

Dla  $x = 0,105\pi$  jest  $\xi = 18 \cdot 0,105 - 0,5 = 1,39$ . Wzór (23) przybiera postać

$$(31) \quad y \approx 0,087156 + 0,171663 \cdot 1,39 - \\ - 0,007864 \binom{1,39}{2} - 0,004977 \binom{1,39}{3} + 0,000391 \binom{1,39}{4}.$$

Na mocy wzoru (30) jest  $\binom{1,39}{k} = \binom{0,39}{k-1} + \binom{0,39}{k}$ , skąd (tablica V)

$$\binom{1,39}{2} \approx 0,39 - 0,11895 = 0,27105,$$

$$\binom{1,39}{3} \approx -0,11895 + 0,06384 = -0,05511,$$

$$\binom{1,39}{4} \approx 0,06384 - 0,04165 = 0,02219.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (31) otrzymujemy

$$y \approx 0,32392.$$

Uwaga. Jak łatwo zauważyć, powyższy sposób rozwiązania jest na ogół dłuższy, niż poprzednio opisany oparty na współczynnikach Lagrange'a. Jeśli jednak różnice funkcji  $f(x)$  są znane i nie trzeba ich obliczać, to rozwiązanie powyższe znacznie się skraca. Ponadto użycie wzoru Newtona daje jedną bardzo poważną korzyść, której nie mamy stosując wzór Lagrange'a: jeśli zachodzi konieczność dodania jeszcze jednego lub więcej punktów, w których wartość funkcji  $f(x)$  jest dana i funkcja  $f(x)$  ma być wielomianem wyższego niż poprzednio stopnia, to rachunek wzorem Lagrange'a trzeba wykonywać od nowa, natomiast stosując wzór Newtona wyrazy już znalezione pozostawiamy nadal, a tylko dodajemy do nich wyrazy nowe rzędu wyższego. W ten sposób zaoszczędzamy dużo rachunków.

#### § 24. Wzór interpolacyjny Newtona z różnicami wstecznymi.

Ponieważ — jak to wynika ze sposobu wyprowadzenia — wzór (7) nie wymaga ustalenia kolejności punktów  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , więc można go wyprowadzić wychodząc we wzorze (6) z ilorazu różnicowego  $[x x_n x_{n-1} \dots x_0]$ . Wtedy wzór (7) przybierze postać

$$(32) \quad y = [x_n] + [x_n x_{n-1}](x - x_n) + [x_n x_{n-1} x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + [x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0](x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1).$$

Ponieważ — jak to wynika ze wzoru (43) w rozdziale II — wartość ilorazu różnicowego nie zależy od kolejności punktów, na których został obliczony, więc wzór (32) można napisać w postaci

$$(32a) \quad y = [x_n] + [x_{n-1} x_n](x - x_n) + [x_{n-2} x_{n-1} x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + [x_0 x_1 x_2 \dots x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Jeżeli teraz przyjmujemy, że punkty  $x_0, x_1, \dots, x_n$  położone są w równych odstępach, tj. że

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $h$  jest pewną stałą dodatnią, to na mocy wzoru (44) z rozdziału II możemy wzór (32a) napisać w postaci

$$(32b) \quad y = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_1)$$

albo, używając symboli różnic wstecznych podług wzoru (28) z rozdziału II i pisząc  $h = \Delta x$ ,

$$(32c) \quad y = y_n + \frac{V y_n \cdot (x - x_n)}{\Delta x \cdot 1!} + \frac{V^2 y_n \cdot (x - x_n)(x - x_{n-1})}{\Delta x^2 \cdot 2!} + \dots + \\ + \frac{V^n y_n \cdot (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)}{\Delta x^n \cdot n!}.$$

Ponieważ z różnic wstecznych korzystamy wtedy, gdy interesuje nas zachowanie się funkcji  $f(x)$  w otoczeniu punktu  $x_n$ , a tabelę różnic rozbudowuje się w kierunku malejących wskaźników w  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ , więc zazwyczaj zmienia się numerację punktów  $x_i$  pisząc wszędzie  $x_{i-n}$  zamiast  $x_i$ , to znaczy pisząc  $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}, x_0$  zamiast  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ . Mamy wtedy

$$(33) \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, -1, -2, \dots, -n,$$

a wzór (32c) przechodzi we wzór

$$(34) \quad y = y_0 + \frac{V y_0 \cdot (x - x_0)}{\Delta x \cdot 1!} + \frac{V^2 y_0 \cdot (x - x_0)(x - x_{-1})}{\Delta x^2 \cdot 2!} + \dots + \\ + \frac{V^n y_0 \cdot (x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_{-2}) \dots (x - x_{-n+1})}{\Delta x^n \cdot n!}.$$

Wzór ten nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Newtona z różnicami wstecznymi*.

