tak jeżeli l, m, n są liczby całe i pokazu-

jące liczby różniczkowań względem zmiennéj $x,y,z,..$ to pisząc przez skrócenie, mieć będziemy:

$$d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = d_x^l d_z^n d_y^m \ldots u = d_y^m d_x^l d_z^n \ldots u = \ldots\ldots$$

65. Ponieważ z różniczkowań funkcji zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$ względem jednéj z nich otrzymujemy nową funkcją mnożoną przez stałe $dx,dy,dz,\ldots$ a że przy różniczkowaniu iloczynu ilości stałe pozostają niezmienione, to przy następnych różniczkowaniach l względem zmiennéj x, m względem zmiennéj y, n względem zmiennéj z, czynniki $dx,dy,dz,\ldots$ jako stałe będą w potęgach $l,m,n,\ldots$ tak więc różniczka

$$d_x^l d_y^m d_z^n \ldots\ldots u,$$

będzie iloczynem z nowéj funkcji zmiennych $x,y,z,\ldots$ przez wspomnione potęgi czynników $dx,dy,dz,\ldots$ Ta nowa funkcja nazywa się *pochodną częściową rzędu* $l+m+n$. Oznaczywszy ją przez $\omega(x,y,z,\ldots)$ będzie:

$$d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u = \omega(x,y,z,\ldots) dx^l\, dy^m\, dz^n \ldots\ldots (5)$$

a ztąd $$\omega(x,y,z,\ldots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \ldots u}{dx^l\, dy^m\, dz^n} \ldots\ldots (6)$$

66. Łatwo jest znaleźć różniczki następne zupełne $d^2u, d^3u,\ldots$ za pomocą różniczek następnych częściowych funkcji u lub jéj pochodnych częściowych. Wiemy już, że

$$du = d_xu + d_yu + d_zu + \ldots\ldots$$

zatém

$$d^2u = ddu = d_xdu + d_ydu + d_zdu + \ldots\ldots$$

zkąd $$d^2u = d_x(d_xu + d_yu + d_zu + \ldots) + d_y(d_xu + d_yu + d_zu + \ldots) + d_z(d_xu + d_yu + d_zu + \ldots)$$

czyli $$d^2u = d_x{}^2u + d_y{}^2u + d_z{}^2u + \ldots 2d_xd_yu + 2d_xd_zu + 2d_yd_zu + \ldots\ldots \quad (7)$$

lub co na jedno wychodzi

$$d^2u = \frac{d_x{}^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d_y{}^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d_z{}^2u}{dz^2}dz^2 + \ldots\ldots$$
$$2\frac{d_xd_yu}{dxdy}dxdy + 2\frac{d_xd_zu}{dxdz}dxdz + 2\frac{d_yd_zu}{dydz}dydz. \quad (8)$$

Podobnie łatwo znajdzie się d^3u, d^4u, i t. d.

Przykład.

$$d^2(xyz) = 2(xdydz + ydzdx + zdxdy)$$
$$d^3(xyz) = 6dxdydz.$$
$$d^2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$d^3(x^3 + y^3 + z^3) = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3).$$

Rozwiązanie pierwszego przykładu.

$$u = xyz.$$
$$d_xu = yzdx,\ d_x{}^2u = 0$$
$$d_yu = xzdy,\ d_y{}^2u = 0$$
$$d_zu = xydz,\ d_z{}^2u = 0$$
$$d_yd_xu = zdydx$$
$$d_zd_xu = ydzdx$$
$$d_yd_zu = xdydz,$$

zatém $d^2u = 2(xdydz + ydzdx + zdxdy)$.

66. Dla skrócenia opuszcza się zwykle w równaniu (6) i (8) litery u dołu znaku d położone, przez co druga strona równania (6) przyjmuje kształt:

$$\frac{d^{l+m+n}u}{dx^l\, dy^m\, dz^n} \ldots\ldots (9)$$

a pochodne częściowe drugiego rzędu wyrażą się przez:

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} \ldots\ldots \frac{d^2u}{dxdy}, \quad \frac{d^2u}{dxdz}, \quad \frac{d^2u}{dydz},$$

pochodne częściowe rzędu trzeciego przez

$$\frac{d^3u}{dx^3}, \quad \frac{d^3u}{dx^2dy}, \quad \frac{d^3u}{dxdydz}, \ldots\ldots$$

wartość zaś na d^2u będzie:

$$d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{d^2z}{dz^2}dz^2+\ldots$$
$$2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy+\frac{2d^2u}{dxdz}dxdz+\frac{2d^2u}{dydz}dydz+\ldots$$

Lecz niewolno znosić tu różniczek $dx,dy,dz,\ldots$ gdyż $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$ i t. p. nie oznaczają ilorazów z d^2u przez dx^2 lub przez $dxdy$ i t. p.

67. Jeżeli zamiast funkcji $u=f(x,y,z,\ldots)$ uważać będziemy następną:

$$s=F(u,v,w,\ldots..) \quad (11)$$

gdzie $u,v,w,\ldots$ są również funkcjami zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$, to podług znanych nam już zasad łatwo wyprowadzą się różniczki d^2s, d^3s, i t. d.

I tak:

$$\left.\begin{aligned} ds&=\frac{dF(u,v,w,\ldots)}{du}du+\frac{dF(u,v,w,\ldots)dv}{dv}+\\ &\quad+\frac{dF(u,v,w,\ldots)}{dw}dw+\ldots.\\ d^2s&=\frac{d^2F(u,v,w,\ldots)}{du^2}du^2+2\frac{d^2F(u,v,w,\ldots)}{dudv}dudv+\\ &\quad+\frac{dF(u,v,w,\ldots)}{du}d^2u \text{ i t. d. (*)}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Zpomiędzy równań jakie można wyprowadzić ze wzoru 12 należy, odróżnić te, które oznaczają różni-

---

*) Różniczka d^2s otrzymuje się, różniczkując ds. Przy różniczkowaniu zaś ds uważam każden wyraz złożony z dwóch czynników zmiennych jak np. $\frac{dF(u,v,w,\ldots)}{du}$ i dv, i jako iloczyn takowych różniczkuję.

czki funkcji s zmiennych $u,v,w,...$ będących również funkcjami linijnemi zmiennych niezależnych $x,y,z,...$ np. niech

$$u = ax + by + cz + \ldots\ldots k \quad (13)$$

gdzie $a,b,c,...k$, są ilości stałe.

