

## B. Układy równań

**§ 48. Uwagi ogólne.** Opisane w następnych paragrafach metody służą do obliczania przybliżonych rozwiązań szczególnych układu równań (1). W przykładach będą jednak stosowane różne sposoby pozwalające w konkretnych przypadkach znajdować również rozwiązanie pełne układu. Ogólnej dyskusji możliwości stosowania tych sposobów przeprowadzać nie będziemy. Nie będziemy również przeprowadzać dyskusji, czy ciąg otrzymywanych daną metodą przybliżeń jest zbieżny do jakiegoś rozwiązania szczególnego. Dyskusja taka byłaby uciążliwa, tymczasem badanie zbieżności ciągu przybliżeń do rozwiązania szczególnego można w wielu konkretnych przypadkach ominąć: wstawiamy po prostu otrzymywane przybliżenia do danego układu równań i sprawdzamy, czy równania układu są z wystarczającą dokładnością spełnione. Gdy przez powtarzanie obliczeń daną metodą nie otrzymujemy dokładniejszych przybliżeń, to można powtórzyć obliczenia wychodząc z innych przybliżeń początkowych albo zmienić metodę. Rachujący jest w ten sposób zdany w dużej mierze na własne doświadczenie i intuicję, unika natomiast długich i skomplikowanych dyskusji teoretycznych. Rozwiązywanie układów równań staje się wtedy co prawda pewnego rodzaju sztuką, ale z drugiej strony należy zauważyć, że uzyskiwanie rozwiązań drogą teoretycznych rozważań i stosowanie ogólnych sztywnych metod postępowania bardzo często staje się praktyczną niemożliwością ze względu na ilość rachunków. I tak np. rozwiązanie układu kilkudziesięciu równań liniowych, w których niewiele współczynników jest równych zeru, bywa nieraz praktyczną niemożliwością, nawet gdy stosujemy takie specjalne metody, jak np. metodę krakowianów. Tymczasem znane są przypadki, gdy uzyskano rozwiązanie takiego układu metodą relaksacji, która w głównej mierze opiera się na doświadczeniu rachującego.

Wielką trudność sprawia na ogół poszukiwanie rozwiązania pełnego. Gdy dojdzie do takiego rozwiązania w sposób ścisły jest praktyczną niemożliwością, można nieraz stosować metody mniej doskonałe, w pewnym sensie empiryczne, ale przystępniejsze i do celów praktyki nieraz wystarczające. Na przykład podejrzewamy, że dany układ równań ma tylko jedno rozwiązanie, a nie umiemy udowodnić, że tak jest w istocie. Wtedy możemy postąpić następująco: rozpoczynamy obliczenia wychodząc z kilku różnych przybliżeń początkowych; skoro dochodzimy do tego samego rozwiązania szczególnego, niezależnie od wyboru przybliżeń początkowych, to jest bardzo prawdopodobne, że układ nie ma już innych rozwiązań szczególnych. Pewności w tym względzie oczywiście taką metodą nigdy nie otrzymamy, ale — mimo wszystko — uzyskujemy informacje, pozwalające nam uznać hipotezę jednoznaczności rozwią-



zania za prawdziwą. Sytuacja jest tu analogiczna, jak w wielu naukach doświadczalnych: hipotezę uważamy za prawdziwą, gdyż doświadczenia — jak dotąd — ją potwierdzają. Oczywiście może się zdarzyć, że w końcu jakieś nowe doświadczenie zaprzeczy uczynionej hipotezie, ale im więcej doświadczeń potwierdzających mamy za sobą, tym mniej się liczymy z możliwością takiego zaprzeczenia.

**§ 49. Regula falsi i metoda Newtona.** Niech będzie dany układ  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi

$$(73) \quad \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie o funkcjach  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) zakładamy, że mają w rozpatrywanym obszarze ciągle pochodne cząstkowe do rzędu drugiego włącznie. Zakładamy, że układ (73) ma rozwiązanie szczególne  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n$ .

Układ (73) zastępujemy dla ułatwienia późniejszych obliczeń układem równoważnym

$$(74) \quad \begin{aligned} z &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ z &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ z &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Geometrycznie układ (74) odpowiada  $n+1$  powierzchniom w przestrzeni  $(n+1)$ -wymiarowej. Rozwiązanie  $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_n = \xi_n, z = 0$  odpowiada punktowi przecięcia tych  $n+1$  powierzchni. Nazwijmy ten punkt  $\mathcal{E}$ . Będziemy pisali  $\mathcal{E}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0)$ . Układ (74) zastępujemy układem równań liniowych, który możliwie dobrze aproksymowałby układ (74) w otoczeniu punktu  $\mathcal{E}$ . Geometrycznie oznacza to, że chcemy powierzchnie (74) zastąpić płaszczyznami, możliwie dobrze do nich przylegającymi. Wtedy przybliżeniem punktu  $\mathcal{E}$  będzie punkt przecięcia tych płaszczyzn, czyli rozwiązanie układu równań liniowych aproksymujących układ (74).

Układ równań liniowych aproksymujący układ (74) można otrzymać na różne sposoby, z których opiszemy tu dwa.

Niech np. będą nam znane punkty  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{i, n+1}$  leżące na powierzchni

$$(75) \quad z = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n$$







gdzie  $R_1, R_2, \dots, R_n$  są odpowiednimi resztami ze wzoru Taylora. Jeśli te reszty są małe, to otrzymujemy układ równań liniowych

[illegible]

Równania (78) są tylko przybliżone, więc możemy z nich obliczyć tylko przybliżone wartości  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , a następnie przybliżone wartości

$$(79) \quad \xi_1 \approx \bar{x}_1 + h_1, \quad \xi_2 \approx \bar{x}_2 + h_2, \quad \dots, \quad \xi_n \approx \bar{x}_n + h_n.$$

Równania (78) są równaniami płaszczyzn stycznych do powierzchni (74) w punktach  $X_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, z_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Obliczone ze wzoru (79) przybliżenia można wykorzystać do obliczenia następnych przybliżeń.