Wygodnie jest użyć we wzorze (34) podstawienia

$$(35) \quad \xi = \frac{x_0 - x}{\Delta x}.$$



Wtedy

$$\begin{aligned}
 & \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_{-2})\dots(x-x_{-k+1})}{\Delta x^k k!} = \\
 &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{x-x_0}{\Delta x} \cdot \frac{x-x_0+\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{x-x_0+2\Delta x}{\Delta x} \dots \frac{x-x_0+(k-1)\Delta x}{\Delta x} = \\
 &= \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{x_0-x}{\Delta x} \cdot \frac{x_0-x-\Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{x_0-x-2\Delta x}{\Delta x} \dots \frac{x_0-x-(k-1)\Delta x}{\Delta x} = \\
 &= \frac{(-1)^k}{k!} \xi(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k+1) = (-1)^k \binom{\xi}{k}
 \end{aligned}$$

i wzór interpolacyjny (34) przybiera postać

$$(36) \quad y = y_0 - \nabla y_0 \xi + \nabla^2 y_0 \binom{\xi}{2} - \nabla^3 y_0 \binom{\xi}{3} + \dots + (-1)^n \nabla^n y_0 \binom{\xi}{n}.$$

Postać tę można zapisać symbolicznie jako

$$(37) \quad y = (1 - \nabla)^\xi y_0.$$

Rozwijając bowiem (37) według wzoru dwumiennego Newtona tak, jakbyśmy to uczynili, gdyby  $\nabla$  było symbolem liczby, i uwzględniając tylko pierwsze  $n+1$  wyrazów otrzymujemy formalnie wzór (36).

Jak widać z porównania wzorów (23) i (36), metoda poszukiwania wielomianu interpolacyjnego, jak też metody bezpośrednie obliczania wartości takiego wielomianu w danym punkcie  $x=\bar{x}$ , będą w przypadku stosowania wzoru interpolacyjnego Newtona z różnicami wstecznymi analogiczne do metod używanych w przypadku stosowania wzoru interpolacyjnego Newtona z różnicami zwykłymi. Sposób postępowania będzie ten sam, jedynie role różnic  $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$  będą grały liczby  $-\nabla y_0, \nabla^2 y_0, -\nabla^3 y_0, \dots, (-1)^n \nabla^n y_0$ .

**§ 25. Wzory interpolacyjne Gaussa, Stirlinga i Bessela.** Metodą podobną do użytej przy wyprowadzeniu wzoru interpolacyjnego Newtona z różnicami wstecznymi można wyprowadzić dwa następujące wzory:

$$\begin{aligned}
 (38) \quad y = y_0 &+ \frac{\Delta y_0}{\Delta x} \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{\Delta x^2} \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} + \\
 &+ \frac{\Delta^3 y_{-1}}{\Delta x^3} \cdot \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{3!} + \\
 &+ \frac{\Delta^4 y_{-2}}{\Delta x^4} \cdot \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{4!} + \\
 &+ \frac{\Delta^5 y_{-2}}{\Delta x^5} \cdot \frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{5!} + \dots + M_n,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$M_n = \begin{cases} \frac{\Delta^n y_{-n/2}}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x-x_{-n/2+1})(x-x_{-n/2+2}) \dots (x-x_{n/2-1})(x-x_{n/2})}{n!} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \frac{\Delta^n y_{-(n+1)/2}}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x-x_{-(n+1)/2})(x-x_{-(n+3)/2}) \dots (x-x_{(n-3)/2})(x-x_{(n-1)/2})}{n!} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

oraz

$$(39) \quad y = y_0 + \frac{\Delta y_{-1}}{\Delta x} \cdot \frac{x-x_0}{1!} + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{\Delta x^2} \cdot \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)}{2!} + \\ + \frac{\Delta^3 y_{-2}}{\Delta x^3} \cdot \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{3!} + \\ + \frac{\Delta^4 y_{-2}}{\Delta x^4} \cdot \frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{4!} + \\ + \frac{\Delta^5 y_{-3}}{\Delta x^5} \cdot \frac{(x-x_{-2})(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{5!} + \dots + N_n,$$

gdzie

$$N_n = \begin{cases} \frac{\Delta^n y_{-n/2}}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x-x_{-n/2})(x-x_{-n/2+1}) \dots (x-x_{n/2-2})(x-x_{n/2-1})}{n!} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \\ \frac{\Delta^n y_{-(n+1)/2}}{\Delta x^n} \cdot \frac{(x-x_{-(n-1)/2})(x-x_{-(n-3)/2}) \dots (x-x_{(n-3)/2})(x-x_{(n-1)/2})}{n!} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

Aby korzystać z tych wzorów, trzeba znać wartości funkcji  $y=f(x)$  dla  $x=x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, \dots$ , gdzie

$$(40) \quad x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i=0, -1, 1, -2, 2, \dots$$

