

punktowi o współrzędnej $\xi=2,5$ cm, przyporządkować średnią wartość kątów $x=30^\circ$. W ten sposób konstrukcja szukanej skali, a więc także postać funkcji (8), zostanie jednoznacznie ustalona. Rysunek 30 przedstawia rozwiązanie konstrukcyjne postawionego zagadnienia. Widzimy, że skala uzyskana na rysunku 30 jest bliższa skali regularnej niż odpowiadająca jej skala $\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ na rysunku 29.

Rzutowe przekształcenie skal funkcyjnych w celu zbliżenia ich do regularności odgrywa ważną rolę w *nomografii*, o której będziemy mówili w osobnym rozdziale.

Omówione trzy typy skal funkcyjnych obejmują przypadki o najważniejszych własnościach, a mianowicie:

1° skale regularne — stały błąd bezwzględny, łatwość konstrukcji, łatwość odczytu,

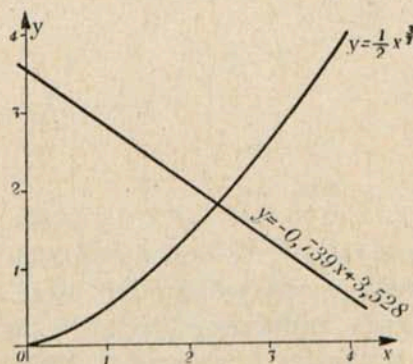
2° skale logarytmiczne — błąd względny w przybliżeniu stały, przedstawianie odcinków skali, można je stosować tylko w przedziałach $0 < a \leq x \leq b < \infty$,

3° skale rzutowe — łatwość konstrukcji przez rzutowanie skali regularnej, możliwość uwzględnienia przedziałów nieskończonych.

Prócz omówionych typów spotykaliśmy się już także z innymi typami skal, np. skale funkcyj trygonometrycznych, potęgowych itp. Przez rzutowanie można je zbliżyć do regularności.

§74. Papiery funkcyjne. Wróćmy do omawiania wykresów funkcyj.

Narysujmy np. wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^{3/2}$ dla $0 \leq x \leq 4$. Można w tym celu obliczyć wartości funkcji w dostatecznie gęsto położonych punktach,



Rys. 31

np. dla wartości x co $1/4$, i w odpowiednio obranym układzie współrzędnych umieścić punkty o kotach x, y związanych podaną zależnością funkcyjną. Przez umieszczone punkty na płaszczyźnie prowadzimy linię ciągłą będącą przybliżeniem właściwego wykresu (rys. 31). Gdy chcemy uzyskać dokładny wykres, tak by można było zastąpić obliczenia odczytywaniem wartości funkcji z wykresu, musimy dokładnie i gęsto obliczać wartości funkcji. O wiele łatwiej jest narysować wykres funkcji $y = -0,739x + 3,528$.

Ta funkcja jest liniowa i wykresem jej jest linia prosta. Do narysowania wykresu wystarczy więc znaleźć dowolne dwa punkty

prostej, przy czym można wybrać takie wartości argumentu, by obliczenie było możliwie najprostsze. Na przykład dla $x=0$ otrzymujemy $y=3,528$, dla $x=4$ zaś $y=0,572$. Przez punkty $(0, 3,528)$ i $(4, 0,572)$ prowadzimy linię prostą będącą wykresem funkcji $y=-0,739x+3,528$. Porównanie metod rysowania wykresów tych dwu funkcji skłania nas do przeanalizowania następującego zagadnienia. Czy przez odpowiednie przekształcenie układu współrzędnych nie można by uzyskać prostoliniowego wykresu funkcji $y=\frac{1}{2}x^{3/2}$? Oka-

zuje się, że jest to możliwe przez zastąpienie podziałek na osiach układu współrzędnych odpowiednio dobranymi skalami funkcyjnymi.