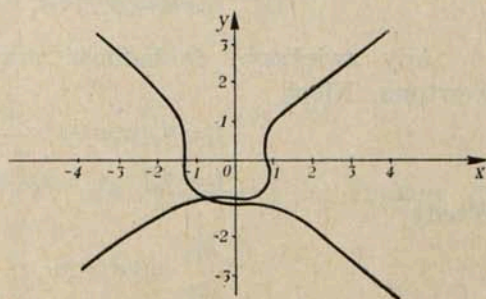
Metoda powyższa jest uogólnieniem metody Newtona na przypadek układu równań.

PRZYKŁAD 9. Rozwiązać układ równań

$$(80) \quad x^3 - 2y^3 + x^2 + y - 1 = 0, \quad 2x^3 + 3y^3 + x - 2y^2 + 6 = 0,$$

z dokładnością do 0,00005.

Każde z równań (80) przedstawia na płaszczyźnie  $x, y$  pewną krzywą. Współrzędne punktów przecięcia obu krzywych są rozwiązaniami układu (80). Sporządzamy zatem wykres obu krzywych, korzystając ze znanych w rachunku różniczkowym metod badania przebiegu funkcji uwikłanych.



Rys. 10

Jak widać z rysunku 10, układ równań (80) ma tylko jedno rozwiązanie

$$x \approx -0,8, \quad y \approx -1.$$

Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie zastosujemy *regula falsi*. W tym celu układ (80) zastąpimy układem równoważnym

$$(81) \quad \begin{aligned} z &= x^3 - 2y^3 + x^2 + y - 1, \\ z &= 2x^3 + 3y^3 + x - 2y^2 + 6, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Podstawiając w dwóch pierwszych równaniach kolejno

$$x = -0,8, \quad y = -1; \quad x = -0,7, \quad y = -1; \quad x = -0,8, \quad y = -0,9$$

i obliczając  $z$  otrzymujemy trzy punkty

$$A_1(-0,8, -1, 0,128), \quad B_1(-0,7, -1, 0,147), \quad C_1(-0,8, -0,9, -0,314)$$

leżące na powierzchni danej przez pierwsze z równań (81) i trzy punkty

$$A_2(-0,8, -1, -0,824), \quad B_2(-0,7, -1, -0,386), \quad C_2(-0,8, -0,9, 0,369)$$

leżące na powierzchni danej przez drugie z tych równań. Przez punkty  $A_1, B_1, C_1$  przechodzi płaszczyzna

$$19x - 442y - 100z - 414 = 0.$$

Przez punkty  $A_2, B_2, C_2$  przechodzi płaszczyzna

$$23422x - 20281y + 100z - 1461 = 0.$$

Tymi płaszczyznami zastępujemy powierzchnie dane przez dwa pierwsze równania (81). Układ (81) zastępujemy w ten sposób układem

$$19x - 442y - 100z - 414 = 0,$$

$$23422x - 20281y + 100z - 1461 = 0,$$

$$z = 0,$$

z którego obliczamy

$$x \approx -0,7776, \quad y \approx -0,9701.$$

Aby zwiększyć dokładność przybliżeń, zastosujemy teraz metodę Newtona. Niech

$$f_1 = f_1(x, y) = x^3 - 2y^3 + x^2 + y - 1,$$

$$f_2 = f_2(x, y) = 2x^3 + 3y^3 + x - 2y^2 + 6.$$

Wtedy

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2 + 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -6y^2 + 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 6x^2 + 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 9y^2 - 4y$$

i dla  $x = -0,7776, \quad y = -0,9701$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \approx 0,258785 = a_{11}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} \approx -4,646564 = a_{12},$$

(82)

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \approx 4,627971 = a_{21}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} \approx 12,350246 = a_{22}.$$



Ponadto

$$(83) \quad \begin{aligned} z_1 &= f_1(-0,7776, -0,9701) \approx -0,00971263, \\ z_2 &= f_2(-0,7776, -0,9701) \approx -0,339024. \end{aligned}$$

Niech  $x = \xi$  i  $y = \eta$  będą pierwiastkami układu (80). Wprowadzimy oznaczenia

$$(84) \quad h_1 = \xi + 0,7776, \quad h_2 = \eta + 0,9701.$$

Podstawiając (82), (83) i (84) do (78) otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} 0,258785 h_1 - 4,646564 h_2 - 0,00971263 &\approx 0, \\ 4,62797 h_1 + 12,35025 h_2 - 0,339024 &\approx 0, \end{aligned}$$

z którego otrzymujemy

$$h_1 \approx 0,0686, \quad h_2 \approx 0,0017.$$

Stąd na mocy (84)

$$\xi \approx -0,7090, \quad \eta \approx -0,9684.$$

Stosując do liczb  $\bar{x} = -0,7090$ ,  $\bar{y} = -0,9684$  ponownie metodę Newtona otrzymujemy układ (77) w następującej postaci:

$$(85) \quad \begin{aligned} 0,090043 h_1 - 4,626791 h_2 &= 0,00579158 - R_1, \\ 4,016086 h_1 + 12,313787 h_2 &= 0,02189115 - R_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(86) \quad R_i = \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} h_2^2 \right) \quad (i=1, 2),$$

a pochodne  $\partial^2 f_i / \partial x^2$ ,  $\partial^2 f_i / \partial x \partial y$ ,  $\partial^2 f_i / \partial y^2$  należy obliczyć w punkcie leżącym między  $(\xi, \eta)$  i  $(-0,7090, -0,9684)$ .