Różniczka $du = adx + bdy + cdz + ...$ jest ilością stałą a ztąd różniczki $d^2u, d^3u,...$ są zerami; tak więc różniczki następne funkcji

$$F(u),\ F(u,v),\ F(u,v,w,),\ \text{i t. d.}$$

zachowują ten sam kształt, gdy $u,v,w,...$ są funkcjami linijnemi.

Sposoby ułatwiające wyszukiwanie różniczek zupełnych funkcji wielu zmiennych niezależnych.

68. Niechaj funkcją daną będzie

$$u = f(x,y,z,...),$$

a pochodnemi jéj częściowemi pierwszego rzędu odpowiednio do zmiennych $x,y,z,...$ będą

$$\varphi(x,y,z,...),\ \chi(x,y,z,...),\ \psi(x,y,z,...),...$$

Uczyniwszy jak powyżéj

$$F(\alpha) = f(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz,...) \quad (14)$$

a potém różniczkując obie strony równania tego względem zmiennéj α, wypadnie:

$$F'(\alpha) = \varphi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz,...)dx +$$
$$\chi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy + z + \alpha dz,...)dy +$$
$$\psi(x + \alpha dx,\ y + \alpha dy,\ z + \alpha dz,...)dz... \quad (15).$$

Gdy w tym ostatnim wzorze przypuścimy $\alpha = 0$, to

$$F'(0) = \varphi(x,y,z,...)dx + \chi(x,y,z,...)dy + \psi(x,y,z,...)dz$$
$$= du \quad (16).$$

Z porównania równań (14) i (15) wynika, że różniczkując względem α funkcję ilości zmiennych,

$$x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dy\ldots\ldots(17),$$

otrzymamy na pochodną, inną funkcję tychże zmiennych połączonych w pewny sposób ze stałemi dx, dy, dz... Z nowych zaś różniczkowań względem α, będą wypadać nowe funkcje tegoż samego rodzaju, to jest, wyrażenia (17) będą również ilościami zmiennemi, zawartemi nietylko w $F(\alpha)$ i w $F'(\alpha)$, lecz i w $F''(\alpha)$, $F'''(\alpha)$ i w ogólności w funkcji $F^{(n)}(\alpha)$ (n liczba całkowita).

Różnice zaś

$$F(\alpha)-F(0), F'(\alpha)-F'(\alpha), F''(0)-F''(0) \ldots F^{(n)}(\alpha)-F^{(n)}(0)\ldots$$

nie będą czém inném, jak tylko przyrostkami funkcji, $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$... które to ostatnie są funkcjami zmiennych niezależnych x, y, z,... Ponieważ

$$F(\alpha)=f(x+\alpha dx,\ y+\alpha dy,\ z+\alpha dz\ldots)$$

to $F(0)=f(x,y,z,\ldots)=u$

$$F'(0)=\text{gran.}\frac{F(\alpha)-F(0)}{\alpha}=\text{gran.}\frac{\triangle u}{\alpha}=du$$

$$F''(0)=\text{gran.}\frac{F'(\alpha)-F'(0)}{\alpha}=\text{gran.}\frac{\triangle du}{\alpha}=ddu=d^2u$$

$$F'''(0)=\text{gran.}\frac{F''(\alpha)-F''(0)}{\alpha}=\text{gran.}\frac{\triangle d^2u}{\alpha}=dd^2u=d^3u\ldots$$

i t. d.

$$F^{(n)}(0)=\text{gran.}\frac{F^{(n-1)}(\alpha)-F^{(n-1)}(0)}{\alpha}=$$

$$=\text{gran.}\frac{\triangle d^{(n-1)}u}{\alpha}=dd^{(n-1)}u=d^nu.$$

Mamy więc:

$$u=F(0),\ du=F'(0),\ d^2u=F''(0),\ d^3u=F'''(0)\ldots$$
$$d^nu=F^{(n)}(0).\quad (18).$$

Dla utworzenia zatém różniczek zupełnych

$$du = d^2u,\ d^3u, \ldots d^nu,$$

potrzeba wyrachować wartości szczególne jakie przyjmują funkcje pochodne

$$F'(\alpha),\ F''(\alpha),\ F'''(\alpha) \ldots\ldots\ F^{(n)}(\alpha),$$

w tym razie gdy zmienna α znika.

Wartości symboliczne różniczek zupełnych.

69. Jest jeszcze inny sposób ułatwiający wynalezienie różniczek zupełnych, oparty na wartościach symbolicznych. Wyrażeniem symboliczném, albo symbolem nazywamy w analizie każde połączenie algebraicznych znaków, które same przez się nie ma żadnego znaczenia, albo któremu nadaje się inną wartość, jak tę, którąby miało, gdyby zwyczajnie było uważane. Równaniami symbolicznemi nazywamy te równania, które literalnie wzięte, lub podług zwykle przyjętego sposobu oznaczenia dosłownie tłumaczone, albo nie dają żadnéj sprawdzającéj wartości, albo zupełnie żadnego nie mają znaczenia, lecz z których można otrzymać zadość czyniące wypadki, gdy albo same równania, lub symbole, które one zawierają podług pewnych zasad zmienimy lub zamienimy. Zastosowanie symbolicznych wyrażeń, albo równań służy często do skrócenia rachunku, lub przedstawienia w prostéj postaci zawiłe dość wypadki.

Między symbolicznemi wyrażeniami i równaniami najważniejsze miejsce zajmują te, które zwykle urojonemi wielkościami nazywamy.