Najprostszym rozwiązaniem postawionego zagadnienia jest zastąpienie podziałki na osi odciętych skalą funkcyjną $\xi=a\frac{1}{2}x^{3/2}$. Wtedy zależności $y=\frac{1}{2}x^{3/2}$ odpowiadać będzie zależność pomiędzy współrzędnymi

$\eta=\frac{\beta}{a}\xi$, gdzie $\eta=\beta y$ jest równaniem podziałki na osi y . Jeśli więc obie-

rzemy na osiach równe moduły $a=\beta=1$ cm, to wykres funkcji $y=\frac{1}{2}x^{3/2}$ będzie dwusieczną kąta między osiami (rys. 32).

Dla łatwiejszego korzystania z wykresu poprowadzimy przez punkty skali na osi odciętych i podziałki na osi rzędnych dwie prostopadłe rodziny prostych równoległych. Otrzymamy w ten sposób tzw. papier funkcyjny.

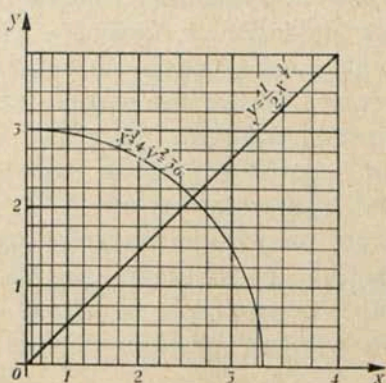
Ogólnie *papierem funkcyjnym* będziemy nazywali papier poliniowany dwiema rodzinami prostych równoległych, których równania w układzie współrzędnych ξ, η są

$$(10) \quad \xi = af(x), \quad \eta = \beta g(y),$$

gdzie zmienne x i y przybierają pewne wyróżnione wartości, najczęściej całkowite wielokrotności ustalonej wielkości mianowanej. Równania (10) nazywamy *równaniami papieru funkcyjnego*. Wielkości mianowane x, y nazywamy *kotami punktu* o współrzędnych ξ, η wyrażonych wzorami (10).

Szczególnym przypadkiem papieru funkcyjnego jest wspomniany w § 72 papier milimetrowy. Jest to papier funkcyjny o równaniach

$$\xi = ax, \quad \eta = \beta y.$$



Rys. 32

Rysunek 32 przedstawia papier funkcyjny o równaniach

$$\xi = a \frac{1}{2} x^{3/2}, \quad \eta = \beta y \quad (\text{gdzie } a = \beta = 1 \text{ cm}).$$

Prosta o równaniu $\eta = \frac{\beta}{a} \xi$ jest na tym papierze wykresem funkcji $y = \frac{1}{2} x^{3/2}$.

Ogólnie, narysowana na papierze funkcyjnym o równaniach (10) krzywa o równaniu

$$\eta = \beta F\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

jest wykresem funkcji

$$g(y) = F(f(x)).$$

Na przykład ćwiartka koła o promieniu $r = 3$ cm ma na rysunku 32 równanie

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 = 9,$$

jest więc wykresem funkcji

$$x^3 + 4y^2 = 36.$$

Rysunek 32 jest rozwiązaniem postawionego na początku zagadnienia o wyprostowaniu wykresu z rysunku 31. Jednakże narysowanie odpowiedniego papieru funkcyjnego jest jeszcze bardziej uciążliwe niż dokładne wykreślenie krzywej na rysunku 31. Używanie papieru funkcyjnego będzie się opłacało tylko wtedy, gdy mamy do dyspozycji gotowy papier funkcyjny (częściej używane papiery funkcyjne są drukowane podobnie jak papier milimetrowy), albo też gdy raz sporządziwszy odpowiedni papier funkcyjny będziemy z niego wielokrotnie korzystali (używając go np. jako podkładkę pod przeźroczystą kalkę lub rysując na jednym rysunku wykresy różnych funkcji). Dlatego też najchętniej posługujemy się takim papierem funkcyjnym, którego można użyć do wykresów możliwie obszernej klasy często używanych funkcji. Na papierze przedstawionym na rysunku 32 linia prosta

$$A \frac{\xi}{a} + B \frac{\eta}{\beta} + C = 0$$

jest wykresem funkcji

$$Ax^{3/2} + 2By + 2C = 0;$$

widzimy więc, że tylko dość specjalne funkcje mają na tym papierze wykres prostoliniowy.