Z układu (85) otrzymujemy

$$(87) \quad \begin{aligned} h_1 &= (0,00876 \dots) - (0,62 \dots) R_1 + (0,23 \dots) R_2, \\ h_2 &= - (0,00108 \dots) + (0,20 \dots) R_1 - (0,0045 \dots) R_2. \end{aligned}$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} &= 6x + 2, & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} &= -12y, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} &= 12x, & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} &= 18y - 4, \end{aligned}$$





O układzie tym zakładamy, że z każdego równania

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

umiemy obliczyć  $x_i$ , gdy znamy wartości pozostałych zmiennych, tzn. istnieje układ

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_2, x_3, x_4, \dots, x_n), \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_3, x_4, \dots, x_n), \\ x_3 &= \varphi_3(x_1, x_2, x_4, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

równoważny układowi (89).

Obliczenia rozpoczynamy od z góry danych przybliżeń  $x_2=x_{20}$ ,  $x_3=x_{30}$ , ...,  $x_n=x_{n0}$  i z równań (89) obliczamy kolejno następne przybliżenia  $x_1=x_{11}$ ,  $x_2=x_{21}$ , ...,  $x_n=x_{n1}$ . Zatem

$$(90) \quad \begin{aligned} x_{11} &= \varphi_1(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}), \\ x_{21} &= \varphi_2(x_{11}, x_{30}, \dots, x_{n0}), \\ &\vdots \\ x_{n1} &= \varphi_n(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n-1,1}). \end{aligned}$$

Jeżeli przyjąć

[illegible]

to można układ (90) zastąpić układem

$$\begin{aligned} x_{11} &= \psi_1(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}), \\ x_{21} &= \psi_2(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}), \\ &\vdots \\ x_{n1} &= \psi_n(x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}). \end{aligned} \quad (90a)$$

Zarówno układ (90), jak (90a) są oczywiście spełnione, gdy  $x_{11}=\xi_1$ ,  $x_{20}=x_{21}=\xi_2$ , ...,  $x_{n0}=x_{n1}=\xi_n$ , jeżeli  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  są pierwiastkami układu (89).



Jeżeli

$$x_{20} = \xi_2 + dx_{20}, \quad x_{30} = \xi_3 + dx_{30}, \quad \dots, \quad x_{n0} = \xi_n + dx_{n0},$$

$$x_{11} = \xi_1 + \Delta x_{11}, \quad x_{21} = \xi_2 + \Delta x_{21}, \quad \dots, \quad x_{n1} = \xi_n + \Delta x_{n1}$$

i jeżeli funkcje (90) mają ciągle pochodne pierwszego rzędu, to na mocy wzoru Taylora

$$\Delta x_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_{20} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} dx_{30} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_{n0},$$

$$\Delta x_{21} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \Delta x_{11} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} dx_{30} + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_{n0},$$

(91)

$$\Delta x_{n1} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \Delta x_{11} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} \Delta x_{21} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}} \Delta x_{n-1,1},$$

gdzie pochodne  $\partial \varphi_i / \partial x_j$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, n$ ) należy wziąć w pewnych punktach pośrednich między punktami  $(x_{11}, \dots, x_{i-1,1}, x_{i+1,0}, \dots, x_{n0})$  i  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$ .

Jeżeli

$$(92) \quad |\Delta x_{21}| < |dx_{20}|, \quad |\Delta x_{31}| < |dx_{30}|, \quad \dots, \quad |\Delta x_{n1}| < |dx_{n0}|,$$

wtedy otrzymane ze wzorów (90) przybliżenia  $x_{21}, x_{31}, \dots, x_{n1}$  są dokładniejsze od przybliżeń  $x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}$  i możemy je wykorzystać do dalszej iteracji. Metoda powyższa nosi nazwę *metody iteracji*.

PRZYKŁAD 10. Rozwiązać układ równań

$$(93) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & x_1 = x_5 + 60^\circ, \\ \text{b)} \quad & \sin x_2 = -0,25 \sin x_1, \\ \text{c)} \quad & x_3 = x_2 + 5^\circ, \\ \text{d)} \quad & \sin x_4 = -0,35 \sin x_5 - 0,38 \sin x_3, \\ \text{e)} \quad & \sin(x_5 - x_4) = 0,27143 \frac{\cos x_1}{\cos x_2} \sin(x_3 - x_4) \end{aligned}$$

z dokładnością do  $30''$ , z warunkami:

$$60^\circ \leq x_1 < 420^\circ, \quad -90^\circ < x_2, x_3, x_4 < 90^\circ, \quad 0^\circ \leq x_5 < 360^\circ.$$

Układ (90a) przybiera tu postać

$$x_{11} = \varphi_1(x_{50}), \quad x_{21} = \varphi_2(x_{50}), \quad \dots, \quad x_{51} = \varphi_5(x_{50}),$$



a nierówności (92) redukują się do jednej

$$(94) \quad |\Delta x_{51}| < |dx_{50}|.$$

Traktując  $x_{50}$  jako zmienną widzimy, że nierówność (94) będzie spełniona, jeżeli udowodnimy, że

$$(95) \quad \left| \frac{dx_{51}}{dx_{50}} \right| \leq q < 1.$$

Aby to wykazać, obliczamy z (93), że

$$(96) \quad \frac{dx_{51}}{dx_{50}} = \frac{1}{R} \left( P \frac{dx_{21}}{dx_{50}} + Q \frac{dx_{41}}{dx_{50}} \right),$$

gdzie

$$P = \sin x_{21} \sin(x_{50} - x_{41}) + 0,27143 \cos x_{11} \cos(x_{31} - x_{41}),$$

$$Q = \cos x_{21} \cos(x_{50} - x_{41}) - 0,27143 \cos x_{11} \cos(x_{31} - x_{41}),$$

$$R = \cos x_{21} \cos(x_{50} - x_{41}) + 0,27143 \sin x_{11} \sin(x_{31} - x_{41}),$$

$$\frac{dx_{21}}{dx_{50}} = -0,25 \frac{\cos x_{11}}{\cos x_{21}},$$

$$\frac{dx_{41}}{dx_{50}} = \frac{0,35}{\cos x_{41}} \left( -\cos x_{50} + 0,27143 \frac{\cos x_{11}}{\cos x_{21}} \cos x_{31} \right).$$

Do uzyskania oszacowania (95) za pomocą (96) niezbędne są oszacowania dla  $x_1, x_2, \dots, x_5$ .