70. Oznaczmy przez $a,b,c,\ldots$ ilości stałe, a przez

$l,m,n,\ldots p,q,r,\ldots$ liczby całe, to różniczka zupełna wyrażenia

$$ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots$$

będzie $d[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots] =$

$$d_x[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots] +$$
$$d_y[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots] +$$
$$d_z[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots] = \ldots$$
$$ad^{l+1}_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + ad^l_x d^{m+1}_y d^n_z \ldots\ldots u + ad^l_x d^m_y d^{n+1}_z \ldots\ldots u +$$
$$bd^{p+1}_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^{q+1}_y d^r_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^{r+1}_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots (13)$$

Podług więc tego wzoru wyprowadzamy następującą zasadę, że aby otrzymać różniczkę zupełną wyrażenia, należy pomnożyć przez d iloczyn z dwóch czynników $ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots$ i u przypuściwszy $d = d_x + d_y + d_z + \ldots\ldots$ a działając tak, jakby oznaczenia $d, d_x, d_y, d_z, \ldots$ przedstawiały prawdziwe ilości różne pomiędzy sobą; rozwinąć nowy iloczyn, pisząc zawsze czynniki $a, b, c, \ldots$ na pierwszém miejscu, zaś u na ostatniém, w końcu uważać, że oznaczenia $d_x d_y d_z$ przestają oznaczać przypuszczone wartości, lecz przyjmują napowrót swe pierwotne znaczenie.

W podobny sposób powyższą zasadę możemy zastosować dla wszystkich następnych różniczek.

Wzór (13) da się jeszcze zamienić na następujące wyrażenie symboliczne:

$$d[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots u + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots u + \ldots\ldots] =$$
$$[ad^l_x d^m_y d^n_z \ldots\ldots + bd^p_x d^q_y d^r_z \ldots\ldots +][d_x + d_y d_z \ldots\ldots] u \ldots\ldots (14)$$

Wzór ten stanie się dokładnym wtedy dopiero, gdy rozwinąwszy go podług zasad algebraicznego mnożenia, uważając $d_x, d_y, d_z, \ldots$ za ilości, powrócimy takowym znaczenie symboliczne.

Gdy do różniczkowania mieć będziemy wyrażenie:

$$d_x u + d_y u + d_z u + \ldots\ldots$$

to różniczkując kilka razy, raz poraz otrzymamy wartości na różniczki następne d^2u, $d^3u, \ldots$

$(d_x+d_y+d_z+\ldots)u, (d_x+d_y+d_z+\ldots), (d_x+d_y+d_z+\ldots)u,$
$(d_x+d_y+d_z+\ldots)(d_x+d_y+d_z+\ldots)(dx+dy+dz+\ldots)u$..itd.

lub pisząc przez skrócenie:

$$du=(d_x+d_y+d_z+\ldots)u$$
$$d^2u=(d_x+d_y+d_z+\ldots)^2u$$
$$d^3u=(d_x+d_y+d_z+\ldots)^3u \text{ i t. d.}$$

W ogólności gdy n oznacza całą jakąkolwiek:

$$d^nu=(d_x+d_y+d_z+\ldots)^nu.$$

71. Niechaj $s=F(u,v,w,\ldots)$ gdzie $u,v,w,\ldots$ są funkcjami zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$ to podług powyższego

$$d^ns=(d_x+d_y+d_z+\ldots)^ns.$$

Rozwinąwszy tę funkcją w przypuszczeniu, że u jest funkcją saméj zmiennéj x, v funkcją saméj zmiennéj y, w funkcją saméj zmiennéj z, i t. d. przechodzimy z tego szczególnego przypadku do ogólnego, kładąc

za $d_xu, d_x{}^2u, d_x{}^3u, \ldots du, d^2u, d^3u, \ldots$

za $d_yv, d_y{}^2v, d_y{}^3v, \ldots dv, d^2v, d^3v, \ldots$

za $d_zw, d_z{}^2w, d_z{}^3w, \ldots dw, d^2w, d^3w, \ldots$

t. j. znosząc $x,y,z,\ldots$ u dołu głoski d.

Przykłady.

1) $s=uv$,

$$d^n(uv)=ud_y^nv+\frac{n}{1}d_xud_y{}^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1.2}d_x{}^2ud_y{}^{n-2}v+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n}{1}d_yvd_x{}^{n-1}u+vd_x^nu,$$

$$d^n(uv)=ud^nv+\frac{n}{1}dud^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}d^2ud^{n-2}v+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{n}{1}dvd^{n-1}u+vd^nu.$$

$$2)\ s=\frac{e^{a^x}}{x},$$

$$d^n\left(\frac{e^{a^x}}{x}\right)=\frac{a^ne^{ax}}{x}\left(1-\frac{n}{ax}+\frac{n(n-1)}{a^2x^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots3\,.\,2\,.\,1}{a^nx^n}\right)dx^n.$$

ROZDZIAŁ XII.

Maxima i minima funkcji wielu zmiennych niezależnych.

72. Skoro funkcja wielu zmiennych niezależnych $x,y,z,\ldots$ przedstawia wartość szczególną lecz rzeczywistą, przewyższającą wszystkie wartości rzeczywiste sąsiednie, t. j. wszystkie te, które otrzymamy, zmieniając $x,y,z,\ldots$ o ilości bardzo małe, to ta wartość szczególna funkcji zowie się *maximum.*

Skoro wartość szczególna funkcji zmiennych niezależnych $x,y,z,..$ jest rzeczywistą i mniejszą od wszystkich wartości rzeczywistych sąsiednich, to przyjmuje nazwę *minimum.*

73. Wyszukiwanie maximum i minimum funkcji wielu zmiennych sprowadza się z łatwością do wyszu-

kiwania maximum i minimum funkcji jednéj zmiennéj. I tak dajmy, że

$$u=f(x,y,z,\ldots),$$

stanowi maximum przy pewnych wartościach szczególnych na zmienne $x,y,z,\ldots$, to nadając tym wartościom szczególnym przyrostki nieskończenie małe $\triangle x, \triangle y, \triangle z,\ldots$ (takie, iż wyrażenie:

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z,\ldots)$$

pozostanie rzeczywiste), będzie ciągle

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z,\ldots) < f(x,y,z,\ldots) \ldots\ldots(1)$$

Potém należy przyjąć:

$$\triangle x = \alpha dx, \triangle y = \alpha dy, \triangle z = \alpha dz,\ldots$$

gdzie $dx, dy, dz,\ldots$ mogą być ilości skończone jakiekolwiek, α zaś oznacza ilość dodatną lub ujemną, ale nieskończenie małą. Będzie na mocy powyższego przypuszczenia

$$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots) < f(x,y,z,\ldots) \ldots\ldots(2)$$

przy jakiéjkolwiek wartości na $dx, dy, dz,\ldots$ (takich jednak, aby pierwsza strona nierówności (2) była rzeczywistą).