Wyprostowanie wykresu z rysunku 31 można osiągnąć wieloma sposobami posługując się różnymi papierami funkcyjnymi. Czytelnik sprawdzi, że interesująca nas funkcja $y = \frac{1}{2}x^{3/2}$ będzie miała wykres prostoliniowy między innymi na następujących papierach funkcyjnych:

1. $\xi = ax, \quad \eta = \beta y^{2/3},$
2. $\xi = ax^3, \quad \eta = \beta y^2,$
3. $\xi = ae^{-x^3}, \quad \eta = \beta e^{-4y^2},$
4. $\xi = af(x), \quad \eta = \beta f((2y)^{2/3}),$

gdzie $f(x)$ jest dowolną funkcją określoną, ograniczoną, ciągłą i monotoniczną w interesującym nas przedziale.

Najczęściej stosowanym papierem funkcyjnym poza milimetrowym jest *papier logarytmiczny*. Tak nazywany jest papier o równaniach

$$(11) \quad \xi = a \log x, \quad \eta = \beta \log y.$$

Linia prosta

$$A \frac{\xi}{a} + B \frac{\eta}{\beta} + C = 0$$

na papierze logarytmicznym o równaniach (11) jest wykresem funkcji

$$A \log x + B \log y + C = 0,$$

to jest funkcji

$$x^A y^B = D, \quad \text{gdzie} \quad a > 0, \quad y > 0, \quad D = 10^{-C} > 0.$$

Widzimy, że *wszystkie funkcje potęgowe*

$$y = kx^n, \quad \text{gdzie} \quad k > 0,$$

mają na papierze logarytmicznym wykres prostoliniowy.

Chcąc narysować na papierze logarytmicznym wykres rozważanej uprzednio funkcji

$$y = \frac{1}{2}x^{3/2}$$

musimy jednak zastrzec, że nie potrafimy tego zrobić dla całego przedziału $0 \leq x \leq 4$. Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty,$$

więc wykres w tym przedziale musiałby być nieograniczony. Papiery

logarytmiczne można zatem stosować tylko w przypadku $0 < a \leq x \leq b$. Gdyby zmienna x przybierała tylko wartości ujemne z przedziału $a \leq x \leq b < 0$ należałoby najpierw dokonać podstawienia $z = -x$. W przypadku funkcji $y = \frac{1}{2}x^{3/2}$ przedziały ujemne argumentu są oczywiście nie-
możliwe z uwagi na nieokreśloność funkcji dla ujemnych argumentów, ale stosując podstawienie $z = -x$ możemy narysować na papierze logarytmicznym np. wykres funkcji

$$y = -2x^3 \quad \text{w przedziale } -3 \leq x \leq -1.$$

Rysunek 33 przedstawia arkusz papieru logarytmicznego o równych modułach na osiach $a = \beta = 6,25$ cm i przedziałach kot $1 \leq x \leq 10000$, $1 \leq y \leq 300$ (drukują się także papiery logarytmiczne o innych modułach). Narysujmy na nim wykres funkcji

