

MIECZYŚLAW WARMUS

**TABLICE
FUNKCJI ELEMENTARNYCH**

**TABLES
OF ELEMENTARY FUNCTIONS**



$\prod p_i$	
i	$\arctg x$
$\frac{1}{x}$	
$x^{\circ, ''}$	$\rightarrow \text{rad}$
$\log_{10} x$	
	$\text{rad} \rightarrow ^{\circ, ''}$
10^x	
	$\sin x^{\circ}$
	$\cos x^{\circ}$
x^2	
	$\arcsin x$
\sqrt{x}	
	$\arccos x$
x^3	
	$\sin x^r$
$\sqrt[3]{x}$	
	$\arcsin x^r$
e^x	
	$\cos x^r$
e^{-x}	
	$\arccos x^r$
$\log_e x$	
	$\tg x^{\circ}$
	$\ctg x^{\circ}$
$\sinh x$	
	$\text{arctg} x$
$\text{ar sinh} x$	
	$\text{arc}^{\circ} \ctg x$
$\cosh x$	
	$\tg x^r$
$\text{ar cosh} x$	
	$\text{arc}^r \tg x$
$\tgh x$	
	$\ctg x^r$
$\text{artgh} x$	
	$\text{arc}^r \ctg x$
$\ctgh x$	
	const

TABLICE
FUNKCJI ELEMENTARNYCH

TABLES
OF ELEMENTARY FUNCTIONS

MIECZYŚLAW WARMUS

TABLICE
FUNKCJI ELEMENTARNYCH

TABLES
OF ELEMENTARY FUNCTIONS



WARSZAWA 1960

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Obwolutę projektował
JERZY CHERKA

*

COPYRIGHT, 1960, by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (POLAND) Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any
form, by mimeograph or any other means, without permission in
writing from the publishers



Redaktor
ROMAN MALESINSKI

*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Wydanie I. Nakład 6500 + 150 egz., ark. wyd. 52,5. Ark. druk. 72 + 1¼.
Papier druk. sat. III kl. 80 g. Oddano do składania w marcu 1959 r. Pod-
pisano do druk w październiku 1960. Druk ukończono w listopadzie. Zam. 503.
C-73. Cena zł 90.

WOJSKOWE ZAKŁADY GRAFICZNE — WARSZAWA

144-8-61k

PRZEDMOWA

Od tablic matematycznych, a zwłaszcza tablic tzw. funkcji elementarnych jako najczęściej używanych, żąda się, by z ich pomocą można było otrzymywać wartości funkcji w możliwie prosty sposób i w możliwie krótkim czasie. Gdy żądana dokładność wynosi nie mniej niż 5 cyfr dziesiętnych i trzeba korzystać z interpolacji, sprawa odpowiedniej konstrukcji tablic staje się ważna i decyduje w dużej mierze o ich przydatności i powodzeniu. Tablice niniejsze zostały sporządzone właśnie tak, by możliwie uprościć korzystanie z nich. W tym celu wykonano je zgodnie z następującymi założeniami:

- 1° wszystkie tablice mają jednolity i przejrzysty układ;
- 2° interpolacja jest jedynie liniowa;
- 3° wszędzie, gdzie jest potrzebna interpolacja, są podane różnice;
- 4° różnice są co najwyżej trzycyfrowe;
- 5° przez podanie osobnych tablic dla funkcji odwrotnych unika się całkowicie interpolacji odwrotnej;
- 6° przez podanie tablic funkcji trygonometrycznych i — odwrotnych do nich — funkcji kołowych dla kątów zarówno w radianach, jak i w stopniach, minutach i sekundach, unika się przeliczania kątów z jednych jednostek na drugie;
- 7° w otoczeniu punktów osobliwych przez zmniejszanie skoku argumentu interpolacja liniowa jest doprowadzona aż do argumentów pięciocyfrowych w przypadku tablic pięciocyfrowych, a do argumentów sześciocyfrowych w przypadku tablic sześciocyfrowych; niezależnie od tego są podane wzory asymptotyczne;
- 8° na każdej stronicy podane są oszacowania błędów przybliżeń podanych w tablicach oraz przybliżeń, które mogą być otrzymywane przez interpolację liniową;