Uczyniwszy dla skrócenia

$$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots) = F(\alpha) \ldots\ldots(3)$$

to wzór (2) przedstawi się w kształcie

$$F(\alpha) < F(0) \ldots\ldots(4).$$

Ponieważ ten wzór istnieć będzie przy jakimkolwiek znaku na α, to jeżeli α samo się tylko zmienia, funkcja $F(\alpha)$, uważana jako funkcja téj jednéj zmiennéj, stanie się zawsze maximum przy $\alpha=0$.

Poznajemy podobnież, że jeżeli $f(x,y,z\ldots)$ stanie się minimum przy wartościach szczególnych na $x,y,z,\ldots$, to wartość na $F(\alpha)$ będzie zawsze minimum przy $\alpha=0$.

Odwrotnie, gdy nadamy na $x,y,z,\ldots$ wartości takie, że $F(\alpha)$ stanie się maximum lub minimum przy $\alpha=0$, przy jakichkolwiek $dx,dy,dz,\ldots$. to te wartości wydadzą maximum lub minimum funkcji $f(x,y,z,\ldots)$.

Uważajmy teraz, że gdy obie funkcje $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ są ciągłemi względem α w pobliżu wartości szczególnéj $\alpha=0$, to ta wartość nie dostarczy ani maximum ani minimum dla pierwszéj funkcji, jeżeli drugiéj nie sprowadzi do zera, (Nr. 43), t. j.

$$F'(0)=0\ldots\ldots(5).$$

A że, jak wiadomo (Nr. 68),

$$F'(0)=du,\ldots\ldots(6),$$

to równanie (5) może być przedstawione w kształcie:

$$du=0,\ldots\ldots(7).$$

Nakoniec, ponieważ funkcje $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$ powstały z funkcji u i du przez wstawienie zamiast $x,y,z,\ldots$, $x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz,\ldots$ to widoczną jest rzeczą, że gdy te dwie pierwsze fnnkcje są przerwanemi względem α w pobliżu wartości szczególnéj $\alpha=0$, to dwa wyrażenia u i du uważane jako funkcje zmiennych $x,y,z,\ldots$ będą przerwanemi względem tych zmiennych w pobliżu ich wartości szczególnych (przy tych bowiem ostatnich $\alpha=0$).

Stosując te uwagi do tego co się powyżéj powiedziało, wnosimy, że te same wartości na $x,y,z,\ldots$. zdolne wydać maximum i minimum funkcji u, są takiemi, iż czynią funkcje u i du przerwanemi, lub takiemi, które sprawdzają równanie (7) przy jakichkolwiek stałych skończonych $dx,dy,dz,\ldots$

74. Zadanie. Znaleźć maximum i minimum funkcji wielu zmiennych niezależnych.

Rozwiązanie. Niech funkcją daną będzie:

$$u=f(x,y,z\ldots),$$

Należy najprzód szukać wartości na $x,y,z,...$ czyniących funkcją u lub du przerwaną, a do których to wartości należy policzyć i te, jakie wyprowadzają się z wzoru

$$du = \pm\infty \ldots\ldots (8).$$

Z drugiéj strony szukać wartości na $x,y,z,...$ sprawdzających równanie (7) przy jakichkolwiek stałych skończonych $dx,dy,dz,...$ To ostatnie wspomniane równanie może być przedstawione w kształcie:

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots\ldots = 0 \ldots\ldots (9)$$

i daje widocznie następne:

$$\frac{du}{dx} = 0,\ \frac{du}{dy} = 0,\ \frac{du}{dz} = 0, \ldots\ldots (10)$$

z których pierwsze otrzymuje się, przypuściwszy w równaniu (9) $dx=1, dy=0, dz=0,...$; drugie, przypuściwszy w témże równaniu $dx=0, dy=1, dz=0,...$; trzecie, przypuściwszy $dx=0, dy=0, dz=1,...$ i t. d. Tu jeszcze należy uważać, że liczba równań (10) jest równą liczbie nieznanych $x,y,z,...$, a zatém można dla tych nieznanych, tylko ograniczoną liczbę wartości wyprowadzić. W ogólności dajmy, że uważa się jeden tylko układ wartości na zmienne $x,y,z,...$ dostarczanych z pomocą powyższych wyszukiwań, to wartość odpowiednia funkcji $f(x,y,z,...)$ będzie maximum, jeżeli dla bardzo małych wartości na α i przy wartościach jakichkolwiek na $dx,dy,dz,...$, różnica

$$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, ...) - f(x,y,z,...),$$

będzie stale ujemną. Przeciwnie funkcja $f(x,y,z,...)$ stanie się minimum, jeżeli ta różnica jest stale dodatną. Lecz nakoniec, gdy ta różnica przechodzi z dodatnéj na ujemną, wtedy, gdy zmieniamy lub znak przy α, lub wartości na $dx, dy, dz,\ldots$, to odpowiednia wartość funkcji $f(x,y,z,\ldots)$ nie będzie już ani maximum, ani minimum.