$$y = \frac{1}{2}x^{3/2}.$$

Logarytmując obustronnie to wyrażenie otrzymujemy

$$\log y = \frac{3}{2} \log x - \log 2$$

i, podstawiając (11) przy $\alpha = \beta$, dostajemy

$$\eta = \frac{3}{2} \xi - \alpha \log 2.$$

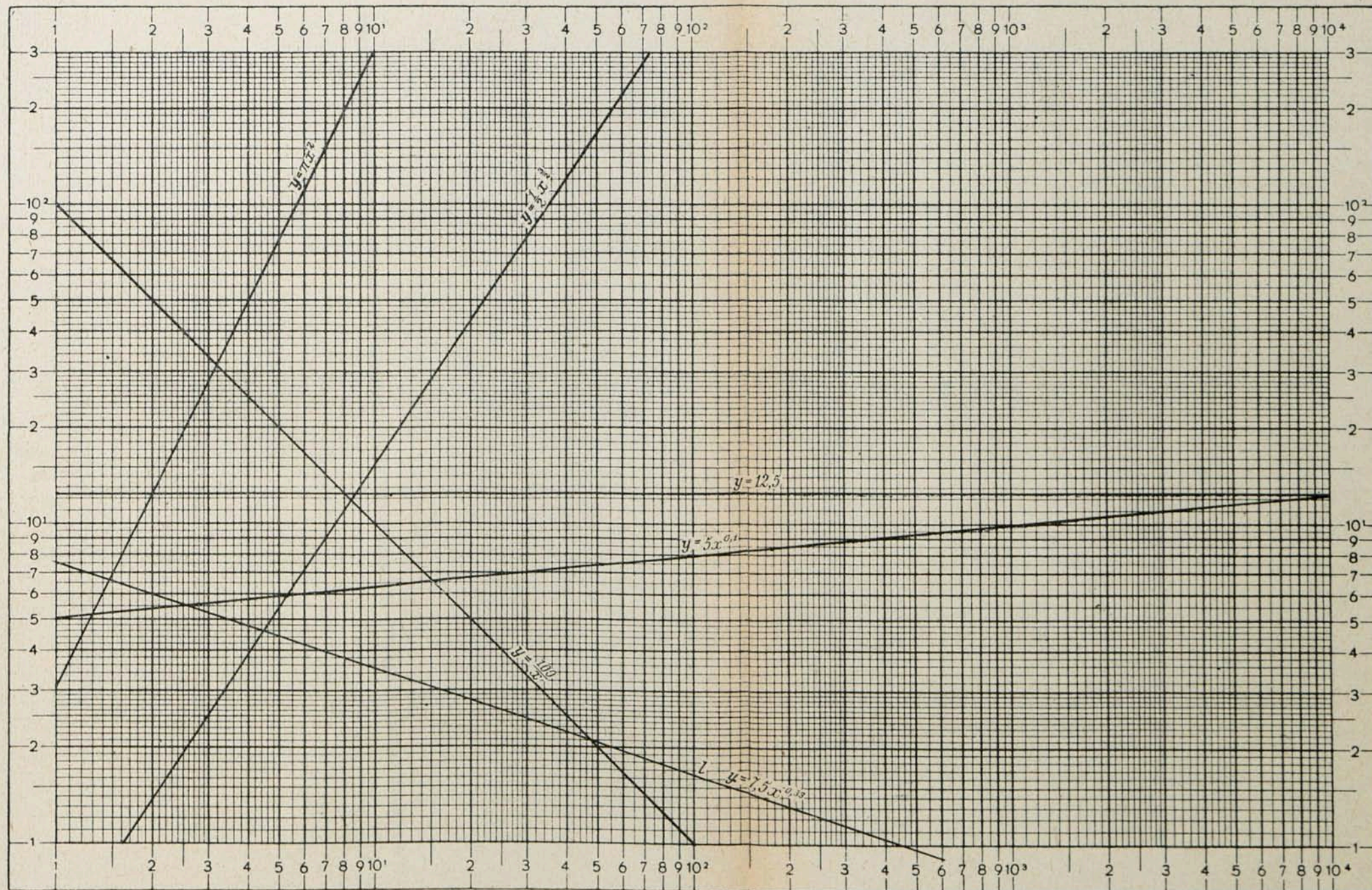
Wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^{3/2}$ jest więc linią prostą o współczynniku kierunkowym $3/2$ przecinającą oś $\xi = 0$ ($x=1$) w punkcie o współrzędnej $-\alpha \log 2$. Aby narysować tę prostą, wystarczy znaleźć dowolne jej dwa punkty, np. dla $x=4$ otrzymujemy $y = \frac{1}{2} \cdot 4^{3/2} = 4$, a dla $x=64$ otrzymujemy $y = \frac{1}{2} \cdot 64^{3/2} = 256$. Znajdując na papierze logarytmicznym dwa punkty o kotach (4,4) oraz (64, 256) możemy przez te punkty poprowadzić prostą będącą wykresem funkcji