Z równania (93b) otrzymujemy

$$|\sin x_2| \leq 0,25,$$

skąd

$$-14^\circ 28' 40'' < x_2 < 14^\circ 28' 40''.$$

Z (93c) wynika dalej

$$-9^\circ 28' 40'' < x_3 < 19^\circ 28' 40'',$$

następnie z (93d)

$$-28^\circ 28' 20'' < x_4 < 24^\circ 22' 10''$$

i z (93e)

$$-40^\circ 29' 20'' < x_5 < 36^\circ 23' 10'' \quad \text{albo} \quad 139^\circ 30' 40'' < x_5 < 216^\circ 23' 10''.$$

Wtedy na mocy (93a)

$$19^\circ 30' 40'' < x_1 < 96^\circ 23' 10'' \quad \text{albo} \quad 199^\circ 30' 40'' < x_1 < 276^\circ 23' 10''.$$



Będziemy mówili, że zachodzi przypadek I, gdy spełniona jest pierwsza z tych nierówności, a przypadek II, gdy spełniona jest druga.

Na mocy (93b) jest

$$-14^{\circ}28'40'' < x_2 < -4^{\circ}47'30'' \quad \text{w przypadku I}$$

oraz

$$4^{\circ}47'30'' < x_2 < 14^{\circ}28'40'' \quad \text{w przypadku II.}$$

Z (93c) wynika dalej

$$-9^{\circ}28'40'' < x_3 < 0^{\circ}12'30'' \quad \text{w przypadku I,}$$

$$9^{\circ}47'30'' < x_3 < 19^{\circ}28'30'' \quad \text{w przypadku II,}$$

następnie z (93d)

$$-12^{\circ}04'00'' < x_4 < 16^{\circ}51'00'' \quad \text{w przypadku I,}$$

$$-20^{\circ}43'50'' < x_4 < 8^{\circ}13'20'' \quad \text{w przypadku II}$$

i z (93e)

$$-6^{\circ}43'50'' < x_5 - x_4 < 3^{\circ}13'20'' \quad \text{w przypadku I,}$$

$$178^{\circ}50'40'' < x_5 - x_4 < 189^{\circ}49'20'' \quad \text{w przypadku II,}$$

skąd

$$-18^{\circ}47'50'' < x_5 < 20^{\circ}04'20'' \quad \text{albo} \quad 158^{\circ}06'50'' < x_5 < 198^{\circ}02'40''.$$

Mając powyższe oszacowania szacujemy  $dx_{51}/dx_{50}$  według wzoru (96) i otrzymujemy w obu przypadkach nierówność

$$(97) \quad \left| \frac{dx_{51}}{dx_{50}} \right| < 0,9 < 1.$$

Jest to oszacowanie bardzo niedokładne, ale wystarczające, gdyż gwarantuje nam, że

$$|\Delta x_{51}| < 0,9 |\Delta x_{50}|.$$

Jeżeli zatem z przybliżenia  $x_{50}$  obliczymy  $x_{51}$ , a następnie w sposób analogiczny z  $x_{51}$  obliczymy  $x_{52}$  itd., to ciąg przybliżeń

$$(98) \quad x_{50}, x_{51}, x_{52}, \dots$$

na pewno będzie zbieżny i to zbieżny do pierwiastka  $\xi_5$  układu (93).

Ponadto warunek (97) zapewnia nam jednoznaczność rozwiązania w obu przypadkach, gdyż krzywa  $x_{51} = \varphi_5(x_{50})$  może się przecinać z prostą  $x_{51} = x_{50}$  tylko w jednym punkcie dla każdego przypadku z osobna, a pierwiastek  $\xi_5$  otrzymujemy tylko wtedy, gdy  $x_{51} = x_{50}$ .

Układ (93) ma zatem dokładnie jedno rozwiązanie dla

$$-18^{\circ}47'50'' < x_5 < 20^{\circ}04'20''$$

oraz dokładnie jedno rozwiązanie dla

$$158^{\circ}06'50'' < x_5 < 198^{\circ}02'40''$$

i rozwiązania te można otrzymać metodą iteracji.

Pozostaje sprawa oszacowania błędów otrzymywanych przybliżeń. Ponieważ obliczenie liczby  $q$  we wzorze (95) przez szacowanie pochodnej  $dx_{51}/dx_{50}$  jest bardzo żmudne, można tę pochodną aproksymować ilorazem różnicowym i przyjąć np.

$$(99) \quad q > \frac{|x_{5,i+1} - x_{5,i+2}|}{|x_{5i} - x_{5,i+1}|},$$

gdzie  $x_{5i}$  oznacza  $i$ -ty wyraz w ciągu (98).

Niech teraz  $\Delta x_{5i}$  oznacza błąd przybliżenia  $x_{5i}$ , wtedy

$$\Delta x_{5i} = x_{5i} - \xi_5 = (x_{5i} - x_{5,i+1}) + (x_{5,i+1} - x_{5,i+2}) + \dots,$$

skąd

$$|\Delta x_{5i}| \leq |x_{5i} - x_{5,i+1}| + |x_{5,i+1} - x_{5,i+2}| + \dots$$

Na mocy (99) jest dalej

$$(100) \quad \begin{aligned} |\Delta x_{5i}| &< |x_{5i} - x_{5,i+1}| (1 + q + q^2 + \dots) = \\ &= |x_{5i} - x_{5,i+1}| \frac{1}{1-q} < |x_{5,i-1} - x_{5i}| \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Jeśli różnice

$$x_{5,i-2} - x_{5,i-1} \quad \text{i} \quad x_{5,i-1} - x_{5i}$$

są małe, to można przyjąć

$$q \approx \frac{|x_{5,i-1} - x_{5i}|}{|x_{5,i-2} - x_{5,i-1}|},$$

i wtedy zamiast (100) mamy oszacowanie

$$|\Delta x_{5i}| \approx |x_{5,i-1} - x_{5i}| \frac{\frac{|x_{5,i-1} - x_{5i}|}{|x_{5,i-2} - x_{5,i-1}|}}{1 - \frac{|x_{5,i-1} - x_{5i}|}{|x_{5,i-2} - x_{5,i-1}|}},$$

czyli

$$(101) \quad |\Delta x_{5i}| \approx \frac{(x_{5,i-1} - x_{5i})^2}{|x_{5,i-2} - x_{5,i-1}| - |x_{5,i-1} - x_{5i}|}.$$