Łatwo jest poznać korzyści, jakie może przedstawić uważanie różniczek zupełnych różnych rzędów w szukaniu maximum i minimum funkcji wielu zmiennych. I tak podług tego co się wyżéj powiedziało, aby pewne wartości zmienne niezależne $x,y,z,\ldots$ wydały maximum lub minimum funkcji

$$u=f(x,y,z,\ldots)$$

potrzeba, aby wartość odpowiednia

$$F(\alpha)=f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots\ldots)$$

stała się koniecznie maximum lub minimum przy wartości $\alpha=0$. Lecz $F(\alpha)$ stanie się widocznie maximum lub minimum przy $\alpha=0$, i przy jakichkolwiek wartościach na $dx, dy, dz,\ldots$, jeżeli przy wszelkich możliwych wartościach tych różniczek, pierwsza z ilości $F'(0), F''(0), F'''(0),\ldots$ która nie będzie zerem, odpowiada znakowi parzystemu (czyli jest pochodną rzędu parzystego) i zachowuje ciągle ten sam znak (Nr. 44). Nadto uważajmy, że funkcja $F(0)$ będzie maximum, jeżeli wspomniana pochodna, która nie znika, jest ciągle ujemną, a minimum, gdy dodatną. Jeżeli zaś pierwsza z ilości $F'(0), F''(0), F'''(0),\ldots$ która nie znika, odpowiada znakowi nieparzystemu, przy wszelkich wartościach możliwych na $dx, dy, dz,\ldots$ lub tylko przy wartościach szczególnych tych samych różniczek, albo też jeszcze, skoro ta ilość jest już dodatną, już ujemną, wtedy funkcja $F(0)$ nie może być ani maximum, ani minimum.

75. Uważając teraz, że

$$F(0)=u, F'(0)=du, F''(0)=d^2u \ldots (11) \text{ (patrz Nr. 67)}$$

to z powyższych uwag następujące wyprowadza się twierdzenie.

TWIERDZENIE I. *Niechaj będzie* $u=f(x,y,z,...)$ *funkcją daną zmiennych niezależnych* $x,y,z,...$

Aby wnieść, czy układ wartości na $x,y,z,...$ *sprawdzających wzory* (10) *wyda maximum lub minimum funkcji* u, *należy wynaleźć wartości na* $d^2u, d^3u,...$ *odpowiednie temu układowi, i będące widocznie wielomianami, w których niezależnych nie będzie więcéj jak różniczek* $dx, dy, dz,...$ *Niech*

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + \frac{d^nu}{dy^n}dy^n + \frac{n}{1}\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + ... (12)$$

będzie pierwszym z tych wielomianów, który nie znika, n *liczba cała, mogąca zależeć od wartości różniczek* $dx, dy, dz...$ *Jeżeli przy wszystkich wartościach możliwych na te różniczki,* n *jest parzyste a* d^nu *ilością dodatną, to założona wartość na* u *będzie minimum, zaś będzie maximum, gdy* n *również parzyste a* d^nu *ujemne. Nakoniec gdy* n *nie jest parzyste, a* d^nu *jest już dodatne, już ujemne, to wartość na* u *nie będzie ani minimum ani maximum.*

UWAGA. Twierdzenie poprzednie istnieje na mocy zasad wskazanych powyżéj we wszystkich razach, gdy funkcje $F(\alpha), F'(\alpha)...F^{(n)}(\alpha)$ są ciągłemi względem α w pobliżu wartości szczególnéj $\alpha=0$, lub co na jedno wychodzi we wszystkich razach, gdy $u, du, d^2u,... d^nu$, są ciągłemi względem zmiennych $x,y,z,...$ w pobliżu wartości szególnych nadanych na też zmienne.

WNIOSEK I. Aby zastosować to twierdzenie, tworzy się najprzód wartość wyrażenia:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \ldots\ldots + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \ldots (13)$$

podstawiając na $x,y,z,...$ wartości wyprowadzone z wzorów (10) w funkcje pochodne

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots\ldots \frac{d^2u}{dx.dy}, \ldots\ldots$$

Na wypadek otrzymamy zero, jeżeli wszystkie te pochodne znikną; w przeciwnym razie d^2u będzie funkcją jednorodną ilości niezależnych $dx,dy,dz,...$ i jeżeli zmienimy te ilości, to wyniknie:

albo różnica d^2u zachowa stale ten sam znak, nie znikając nigdy,

lub ona zniknie przy pewnych wartościach na $dx,dy,dz,...$ i przyjmie ten sam znak we wszystkich przypadkach, jak przestanie być zerem;

albo nakoniec będzie, jużto dodatną, już ujemną.

Wartość na u będzie zawsze maximum lub minimum w pierwszym razie, czasem w drugim, nigdy w trzecim. W drugim razie maximum lub minimum otrzyma się wtedy, jeżeli przy każdym z układów wartości na $dx,dy,dz,...$, sprawdzających równanie $d^2u=0$, pierwsza z różniczek $d^3u,d^4u,d^5u,...$ która nie znika, będzie zawsze porządku parzystego i opatrzona tym samym znakiem, co wartości d^2u różniące się od zera.

Wniosek II. Jeżeli podstawienie wartości nadanych na $x,y,z,...$ sprowadziło do zera wszystkie pochodne rzędu drugiego i trzeciego, to będziemy mieli $d^2u=0$, $d^3u=0$, należy więc uciec się do pierwszéj z różniczek $d^4u,d^5u,...$ która nie będzie równą zeru. Jeśli ta różniczka była rzędu nieparzystego, to nie będzie ani maximum, ani minimum; jeśli ona była rzędu parzystego lub kształtu:

$$d^{2m}u=\frac{d^{2m}u}{dx^{2m}}dx^{2m}+\frac{d^{2m}u}{dy^{2m}}dy^{2m}+....$$

$$....+\frac{2m}{1}\frac{d^{2m}u}{dx^{2m-1}dy}dx^{2m-1}dy+......(14),$$

to może być, albo:

że wspomniona różniczka zachowa stale ten sam znak, podczas tego, gdy zmieniać będziemy $dx,dy,dz,...$ nie znikając nigdy;

lub też zniknie przy pewnych wartościach na $dx,dy,dz,...$ i przyjmie ten sam znak w każdym razie, gdy ona przestanie być zerem;

lub będzie już dodatną, już ujemną.