$$y = \frac{1}{2}x^{3/2}.$$

Podobnie narysowano na rysunku 33 wykresy funkcji

$$y = \pi x^2, \quad y = 5x^{0,1},$$

$$y = \frac{100}{x}, \quad y = 12,5.$$



Rys. 33

Na odwrót, gdy dana jest dowolna prosta na papierze logarytmicznym, np. prosta l , to znajdując jej współczynnik kierunkowy n i kotę y_0 punktu przecięcia z osią $\xi=0$ mamy równanie

$$\frac{\eta}{a} = n \frac{\xi}{a} + \log y_0,$$

czyli

$$y = y_0 x^n.$$

Z rysunku 33 dla prostej l odczytujemy $y_0 \approx 7,5$, a biorąc współrzędne η_0 i ξ_1 punktów przecięcia tej prostej z osiami obliczamy

$$n = \frac{-\eta_0}{\xi_1} \approx -0,33.$$

Prosta l jest więc wykresem funkcji

$$y = f(x) \approx 7,5 x^{-0,33}.$$

Innym papierem często używanym w praktyce jest *papier półlogarytmiczny* (semilogarytmiczny) o równaniach

$$(12) \quad \begin{aligned} \xi &= ax, \\ \eta &= \beta \log y. \end{aligned}$$

Linia prosta

$$A \frac{\xi}{a} + B \frac{\eta}{\beta} + C = 0$$

na papierze półlogarytmicznym o równaniach (12) jest wykresem funkcji danej równaniem

$$Ax + B \log y + C = 0,$$

to jest funkcji

$$y = ka^x$$

gdzie

$$k = 10^{-C/B} > 0 \text{ i } a = 10^{-A/B} > 0.$$

Widzimy więc, że *wszystkie funkcje wykładnicze mają na papierze półlogarytmicznym wykres prostoliniowy*. Nie mamy tutaj żadnych ograniczeń na przedziały zmienności argumentu x . Można narysować wykres każdej funkcji wykładniczej dla każdego skończonego przedziału $a \leq x \leq b$.

Rysunek 34 przedstawia fragment arkusza papieru półlogarytmicznego o równaniach

$$\begin{aligned}\xi &= 1 \text{ cm} \cdot x, & -5 \leq x \leq 10, \\ \eta &= 9 \text{ cm} \cdot \log y, & 1 \leq y \leq 20.\end{aligned}$$

Na papierze tym narysowane są wykresy funkcji

$$y = e^x, \quad y = 4 \cdot 0,1^{0,1x}, \quad y = 5 \cdot 0,8^{-x/3}, \quad y = 2^{x/2-2}.$$

Rysujemy je obliczając wartości funkcji w dwóch dowolnych punktach i prowadząc prostą przez dwa punkty o kotach równych obliczonym wartościom. Na odwrót, gdy dana jest dowolna prosta na papierze półlogarytmicznym, np. prosta l , to odczytując koty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) dowolnych dwu punktów tej prostej mamy

$$y_1 = ka^{x_1}, \quad y_2 = ka^{x_2}.$$

Dzieląc stronami te równości otrzymujemy

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1},$$

czyli

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{1/(x_2 - x_1)}.$$

Współczynnik k obliczymy teraz ze wzoru

$$k = y_1 a^{-x_1} = y_1 \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^{-x_1/(x_2 - x_1)}.$$

Przyjmując $x_1 = 0$, $x_2 = 10$ odczytujemy z rysunku 34 $y_1 \approx 2,5$, $y_2 \approx 1,5$ i obliczamy

$$a \approx \left(\frac{3}{5} \right)^{1/10} \approx 0,95, \quad k = y_1 \approx 2,5.$$