Dla pozostałych niewiadomych znajdujemy oszacowania ze wzorów (93). Mamy

$$(102) \quad \begin{aligned} |\Delta x_{1,i+1}| &= |\Delta x_{5i}|, \\ |\Delta x_{2,i+1}| &< 0,25 |\Delta x_{5i}|, \\ |\Delta x_{3,i+1}| &= |\Delta x_{2,i+1}| < 0,25 |\Delta x_{5i}|, \\ |\Delta x_{4,i+1}| &< 0,40 |\Delta x_{5i}| + 0,44 |\Delta x_{3,i+1}| < 0,51 |\Delta x_{5i}|. \end{aligned}$$

Iterację rozpoczynamy od przyjęcia  $x_{50} = 0^\circ$ . Z (93) obliczamy kolejno

$$\begin{aligned} x_{11} &= 60^\circ, & x_{21} &= -12^\circ 30' 15'', & x_{31} &= -7^\circ 30' 15'', \\ x_{41} &= 2^\circ 50' 40'', & x_{51} &= 1^\circ 24' 50''. \end{aligned}$$

Na tym kończy się pierwszy cykl iteracyjny. Jako wartość wyjściową do drugiego cyklu bierzemy  $x_{51} = 1^\circ 24' 50''$  i z (93) obliczamy kolejno

$$\begin{aligned} x_{12} &= 61^\circ 24' 50'', & x_{22} &= -12^\circ 40' 50'', & x_{32} &= -7^\circ 40' 50'', \\ x_{42} &= 2^\circ 25' 00'', & x_{52} &= 1^\circ 04' 45''. \end{aligned}$$

Wartość  $x_{52} = 1^\circ 04' 45''$  bierzemy jako wyjściową do trzeciego cyklu i otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} x_{13} &= 61^\circ 04' 50'', & x_{23} &= -12^\circ 38' 20'', & x_{33} &= -7^\circ 38' 20'', \\ x_{43} &= 2^\circ 31' 00'', & x_{53} &= 1^\circ 09' 30''. \end{aligned}$$

Z czwartego cyklu iteracyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_{14} &= 61^\circ 09' 30'', & x_{24} &= -12^\circ 39' 00'', & x_{34} &= -7^\circ 39' 00'', \\ x_{44} &= 2^\circ 29' 40'', & x_{54} &= 1^\circ 08' 25''. \end{aligned}$$

Oszacujemy błąd  $x_{54}$ . W tym celu posłużymy się wzorem (101). Mamy

$$|\Delta x_{54}| \approx \frac{(x_{53} - x_{54})^2}{|x_{52} - x_{53}| - |x_{53} - x_{54}|} = \frac{(1' 05'')^2}{4' 45'' - 1' 05''} \approx 20''.$$

Ponieważ dokładność przybliżenia  $x_{54}$  jest wystarczająca, obliczymy jeszcze tylko ze wzoru (93), że

$$\begin{aligned} x_{15} &= 61^\circ 08' 25'', & x_{25} &= -12^\circ 38' 50'', & x_{35} &= -7^\circ 38' 50'', \\ x_{45} &= 2^\circ 29' 35''. \end{aligned}$$

Błąd tych przybliżeń jest na mocy (102) również rzędu  $20''$  lub mniejszy.

Drugie rozwiązanie układu (93) obliczamy analogicznie rozpoczynając iterację od  $x_{50} = 180^\circ$ . Otrzymujemy następujące przybliżenia z dokładnością do  $20''$ .

$$\begin{aligned} x_{54} &= 175^\circ 56' 25'', & x_{15} &= 235^\circ 56' 25'', & x_{25} &= 11^\circ 57' 20'', \\ x_{35} &= 16^\circ 57' 20'', & x_{45} &= -7^\circ 47' 35'', \end{aligned}$$



Ostatecznie rozwiązanie pełne układu (93) w podanych przedziałach składa się z dwóch rozwiązań szczególnych:

$$\begin{aligned}\xi_1 &\approx 61^\circ 08' 25'', & \xi_2 &\approx -12^\circ 38' 50'', & \xi_3 &\approx -7^\circ 38' 50'', \\ \xi_4 &\approx 2^\circ 29' 35'', & \xi_5 &\approx 1^\circ 08' 25''\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\xi_1 &\approx 235^\circ 56' 25'', & \xi_2 &\approx 11^\circ 57' 20'', & \xi_3 &\approx 16^\circ 57' 20'', \\ \xi_4 &\approx -7^\circ 47' 35'', & \xi_5 &\approx 175^\circ 56' 25'',\end{aligned}$$

gdzie błąd każdego z przybliżeń jest rzędu  $20''$ .

Metodę iteracji można zastosować nieraz i do pojedynczych równań z jedną niewiadomą. Niech będzie dane równanie

$$(103) \quad f(x) = g(x),$$

gdzie funkcje  $f(x)$ ,  $g(x)$  mają ciągle pochodne w przedziale  $(a, b)$ . Ponadto o jednej z funkcji, np. o funkcji  $f(x)$  zakładamy, że umiemy obliczyć wartość zmiennej  $x$ , gdy podana jest wartość  $f(x)$ , to znaczy, że w danym przedziale  $a < x < b$  istnieje funkcja  $x = h(y)$  odwrotna do funkcji  $y = f(x)$ .