Wartość na u będzie zawsze maximum lub minimum w pierwszym razie, czasem w drugim, nigdy w trzecim. Nadto aby wiedzieć w drugim razie, czy jest maximum, czy minimum, potrzeba dla każdego układu wartości na $dx,dy,dz,...$ sprawdzających równanie $d^{2m}=0$, szukać pomiędzy różniczkami rzędu wyższego od $2m$ takiéj, która pierwsza nie staje się zerem, następnie uważać, czy ta różniczka jest zawsze rzędu parzystego i opatrzona tym samym znakiem, co wartości na $d^{2m}u$ różniące się od zera.

Ważną jest rzeczą uważać, że gdy wartość na $d^{2m}u$ dana przez wzór (14) jest funkcją całkowitą, a tém samém ciągłą względem ilości $dx,dy,dz,...$ to nie będzie mogła przejść z dodatnéj na ujemną, gdy te ilości zmieniając się, nie staną się w tym czasie równemi zeru. Uważajmy nadto, że gdy ilość u była funkcją nierozwiniętą zmiennych $x,y,z,...$, lub jeżeli jakiekolwiek z tych zmiennych stały się funkcjami nierozwiniętemi wszystkich innych, to każda z ilości $du,d^2u,d^3u,...$ oznaczy się za pomocą jednego lub wielu równań różniczkowych w funkcji różniczek zmiennych niezależnych.

76. **Przykłady.** 1. Dajmy, że

$$u=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F\,....(15).$$

Funkcja u i jej różniczki pierwszego i drugiego rzędu, t.j.

$$du=2(Ax+By+D)dx+2(Bx+Cy+E)dy\ldots\ldots(16)$$

$$d^2u=2[Adx^2+2B.dx.dy+Cdy^2]\ldots\ldots(17)$$

pozostaną ciągłemi przy wartościach jakichkolwiek skończonych na $x,y,\ldots$ Nadto ponieważ d^2u będzie ilością stałą; to $d^3u,d^4u,\ldots$ znikną.

Z równania zaś (16) mamy:

$$Ax+By+D=0,\ Bx+Cy+E=0\ldots\ldots(18)$$

zkąd

$$x=\frac{BE-CD}{A.C-B^2},\ y=\frac{BD-AE}{AC-B^2}\ldots\ldots(19).$$

Z równania znów (17), mamy dodając i odejmując, $\frac{B^2}{A}dy^2$.

$$d^2u=\left(Adx^2+2Bdxdy+\frac{B^2}{A}dy^2+Cdy^2-\frac{B^2}{A}dy^2\right)$$

$$=2A\left(dx^2+2\frac{B}{A}dxdy+\frac{B^2}{A^2}dy^2+\frac{C}{A}dy^2-\frac{B^2}{A^2}dy^2\right),$$

zkąd

$$d^2u=2A\left\{\left(dx+\frac{B}{A}dy\right)^2+(AC-B^2)\left(\frac{1}{A}dy\right)^2\right\}\ldots\ldots(20).$$

Ten kształt bierzemy, gdy stała A nie jest zerem. W tém to przypuszczeniu widoczną jest rzeczą, że funkcja (15) przedstawi maximum lub minimum, gdy mamy

$$AC-B^2>0\ldots\ldots(21),$$

t. j. minimum w razie, gdy będzie:

$$A>0,\ AC-B^2>0\ldots\ldots(22),$$

a zaś maximum, gdy

$$A<0,\ AC-B^2>0\ldots\ldots(23).$$

I tak, równania (19) dadzą w obu razach wartości skończone i oznaczone na x i y; nadto, wyrażenie (20) pozostanie dodatne w pierwszym, ujemne w drugim przypadku, przy jakichkolwiek wartościach na $dx,dy,dz,\ldots$ Warunek (21) istnieje tylko wtedy, gdy A nie jest zerem.

Dajmy teraz, że stałe $A,B,C,$ sprawdzają warunek

$$AC-B^2<0 \ldots\ldots (24)$$

który przy $A=0$, daje

$$-B^2<0,$$

czyli

$$B^2>0. \quad (25)$$

Równania (19) dadzą jeszcze wartości skończone na x i y. Lecz wyrażenie (17) lub (20) zmieni znak wtedy, gdy zmieni się wartość różniczek dx,dy. I tak, gdy mamy:

$$A=0,\ B^2>0 \ldots\ldots (26),$$

to wyrażenie (17) sprowadzone do iloczynu:

$$2(2Bdx+Cdy)dy \ldots\ldots (27),$$

zmieni znak wraz z dx, skoro dy bardzo mało różni się od zera; i jeżeli mamy:

$$A^2>0,\ AC-B^2<0, \ldots\ldots (28),$$

to wyrażenie (20) przyjmie dwie wartości ze znakami przeciwnemi, gdy następnie po sobie przyjmować będziemy:

$$dx+\frac{B}{A}dy=0,\ dy^2>0 \ldots\ldots (29)$$

$$\left(dx+\frac{B}{A}dy\right)^2>0,\ dy>0 \ldots\ldots (30).$$

Wynika z tych uwag, że skoro warunek (24) jest wypełniony, to funkcja (15) nie będzie przedstawiać już ani maximum ani minimum.