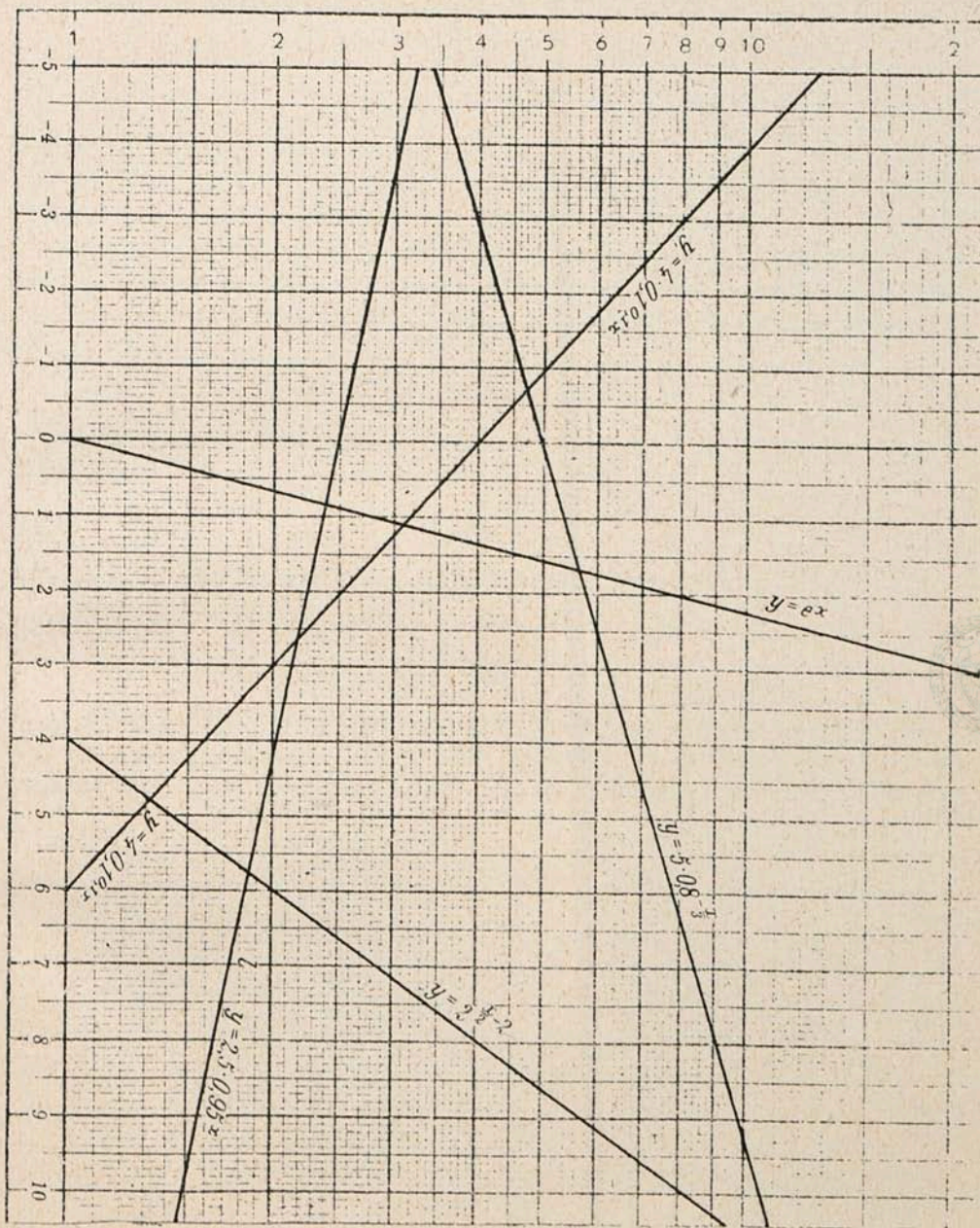
Prosta l jest więc wykresem funkcji wykładniczej

$$y = f(x) \approx 2,5 \cdot 0,95^x.$$

Papieru logarytmicznego i półlogarytmicznego używa się często do aproksymacji funkcji, gdy dane są jej wartości (dokładne lub przybliżone) w pewnych punktach. Pokażemy to na dwóch przykładach.

PRZYKŁAD 1. Ciśnienie gazu p i jego objętość v związane są zależnością

$$(13) \quad pv^\gamma = \text{constans}.$$



Na podstawie sześciu obserwacji

p (kg/cm ²)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (litry)	1,60	1,00	0,75	0,62	0,52	0,47

należy wyznaczyć parametry równania (13).