FOREWORD

It is expected of mathematical tables, particularly those containing the so called elementary functions, most frequently used, that they should enable us to obtain the value of a function in a way as simple and speedy as possible. If the required accuracy is not less than five decimal places and it is necessary to use interpolation, the problem of a proper structure of the tables becomes important and determines the usefulness and popularity of the tables to a large extent. The present tables have been constructed so as to make handling of them as easy as possible. For this purpose the following rules have been observed:

- 1° all the tables have a uniform and clear arrangement;
- 2° there is only linear interpolation;
- 3° wherever interpolation is needed; the differences are given;
- 4° the differences are at most three-digit numbers,
- 5° by the inclusion of separate tables for inverse functions inverse interpolation is entirely avoided;
- 6° by the inclusion of the tables of trigonometric functions and their inverse circular functions for angles both in radians and in degrees, minutes and seconds, the conversion of one kind of units into the other is avoided;
- 7° in the neighbourhood of singular points, by the reduction of the class-interval length of the argument linear interpolation is brought up to five-digit arguments in the case of five-digit tables and up to six-digit arguments in the case of six-digit tables; asymptotic formulas are given independently;
- 8° every page contains estimates of the errors of the approximations given in the table and of those which may be obtained by linear interpolation;

9° przykłady interpolacji są podane dla każdej tablicy.

Aby zrealizować powyższe warunki, musiano obliczyć wiele pozycji na nowo. W ten sposób ponad połowa wszystkich pozycji zamieszczonych w niniejszych tablicach została na nowo obliczona. Gdy nie było możliwości porównania wyników z już istniejącymi, wykonywano obliczenia dwiema lub nawet trzema oddzielnymi metodami. Przy korekcie trzymano się zasady porównywania poszczególnych pozycji z co najmniej dwiema innymi niezależnie obliczonymi. Ponadto sprawdzono wszystkie pozycje przy pomocy różnic. W ten sposób znacznie zredukowano prawdopodobieństwo błędnej pozycji w tablicach.

W niniejszych tablicach należy interpolować według wzoru

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} \delta,$$

gdzie $x_0 < x < x_0 + h$, h jest skokiem argumentu, a $\delta = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Należy tu jednak pamiętać, że liczby δ są w tablicach podane w jednostkach ostatniego miejsca dziesiętnego. W przykładach interpolacji (dołączonych do każdej tablicy oddzielnie) podano dwie metody przeprowadzania interpolacji: z pomocą tablic poprawek i bez ich pomocy. Należy jeszcze zauważyć, że w tablicach funkcji trygonometrycznych dla argumentów podanych w stopniach, minutach i sekundach (tablice XXII i XXIX) liczby δ zostały obliczone według innego wzoru, mianowicie:

$$\delta = \frac{5}{3} [f(x_0 + h) - f(x_0)],$$

z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych (błąd tego przybliżenia został doliczony do błędu interpolacji). Pozwala to na obliczanie poprawki $\frac{x-x_0}{h} \delta$ bezpośrednio dla $x-x_0$ obliczonego w sekundach, gdyż w tablicach tych jest $h = 1' = 60''$ i wzór interpolacyjny można napisać wtedy w postaci:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{(x-x_0)''}{60''} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \\ &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)''}{100''} \cdot \frac{5}{3} [f(x_0 + h) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Błędy interpolacji B dla funkcji $f(x)$ były na ogół szacowane według znanego wzoru: $B < \frac{1}{8} M_2 h^2$, przy czym h jest skokiem argumentu, a $M_2 = \max |f''(\xi)|$ dla $x_0 < \xi < x_0 + h$. W wielu jednak przypadkach, gdy błędy inter-

9° examples of interpolation are given for every table.