Uważajmy teraz, że stałe $A,B,C,$ sprawdzają warunek

$$AC-B^2=0 \ldots\ldots (31).$$

Jeżeli nie mamy jednocześnie

$$\left.\begin{array}{l} BE-CD=0 \text{ i} \\ AE-BD=0 \end{array}\right\} (32),$$

to jedno z równań (19) wyda wartość nieskończoną na

x lub na y, a funkcja (15) nie przedstawi już ani maximum, ani minimum. Przeciwnie, jeżeli warunki (31) i (32) są wypełnione, to potrzeba odróżnić przypadek, gdzie będzie:

$$B^2 > 0 \ldots\ldots (33)$$

od tego, kiedy mamy:

$$B^2 = 0 \ldots\ldots (34).$$

W pierwszym razie wzory (31) i (33) dadzą:

$$AC > 0,\ A^2C^2 > 0 \ldots\ldots (35),$$

ztąd

$$A^2 > 0,\ C^2 > 0 \ldots\ldots (36),$$

a z równania (31) i (32) wyprowadzi się:

$$C = \frac{B^2}{A},\ E = \frac{B}{A} D \ldots\ldots (37),$$

a następnie z równania (15)

$$u = A\left(x + \frac{B}{A} y\right)^2 + 2D\left(x + \frac{B}{A} y\right) + F \ldots\ldots (38),$$

lub co na jedno wychodzi

$$u = A\left(x + \frac{B}{A} y + \frac{D}{A}\right)^2 + \frac{AF - D^2}{A} \ldots\ldots (39).$$

Przy takiém przypuszczeniu, wszystkie wartości na x i y sprawdzające wzór:

$$x + \frac{B}{A} y + \frac{D}{A} = 0 \ldots\ldots (40),$$

wydadzą wartości na funkcję u równe pomiędzy sobą i równe stosunkowi

$$\frac{AF - D^2}{A},$$

a z których każda może być uważaną, jako minimum, gdy $A > 0$, lub jako maximum, gdy $A < 0$.

Skoro warunek (34) będzie sprawdzony w tym samym czasie, co warunki (31) i (32) to trzy iloczyny

$$AC,\ AE,\ CD$$

zniknął, a ztąd koniecznie będzie, albo:

$$A=0,\ B=0,\ C=0\ldots\ldots(41),$$
$$u=2Dx+2Ey+F\ldots\ldots(42),$$

lub

$$A=0,\ B=0,\ D=0\ldots\ldots(43),$$
$$u=Cy^2+2Ey+F\ldots\ldots(44),$$

lub też:

$$B=0,\ C=0,\ E=0\ldots\ldots(45)$$
$$u=Ax^2+2Dx+F\ldots\ldots(46).$$

Lecz jasną jest rzeczą, że funkcja u oznaczona przez równanie (42), nie przedstawia ani maximum, ani minimum, wtedy, gdy funkcje (44) i 46) przedstawiają, pierwsza nieskończoną liczbę maximów lub minimów równych $\frac{CF-E^2}{C}$ i odpowiednich wartości skończonéj na y, a jakimkolwiek wartościom na x; druga nieskończoną liczbę maximów lub minimów równych $\frac{AF-D^2}{A}$ i odpowiednich wartości skończonéj na x, zaś jakimkolwiek wartościom na y.

2. Niech teraz daną funkcją będzie:

$$u=(cy-bz+l)^2+(az-cx+m)^2+(bx-ay+n)^2 \quad (47)$$

$a,b,c,l,m,n,$ z których trzy pierwsze różnią się od zera, są ilościami stałemi.

Równania (10) dadzą:

$$\frac{cy-bx+l}{a}=\frac{az-cx+m}{b}=\frac{bx-ay+n}{c}\ldots\ldots(48).$$

Potém każdemu z układów wartości na $x,y,z,$ sprawdzających równanie (48) odpowiadać będą wartości dodatne na d^2u, równe tym, jakie oznacza wzór:

$$d^2u=(cdy-bdz)^2+(adz-cdx)^2+(bdx-ady)^2\ldots(49).$$

Zatém wartości odpowiednie na u, które będą wszystkie równe pomiędzy sobą i równe stosunkowi

$$\frac{(al+bm+cn)^2}{a^2+b^2+c^2}\ldots\ldots(50)$$

mogą być uważane, jako przedstawiające każda minimum funkcji danéj.

ROZDZIAŁ XII.

Rozwinięcie funkcji wielu zmiennych. Rozciągnienie wzoru Taylora do takich funkcji.

77. Niechaj

$$u=f(x,y,z,\ldots)\ldots\ldots(1)$$

będzie funkcją wielu zmiennych niezależnych $x,y,z\ldots.$ i uczyńmy jak poprzednio (Nr. 68)

$$F(\alpha)=f(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z+\alpha dz,\ldots)\ldots..(2)$$

wtedy z wzoru (A) (Nr. 46) otrzymamy:

$$F(\alpha)=F(0)+\frac{\alpha}{1}F'(0)+\frac{\alpha^2}{1\,.\,2}F''(0)+\ldots..$$

$$\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1\,.\,2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{\alpha^n}{1\,.\,2\ldots n}F^{(n)}(\theta\alpha)\ldots\ldots(3),$$

gdzie θ mniejsze od 1,

$$F(\alpha),F'(\alpha),F''(\alpha)\ldots\ldots F^{(n)}(\alpha)\ldots\ldots(4)$$

są funkcjami $x,y,z,\ldots$ i α, zawierającemi same ilości zmienne

$$x+\alpha dx,y+\alpha dy,z+\alpha dz,\ldots\ldots(5)$$

i sprowadzającemi się przy $\alpha=0$ do

$$F(0)=u,F'(0)=du,F''(0)=d^2u,\ldots..F^{(n)}(0)=d^nu\ldots\ldots(6).$$

Aby więc wyprowadzić z różniczki zupełnéj $d^n u$ wartości na $F^{(n)}(\alpha)$ i na $F^{(n)}(\theta\alpha)$, potrzeba wstawić w tę różniczkę zamiast zmiennych $x,y,z,\ldots$ wyrażenia (5) lub następne:

$$x+\theta\alpha dx, y+\theta\alpha dy, z+\theta\alpha dz, \ldots\ldots (7).$$

Jeżeli dla skrócenia oznaczymy przez D_n tak otrzymaną wartość na $F^{(n)}(\theta\alpha)$, to równanie (3) w połączeniu z (2) i (6) da:

$$f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz\ldots)=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}D_n\ldots\ldots(8).$$