Na papierze logarytmicznym o równych modułach $\alpha=\beta=6,25$ cm umieszczamy punkty o kotach p, v uzyskanych z obserwacji. Na rysunku 35 widzimy, że wszystkie punkty niemal dokładnie leżą na jednej linii prostej. Prosta ta przechodzi przez punkt $p=1, v=1$ i ma współczynnik kątowy $\eta \approx -0,70$. Prosta na rysunku 35 jest więc w przybliżeniu wykresem funkcji

$$v = p^{-0,70}, \quad \text{czyli} \quad pv^{1,43} = 1.$$

PRZYKŁAD 2. Amplituda drgania tłumionego A jest funkcją wykładniczą czasu

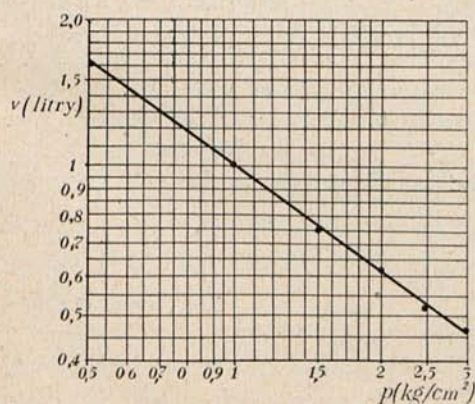
$$(14) \quad A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Z pomiarów otrzymano następujące wartości amplitudy:

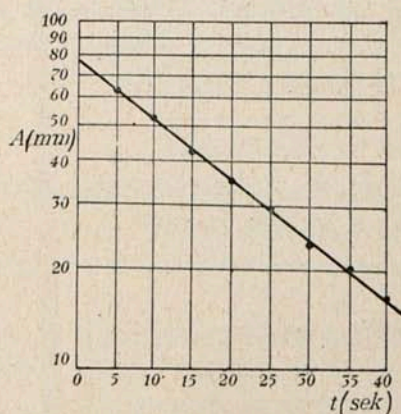
t (sek)	5	10	15	20	25	30	35	40
A (mm)	64	52	42	35	29	23	20	16

Na podstawie tych obserwacji należy wyznaczyć parametry równania (14).

Postać wykładnicza funkcji (14) wskazuje na możliwość zastosowania papieru półlogarytmicznego. Istotnie, na papierze półlogarytmicznym



Rys. 35



Rys. 36

(rys. 36) wyniki pomiarów układają się niemal dokładnie na linii prostej. Łatwo odczytać, że jest ona w przybliżeniu wykresem funkcji

$$A = 76 e^{-0,039t}.$$

Odczytując koty x , y na papierze logarytmicznym lub kotę y na papierze półlogarytmicznym korzystaliśmy ze skali logarytmicznej. Zgodnie z podstawową własnością skal logarytmicznych koty te odczytujemy z błędem względnym w przybliżeniu stałym na całym arkuszu. Jest to ważna własność papierów logarytmicznych, która skłania nas do wykreślenia funkcji na tych papierach nawet wtedy, gdy jej wykres nie będzie linią prostą. Stosując papier milimetrowy popełniamy stały błąd bezwzględny. W tych więc najczęstszych w praktyce przypadkach, gdy interesuje nas błąd względny, wykres na papierze milimetrowym jest niedokładny tam, gdzie wartości funkcji są małe i przesadnie dokładny w miejscach, gdzie funkcja przybiera wartości duże. Gdy np. wyrównujemy na papierze milimetrowym dane doświadczalne o stałym błędzie względnym, to małe odchylenia w pewnych miejscach wykresu mogą być bardziej istotne niż odchylenia duże przy dużych wartościach funkcji. Na papierze logarytmicznym takie same odchylenia punktów eksperymentalnych od aproksymacji są wszędzie równie istotne.