Równanie (103) zastępujemy układem

$$(104) \quad \begin{array}{ll} y = g(x), & \text{lub} \quad y = g(x), \\ f(x) = y, & x = h(y). \end{array}$$

Niech  $\xi$  będzie szukany pierwiastkiem równania (103) w przedziale  $(a, b)$  i niech będzie dane przybliżenie  $x_0$  tego pierwiastka.

Iterację prowadzi się w ten sposób, że z pierwszego równania (104) oblicza się

$$y_1 = g(x_0),$$

a z drugiego takie  $x_1$ , żeby

$$f(x_1) = y_1.$$

Jest to pierwszy cykl iteracyjny. Drugi cykl polega na obliczeniu z pierwszego równania

$$y_2 = g(x_1),$$

a z drugiego takiego  $x_2$ , żeby

$$f(x_2) = y_2.$$

Iterację można prowadzić dalej analogicznie. Jeżeli ciąg otrzymywanych kolejno przybliżeń

$$(105) \quad x_0, x_1, x_2, \dots$$

jest zbieżny, to jego granica  $\xi$  jest pierwiastkiem równania (103).



Wykażemy, że jeżeli istnieją takie trzy liczby  $a, b, c$  ( $b > a$ ), że

$$(106) \quad [f(a) - g(a)][f(b) - g(b)] < 0$$

i dla  $a = a - c(b - a) < x < \beta = b + c(b - a)$

$$(106a) \quad \left| \frac{g'(x)}{f'(x)} \right| \leq c < 1,$$

to równanie (103) ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale  $(a, \beta)$ . Pierwiastek ten można otrzymać jako granicę ciągu (105), gdzie za  $x_0$  można przyjąć dowolną liczbę z przedziału  $(a, b)$ .

Istotnie, z warunku (106) wynika, że równanie (103) ma co najmniej jeden pierwiastek w przedziale  $(a, b)$ , a więc tym bardziej w przedziale  $(a, \beta)$ , który zawiera przedział  $(a, b)$ . Gdyby równanie (103) miało dwa pierwiastki  $\xi_1$  i  $\xi_2$  w przedziale  $(a, \beta)$ , to mielibyśmy  $f(\xi_1) - g(\xi_1) = f(\xi_2) - g(\xi_2) = 0$  i na mocy twierdzenia Rolle'a istniałaby taka liczba  $\zeta$  między  $\xi_1$  i  $\xi_2$ , że byłoby

$$f'(\zeta) - g'(\zeta) = 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem (106a). Zatem równanie (103) ma dokładnie jeden pierwiastek  $\xi$  w przedziale  $(a, \beta)$ . Pierwiastek ten leży w przedziale  $(a, b)$ .

Niech będzie teraz dany ciąg przybliżeń  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$  otrzymanych metodą iteracji z układu (104), gdy  $a < x_0 < b$ . Mamy zatem

$$x_{n+1} = h[g(x_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

i na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$(107) \quad x_{n+1} - \xi = h'[g(\vartheta_n)] g'(\vartheta_n) (x_n - \xi) = \frac{g'(\vartheta_n)}{f'(\vartheta_n)} (x_n - \xi),$$

gdzie  $\vartheta_n$  jest liczbą zawartą między  $x_n$  i  $\xi$ .

Jeżeli  $a < x_0 < b$ , to  $|x_0 - \xi| < b - a$ , ponieważ  $a < \xi < b$ . Z założenia (106a) i wzoru (107) wynika wtedy, że

$$|x_1 - \xi| < c(b - a).$$

Jeżeli

$$(108) \quad |x_n - \xi| < c^n(b - a),$$

wtedy liczba  $x_n$  leży w przedziale  $(a, \beta)$  i na mocy założenia (106a) i wzoru (107)

$$|x_{n+1} - \xi| < c|x_n - \xi| < c^{n+1}(b - a).$$

Zatem wzór (108) jest prawdziwy dla każdego naturalnego  $n$ . Wynika stąd, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi,$$

ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n+1} = 0$ .

Łatwo spostrzec, że gdy przyjmiemy  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ , to warunek (106a) można założyć tylko dla przedziału

$$\alpha = a - c \frac{b-a}{2} < x < \beta = b + c \frac{b-a}{2}$$

i twierdzenie powyższe pozostaje nadal prawdziwe.

Twierdzenie to pozostaje również prawdziwe, gdy zamiast warunku (106a) przyjąć, że w przedziale  $a = \alpha < x < \beta = b$  jest

$$(106b) \quad 0 \leq \frac{g'(x)}{f'(x)} \leq c < 1.$$

Błąd otrzymywanych przybliżeń szacować najwygodniej za pomocą wzoru (32).

Na rys. 11 podany jest przykładowo wykres przebiegu metody iteracji.

**PRZYKŁAD 11.** Rozwiązać metodą iteracji równanie (33) z przykładu 3.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

z dokładnością do 0,000001. Jak w przykładzie 3 zauważamy, że

$$f(2) = -1, \quad f(3) = 16.$$

W przedziale (2,3) leży zatem co najmniej jeden pierwiastek równania (33). Piszemy to równanie w postaci

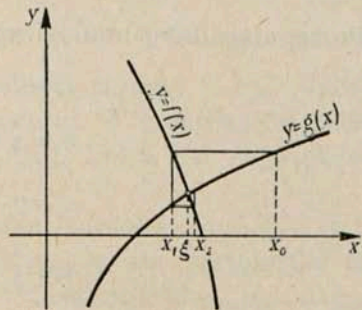
$$x^3 = 2x + 5,$$

a układ (104) w postaci

$$(109) \quad y = 2x + 5 = g(x), \quad f(x) = x^3 = y$$

i przyjmujemy  $a=2, b=3, c=1/2$ . Warunek (106b) ma wtedy postać

$$0 \leq \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{2}{3x^2} \leq \frac{1}{2}$$



Rys. 11



i jest spełniony w przedziale  $2 < x < 3$ . Zatem na mocy udowodnionego twierdzenia ciąg przybliżeń (105) będzie zbieżny do szukanego pierwiastka.