In order to satisfy the above conditions it has been necessary to make a considerable amount of fresh calculation. Thus more than half of the items contained in the tables have been calculated anew. Wherever it has been impossible to compare the new results with the already existing ones, the calculations have been carried out by two or even three separate methods. In correcting the manuscript the principle has been to compare each item with at least two others calculated independently. Moreover, all the items have been checked by means of differences. The probability of an erroneous item in the tables has been greatly reduced.

In these tables interpolation should be performed according to the formula

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} \delta,$$

where $x_0 < x < x_0 + h$, h is the length of the class-interval of the argument and $\delta = f(x_0 + h) - f(x_0)$. It should be remembered, however, that numbers δ in the tables are given in the units of the last decimal place. In the examples of interpolation (added to each table separately) two methods of interpolating are given: with and without the aid of the tables of proportional parts. It will also be observed that in the tables of trigonometric functions for arguments given in degrees, minutes and seconds (tables XXII and XXIX) numbers δ have been calculated according to a different formula:

$$\delta = \frac{5}{3} [f(x_0 + h) - f(x_0)],$$

correct to three decimal places (the error of this approximation has been joined to the interpolation error). This permits the finding of the correction $\frac{x-x_0}{h} \delta$ directly for $x-x_0$ calculated in seconds since in these tables we have $h = 1' = 60''$ and the interpolation formula can be given in the form

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{(x-x_0)''}{60''} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \\ &= f(x_0) + \frac{(x-x_0)''}{100''} \cdot \frac{5}{3} [f(x_0 + h) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

The errors of interpolation B for the function $f(x)$ have generally been estimated according to the known formula $B < \frac{1}{8} M_2 h^2$ where h is the class-interval length of the argument and $M_2 = \max |f''(\xi)|$ for $x_0 < \xi < x_0 + h$. However, in a

polacji były duże, a wartości funkcji znane z większą dokładnością niż to podano w niniejszych tablicach, stosowano różne, bardziej precyzyjne metody szacowania błędów. Wszystkie szacowania były parokrotnie sprawdzane.

W wydawnictwie niniejszym nie umieszczono tradycyjnych tablic logarytmów funkcji trygonometrycznych. Tablice takie spowodowałyby znaczne powiększenie objętości pracy, a obecnie, gdy przeciętny rachmistrz dysponuje co najmniej arytmometrem, są już raczej rzadko potrzebne.

W obliczeniach, kontrolach i korektach pomagali mi: p. M. Marchocka, p. M. Kusiakowa i inni. Składam im na tym miejscu podziękowanie. Specjalne podziękowanie jestem winien mojej Matce i mojej Żonie, które sporządziły maszynopis pracy, obliczały różnice i pomagały mi bardzo wydatnie w kontrolach i korektach.

Dziękuję również Państwowemu Wydawnictwu Naukowemu za staranne wydanie niniejszej pracy.

MIECZYSLAW WARMUS

Wrocław, styczeń 1958

large number of cases, where the errors of interpolation have been great and the values of the functions known with a greater accuracy than that given in these tables, various more precise methods of estimating errors have been used. All the estimates have been checked several times.

The present publication does not include the traditional tables of logarithms of trigonometric functions. Such tables would considerably increase the bulk of the book, and since an average calculator nowadays has at least an arithmometer at his disposal, they are but seldom needed.

In calculating, checking and correcting I have been assisted by Mrs. M. Marchocka, Mrs. M. Kusiakowa and others. I wish to thank them all. I am particularly indebted to my Mother and my Wife, who have prepared the typescript, calculated the differences and helped me considerably with the checking and correcting.

I also thank the State Scientific Publishing House for the careful preparation of this work.

MIECZYSLAW WARMUS

Wrocław, January 1958