§ 75. Anamorfoza. Papiery funkcyjne otrzymaliśmy w wyniku takiego przekształcenia płaszczyzny, które wykres danej funkcji przekształca w linię prostą. Taką transformację będziemy nazywali *anamorfozą*. Jak widzieliśmy, do danej funkcji $y=F(x)$ istnieje wiele różnych papierów funkcyjnych, na których funkcja ma jako wykres linię prostą. Anamorfozę można więc realizować na wiele sposobów. W rozpatrywanym przykładzie funkcji $y=x^{3/2}/2$ widzieliśmy, że można było przy anamorfozie dowolnie ustalić skalę na jednej osi, dobierając tylko odpowiednią skalę na osi drugiej. Podobnie gdy chcemy uzyskać prostoliniowy wykres dowolnej funkcji monotonicznej $y=F(x)$, można jedną skalę wybrać dowolnie, np. przyjmując

$$\xi = af(x).$$

Skalę na drugiej osi otrzymamy obierając dowolny moduł β i eliminując z układu równań

$$(15) \quad y = F(x),$$

$$(16) \quad \xi = af(x),$$

$$(17) \quad \frac{\eta}{\beta} = n \frac{\xi}{a} + k$$

zmienne ξ i x . Podstawiając (16) do (17) dostajemy

$$\frac{\eta}{\beta} = nf(x) + k$$

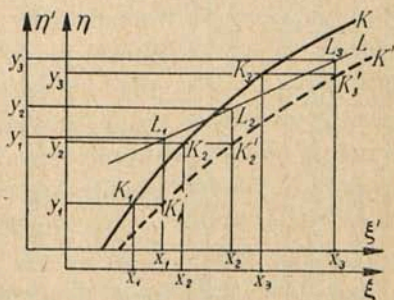
i przyjmując, że $x = \Phi(y)$ jest funkcją odwrotną do funkcji (15) otrzymujemy ostatecznie

$$\eta = \beta[nf(\Phi(y)) + k].$$

Anamorfozę możemy także realizować graficznie wychodząc wprost od wykresu funkcji $y = F(x)$, a więc nie zakładając nawet znajomości analitycznego wyrażenia funkcji. Postępowanie takie nazywa się *graficzną anamorfozą*.

Niech na rysunku 37 krzywa K przedstawia wykres funkcji $y = F(x)$ w dowolnym układzie współrzędnych ξ, η . Na osi ξ zaznaczono dla przejrzystości tylko dowolne trzy koty x_1, x_2, x_3 . Kotom tym odpowiadają na osi η punkty o kotach y_1, y_2, y_3 równych wartościom funkcji w odpowiednich punktach. Niech dana będzie także dowolna prosta L , w którą w wyniku anamorfozy ma się przekształcić krzywa K , oraz na osi ξ' równoległej do ξ dowolna skala zmiennej x , na którą przy anamorfozie ma przejść skala x z osi ξ .

Anamorfozę graficzną przeprowadzamy w sposób następujący. Przez punkty o kotach x_i na osi ξ prowadzimy linie równoległe do osi η aż do przecięcia z krzywą K . Przez uzyskane punkty K_i krzywej K prowadzimy teraz proste równoległe do osi ξ aż do przecięcia z prostymi równoległymi do osi η i wystawionymi w odpowiednich punktach nowej skali na osi ξ' . Otrzymujemy w ten sposób punkty K'_i pomocniczej krzywej K' . Krzywa ta jest wykresem funkcji $y = F(x)$ w układzie współrzędnych ξ', η . Punkty K'_i rzutujemy teraz równoległe do osi η na prostą L uzyskując na niej punkty L_i . Punkty te rzutujemy równoległe do osi ξ na dowolną oś η' równoległą do osi η , a uzyskanym punktom przypisujemy koty $y_i = F(x_i)$. W ten sposób uzyskujemy na osi η' skalę y , która wraz z daną skalą x na osi ξ' tworzy papier funkcyjny, taki że prosta L jest na nim wykresem funkcji $y = F(x)$.



Rys. 37

Konstrukcja jest dużo prostsza, jeżeli nie musimy zmieniać skali x . W takim przypadku rzutujemy bezpośrednio punkty krzywej K równoległe do osi η na prostą L i uzyskane punkty prostej L równoległe do osi ξ na oś η' .