Przyjmujemy  $x = x_0 = 2,5$  i z pierwszego równania układu (109) obliczamy

$$y_1 = g(2,5) = 10,$$

a z drugiego równania

$$x_1 = \sqrt[3]{10} \approx 2,15.$$

Wykorzystujemy to przybliżenie do dalszej iteracji. Z pierwszego równania układu (109) obliczamy

$$y_2 = g(2,15) = 9,3,$$

a z drugiego równania

$$x_2 = \sqrt[3]{9,3} \approx 2,103.$$

Postępując dalej analogicznie otrzymujemy

$$y_3 = 2 \cdot 2,103 + 5 = 9,206,$$

$$x_3 = \sqrt[3]{9,206} \approx 2,096,$$

$$y_4 = 2 \cdot 2,096 + 5 = 9,192,$$

$$x_4 = \sqrt[3]{9,192} \approx 2,0948,$$

$$y_5 = 2 \cdot 2,0948 + 5 = 9,1896,$$

$$x_5 = \sqrt[3]{9,1896} \approx 2,09459,$$

$$y_6 = 2 \cdot 2,09459 + 5 = 9,18918,$$

$$x_6 = \sqrt[3]{9,18918} \approx 2,094557,$$

$$y_7 = 2 \cdot 2,094557 + 5 = 9,189114,$$

$$x_7 = \sqrt[3]{9,189114} \approx 2,094552,$$

$$y_8 = 2 \cdot 2,094552 + 5 = 9,189104,$$

$$y_8 = \sqrt[3]{9,189104} \approx 2,094551.$$

Ponieważ porównując liczby  $x_7$  i  $x_8$  domyślamy się, że  $x_8$  jest przybliżeniem z dostateczną dokładnością, szacujemy błąd tego przybliżenia tak, jak to było pokazane w przykładzie 3. Dalsze postępowanie jest takie samo, jak w tamtym przykładzie.







Postępując dalej analogicznie otrzymujemy ciąg liczb

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$$

takich, że

$$|\varepsilon_j| \leq |\varepsilon_i| \quad (j=1, 2, \dots, n; \quad i=0, 1, \dots)$$

i

$$|\varepsilon_{i+1}| < |\varepsilon_i|.$$

Przypuśćmy, że po kilku czy kilkunastu powtórzeniach takiego postępowania otrzymujemy układ przybliżeń  $x_1 = x_{1m}, x_2 = x_{2m}, \dots, x_n = x_{nm}$ , a po podstawieniu ich do (110) układ liczb  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$ , z których nie wszystkie są zerami. Chcemy wiedzieć, czy liczby  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  aproksymują pierwiastki  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  układu (110) z wystarczającą dokładnością. Jeżeli liczby  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$  mają interpretację np. fizykalną, to na ogół łatwo jest sprawdzić, czy aproksymują one liczbę zero z wystarczającą dokładnością (np. przez porównanie  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$  z odpowiadającymi im błędami pomiarowymi). Jeżeli możemy w ten sposób uznać liczby  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$  za dostatecznie bliskie zera, to tym samym przyjmujemy liczby  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  za dostatecznie dokładne przybliżenie rozwiązania szczególnego równań (110). Można to ująć inaczej. Uznajemy mianowicie liczby  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  za wystarczająco dokładne przybliżenie rozwiązania szczególnego równań (110), jeżeli ze względów np. fizykalnych dopuszczalne jest zastąpienie układu (110) układem

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_{1m},$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_{2m},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_{nm}.$$

Nie należy jednak zbyt pochopnie wyprowadzać wniosku o dokładności przybliżeń  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  na podstawie wielkości  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$ . Można łatwo podawać przykłady, w których przybliżenia  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  są obarczone bardzo dużymi błędami, mimo że liczby  $\varepsilon_{1m}, \varepsilon_{2m}, \dots, \varepsilon_{nm}$  są bardzo małe.

Ogólnej dyskusji, kiedy  $x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}$  można uważać za wystarczająco dokładne przybliżenie rozwiązania szczególnego (110), przeprowadzać nie będziemy. Należy jednak podkreślić, że w każdym konkretnym przypadku dyskusja taka jest potrzebna, chociaż może okazać się bardzo żmudna.

Metoda relaksacji wymaga może od rachującego więcej doświadczenia, sprytu czy intuicji niż inne metody, ale przez to, że zostawia mu dużo swobody w wyborze środków prowadzących do celu, daje nieraz możliwość wygodnego i szybkiego rachowania, dojścia do żądanych przybliżeń



krótką drogą. Przy pewnej wprawie można rozwiązywać metodą relaksacji np. układy kilkudziesięciu równań liniowych z kilkudziesięcioma niewiadomymi, nawet w przypadku, gdy współczynniki nie są na ogół zerami, w nadspodziewanie krótkim czasie.

PRZYKŁAD 12. Rozwiązać układ równań

$$(111) \quad \begin{aligned} 1,013xy - 0,981y + 1,026z + 4,450 &= 0, \\ 1,988x + 5,137y - 6,734z + 3,262 &= 0, \\ 1,008x + 3,809y - 11,533z + 1,994 &= 0, \end{aligned}$$

w którym współczynniki dane są z dokładnością do 0,0005.