Jeżeli zatém nadamy na zmienne $x,y,z,\ldots$ przyrostki:

$$\triangle x=\alpha dx, \triangle y=\alpha dy, \triangle z=\alpha dz, \ldots\ldots(9)$$

to przyrostek odpowiedni funkcji

$$u=f(x,y,z,\ldots), \text{ t. j.}$$

$$\triangle u=f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz, \ldots\ldots)-f(x,y,z\ldots)=$$
$$=f(x+\alpha dx, y+\alpha dy, z+\alpha dz\ldots)-u\ldots\ldots(10),$$

może być rozwinięty podług potęg wzrastających α za pomocą wzoru:

$$\triangle u=\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1.2}d^2u+\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}d^{n-1}u+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}D_n\ldots\ldots(11).$$

Jeżeli przyjmiemy $n=1$, wtedy czyniąc

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx}=\varphi(x,y,z\ldots), \\[2ex] \dfrac{du}{dy}=\chi(x,y,z\ldots), \\[2ex] \dfrac{du}{dz}=\psi(x,y,z\ldots), \text{ i t. d.} \end{array}\right\} (12),$$

znajdzie się

$du=\varphi(x,y,z,...)dx+\chi(x,y,z,...)dy+\psi(x,y,z,...)dz+$ i t.d.(13),

zaś dwa wzory (8) i (11) dadzą:

$$f(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z+\alpha dz,...)=u+\alpha D_1\ldots..(14),$$

$$\triangle u=\alpha D_1\ldots..(15).$$

D_1 jest wielomian, na który zamienia się druga strona równania (13) gdy za $x,y,z,...$ wstawiamy

$$x+\theta\alpha dx,y+\theta\alpha dy,z+\theta\alpha dz,....$$

Skoro we wzorze (8) iloczyn

$$\frac{\alpha^n}{1\,.\,2...n}D_n\ldots..(16),$$

maleje nieoznaczenie przy wartościach wzrastających na n, to gdy przypuścimy $n=\infty$, to wyprowadzi się z tego wzoru

$$f(x+\alpha dx,y+\alpha dy,z+\alpha dz,...)$$

$$=u+\frac{\alpha}{1}du+\frac{\alpha^2}{1\,.\,2}d^2u+\ldots..(17).$$

Uważajmy teraz, że $\alpha=1$, to przyrostki $\triangle x,\triangle y,\triangle z,...$ zmiennych niezależnych $x,y,z,...$ sprowadzą się do ich różniczek $dx,dy,dz,...$ a z wzorów (8) i (11) wyprowadzi się

$$f(x+dx,y+dy,z+dz,.....)$$

$$=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1\,.\,2}+....+\frac{d^{n-1}u}{1.2...(n-1)}+\frac{D_n}{1.2...n}\ldots..(18)$$

$$\triangle u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+....+\frac{d^{n-1}u}{1.2...(n-1)}+\frac{D^n}{1.2...n}\ldots...(19).$$

D_n stanowi różniczkę zupełną d^nu, gdy zamiast $x,y,z,...$ wstawimy $x+\theta dx,y+\theta dy,z+\theta dz,...$

Jeżeli $n=1$, to

$$f(x+dx,y+dy,z+dz,...)=$$

$$f(x,y,z,...)+\varphi(x+\theta dx,y+\theta dy,z+\theta dz,...)dx+$$

$$(x+\theta dx,y+\theta dy,z+\theta dz,...)dy+\psi(x+\theta dx,y+\theta dy,$$

$$z+\theta dz,...)dz.$$

Skoro D_n przy wartościach wzrastających na n przybliża się nieoznaczenie do zera, to wzory (18) i (19) zamienią się na:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz, ...) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + ... (21),$$

$$\Delta u = \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + ... (22).$$

Równanie (21) i to, które z niego się wyprowadza, służą do rozciągnięcia twierdzenia Taylora i Maclaurina do funkcji wielu zmiennych, gdy za $x, y, z, ...$ wstawimy zero, a za $dx, dy, dz, ...$, zmienne $x, y, z, ...$

ZASTOSOWANIA

JEOMETRYCZNE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO.

ROZDZIAŁ I.

Równania stycznéj i normalnéj. Długości linji podstycznéj, podnormalnéj i t. p. O wypukłości i wklęsłości krzywych.

Równania stycznéj i normalnéj.

78. Niech $f(x,y)=0$ będzie równaniem krzywéj płaskiéj AMM' (fig. 16), i niech x i y będą współrzędnemi jakiegokolwiek punktu M na téj krzywéj. Przypuściwszy, że one są prostopadłe, to jeżeli MT jest styczną w punkcie M wtedy będzie:

$$\text{tang } MTX = \text{gran.} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx},$$

oznaczywszy więc przez X i Y współrzędne zmienne jakiegokolwiek punktu stycznéj, to równaniem téj prostéj będzie:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Jeżeli zamiast $\frac{dy}{dx}$ podstawimy jego wartość wyprowadzoną z równania krzywéj, to równanie stycznéj stanie się

$$Y-y=-\frac{\frac{df(x,y)}{dx}}{\frac{df(x,y)}{dy}}(X-x),$$

lub

$$\frac{df(x,y)}{dx}(X-x)+\frac{df(x,y)}{dy}(Y-y)=0\ldots\ldots(1).$$

79. Równanie stycznéj zachowuje ten sam kształt, gdy osie są pochyłe. I tak, jeżeli x i y są współrzędnemi punktu styczności M (fig. 17), stycznéj MT do krzywéj AMM', to równanie téj stycznéj będzie kształtu

$$Y-y=a(X-x).$$

Lecz równaniem siecznéj $M'MS$ jest

$$Y-y=a'(X-x),$$

gdzie a jest granicą a', wtedy gdy punkt M' schodzi się z punktem M.

Poprowadźmy MP i $M'P'$ równoległe od OY i MQ równoległą od OX, a będzie

$$\frac{M'Q}{MQ}=a'.$$

Lecz

$$M'Q=\triangle y,\ MQ=\triangle x,$$

więc

$$a'=\frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Ztąd wynika, że

$$\text{gran.}\frac{\triangle y}{\triangle x}=a=\frac{dy}{dx},$$

Tabl. I.