Zastosujemy metodę relaksacji. Piszemy

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1,013xy - 0,981y + 1,026z + 4,450, \\ \varepsilon_2 &= 1,988x + 5,137y - 6,734z + 3,262, \\ \varepsilon_3 &= 1,008x + 3,809y - 11,533z + 1,994 \end{aligned}$$

i staramy się stopniowo tak dobierać wartości  $x, y, z$ , aby uczynić  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  możliwie małe. Rachunek zaczynamy od wartości  $x=y=z=0$ . Wtedy  $\varepsilon_1=+4,450$ ,  $\varepsilon_2=3,262$ ,  $\varepsilon_3=1,994$ . Największy moduł ma  $\varepsilon_1$ . Staramy się zatem przede wszystkim zmniejszyć ten moduł. W tym celu dajemy zmiennej  $y$  przyrost  $\Delta_1 y = 1$ . Aby nie spowodować zbyt dużego wzrostu modułów  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$ , dajemy jednocześnie zmiennej  $x$  przyrost  $\Delta_1 x = -4$ . Mamy wtedy

$$\begin{aligned} x &= -4, & y &= 1, & z &= 0, \\ \varepsilon_1 &= -0,583, & \varepsilon_2 &= 0,447, & \varepsilon_3 &= 1,771. \end{aligned}$$

Największy moduł ma teraz  $\varepsilon_3$ . Aby go zmniejszyć, dajemy zmiennej  $z$  przyrost  $\Delta_1 z = 0,12$ . Powoduje to następujące przyrosty wartości  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_1 &= 1,026 \cdot 0,12 = 0,12312, \\ \Delta \varepsilon_2 &= -6,734 \cdot 0,12 = -0,80808, \\ \Delta \varepsilon_3 &= -11,533 \cdot 0,12 = -1,38396. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x &= -4, & y &= 1, & z &= 0,12, \\ \varepsilon_1 &= -0,45988, & \varepsilon_2 &= -0,36108, & \varepsilon_3 &= 0,38704. \end{aligned}$$

Aby zmniejszyć moduł  $\varepsilon_1$ , dajemy zmiennej  $x$  przyrost  $\Delta_2 x = 0,4$ . Wtedy otrzymujemy

$$\begin{aligned} x &= -3,6, & y &= 1, & z &= 0,12, \\ \varepsilon_1 &= -0,05468, & \varepsilon_2 &= 0,43412, & \varepsilon_3 &= 0,79024. \end{aligned}$$



W ten sposób wzrosły co prawda moduły  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$ , ale wzrost ten łatwo usunąć dając zmiennej  $z$  przyrost  $\Delta_2 z = 0,07$ . Wtedy

$$x = -3,6, \quad y = 1, \quad z = 0,19,$$

$$\varepsilon_1 = 0,01714, \quad \varepsilon_2 = -0,03726, \quad \varepsilon_3 = -0,01707.$$

Dajemy teraz zmiennej  $y$  przyrost  $\Delta_2 y = 0,007$ . Wskutek tego mamy

$$x = -3,6, \quad y = 1,007, \quad z = 0,19,$$

$$\varepsilon_1 = -0,0152546, \quad \varepsilon_2 = -0,0013010, \quad \varepsilon_3 = 0,009593.$$

Dajemy następnie zmiennej  $x$  przyrost  $\Delta_3 x = 0,01$  i otrzymujemy  $\varepsilon_1 \approx -0,005054$ ,  $\varepsilon_2 = 0,018579$ ,  $\varepsilon_3 = 0,019673$ , potem dajemy zmiennej  $y$  przyrost  $\Delta_3 y = -0,001$  i zmiennej  $z$  przyrost  $\Delta_3 z = 0,001$  i otrzymujemy

$$x = -3,59, \quad y = 1,006, \quad z = 0,191,$$

$$\varepsilon_1 \approx 0,000590, \quad \varepsilon_2 = 0,006708, \quad \varepsilon_3 = 0,004331.$$

Dajemy teraz zmiennej  $x$  przyrost  $\Delta_4 x = -0,002$  i mamy

$$x = -3,592, \quad y = 1,006, \quad z = 0,191,$$

$$\varepsilon_1 \approx -0,001448, \quad \varepsilon_2 = 0,002732, \quad \varepsilon_3 = 0,002315,$$

a następnie zmiennej  $y$  przyrost  $\Delta_4 y = -0,0005$  i wtedy

$$x = -3,592, \quad y = 1,0055, \quad z = 0,191,$$

$$\varepsilon_1 \approx 0,000862, \quad \varepsilon_2 \approx 0,000164, \quad \varepsilon_3 \approx 0,000410.$$

Liczby  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  można uznać za wystarczająco małe, gdyż współczynniki układu (111) podane były z dokładnością do 0,0005. W takim razie mamy następujące przybliżone rozwiązanie układu (111):

$$x \approx -3,592, \quad y \approx 1,0055, \quad z \approx 0,191.$$

Ponieważ w układzie (111) pierwsze równanie jest drugiego, a pozostałe — pierwszego stopnia, układ ten ma co najwyżej dwa rozwiązania.

Przybliżenie drugiego rozwiązania można również znaleźć metodą relaksacji. Rachunek rozpoczynamy również od  $x=y=z=0$  i

$$\varepsilon_1 = 4,450, \quad \varepsilon_2 = 3,262, \quad \varepsilon_3 = 1,994.$$

Zmniejszenie modułów liczb  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  uzyskujemy dając zmiennej  $y$  przyrost  $\Delta y = -2$  i wyrównując jego wpływ na  $\varepsilon_1$  przez jednoczesne danie zmiennej  $x$  przyrostu  $\Delta x = 3$ . Jest wtedy

$$\varepsilon_1 \approx 0,334, \quad \varepsilon_2 \approx -1,048, \quad \varepsilon_3 \approx 2,600.$$

Postępując dalej analogicznie jak w przypadku pierwszego rozwiązania, dochodzimy do drugiego przybliżonego rozwiązania układu (111)

$$x \approx 2,911, \quad y \approx -2,119, \quad z \approx -0,273.$$