Podstawiając do wzorów (38) i (39)

$$(41) \quad \xi = \frac{x-x_0}{\Delta x}$$

otrzymujemy

$$(42) \quad y = y_0 + \Delta y_0 \xi + \Delta^2 y_{-1} \binom{\xi}{2} + \Delta^3 y_{-1} \binom{\xi+1}{3} + \Delta^4 y_{-2} \binom{\xi+1}{4} + \\ + \Delta^5 y_{-2} \binom{\xi+2}{5} + \dots + M_n,$$



gdzie

$$M_n = \begin{cases} \Delta^n y_{-n/2} \left( \xi + \frac{n}{2} - 1 \right) & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \Delta^n y_{-(n-1)/2} \left( \xi + \frac{n-1}{2} \right) & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

oraz

$$(43) \quad y = y_0 + \Delta y_{-1} \xi + \Delta^2 y_{-1} \left( \frac{\xi+1}{2} \right) + \Delta^3 y_{-2} \left( \frac{\xi+1}{3} \right) + \Delta^4 y_{-2} \left( \frac{\xi+2}{4} \right) + \\ + \Delta^5 y_{-3} \left( \frac{\xi+2}{5} \right) + \dots + N_n,$$

gdzie

$$N_n = \begin{cases} \Delta^n y_{-n/2} \left( \xi + \frac{n}{2} \right) & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \Delta^n y_{-(n+1)/2} \left( \xi + \frac{n-1}{2} \right) & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Wzory (42) i (43) można zapisać używając symboli różnic centralnych. Jest wtedy

$$(44) \quad y = y_0 + \delta y_{1/2} \xi + \delta^2 y_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) + \delta^3 y_{1/2} \left( \frac{\xi+1}{3} \right) + \delta^4 y_0 \left( \frac{\xi+1}{4} \right) + \\ + \delta^5 y_{1/2} \left( \frac{\xi+2}{5} \right) + \dots + M_n,$$

gdzie

$$M_n = \begin{cases} \delta^n y_0 \left( \xi + \frac{n}{2} - 1 \right) & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \delta^n y_{1/2} \left( \xi + \frac{n-1}{2} \right) & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases}$$

oraz

$$(45) \quad y = y_0 + \delta y_{-1/2} \xi + \delta^2 y_0 \left( \frac{\xi+1}{2} \right) + \delta^3 y_{-1/2} \left( \frac{\xi+1}{3} \right) + \delta^4 y_0 \left( \frac{\xi+2}{4} \right) + \\ + \delta^5 y_{-1/2} \left( \frac{\xi+2}{5} \right) + \dots + N_n,$$

gdzie

$$N_n = \begin{cases} \delta^n y_0 \binom{\xi + \frac{n}{2}}{n} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \delta^n y_{-1/2} \binom{\xi + \frac{n-1}{2}}{n} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Wzór postaci (38), (42) lub (44) nazywamy *wzorem interpolacyjnym Gaussa*. Wzór postaci (39), (43) lub (45) nazywamy *wstecznym wzorem interpolacyjnym Gaussa*.

Biorąc średnią arytmetyczną obu wzorów Gaussa otrzymujemy po uporządkowaniu *wzór interpolacyjny Stirlinga*.

Wychodząc ze wzorów Gaussa (44) i (45) otrzymujemy wzór Stirlinga w postaci

$$(46) \quad y = y_0 + \mu \delta y_0 \xi + \delta^2 y_0 \frac{\xi^2}{2!} + \mu \delta^3 y_0 \frac{\xi(\xi^2 - 1)}{3!} + \delta^4 y_0 \frac{\xi^2(\xi^2 - 1)}{4!} + \\ + \mu \delta^5 y_0 \frac{\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2^2)}{5!} + \delta^6 y_0 \frac{\xi^2(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2^2)}{6!} + \dots + P_n,$$

gdzie  $\mu \delta^i y_0$  oznacza średnią  $i$ -tej różnicy centralnej zgodnie ze wzorem (38) w rozdziale II oraz

$$P_n = \begin{cases} \delta^n y_0 \frac{\xi^2(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2^2) \dots \left[ \xi^2 - \left( \frac{n}{2} - 1 \right)^2 \right]}{n!} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \mu \delta^n y_0 \frac{\xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2^2) \dots \left[ \xi^2 - \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 \right]}{n!} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Biorąc średnią arytmetyczną wzoru interpolacyjnego Gaussa z punktem centralnym  $x_0$  i wstecznego wzoru interpolacyjnego Gaussa z punktem centralnym  $x_1$  otrzymujemy po uporządkowaniu *wzór interpolacyjny Bessela*. Jeżeli wyprowadzimy go ze wzorów Gaussa (44) i (45) i podstawimy

$$(47) \quad \tau = \xi - \frac{1}{2} = \frac{x - x_0}{h} - \frac{1}{2},$$



to wzór Bessela przybierze postać

$$\begin{aligned}
 (47a) \quad y = & \mu y_{1/2} + \delta y_{1/2} \tau + \mu \delta^2 y_{1/2} \frac{\left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right)}{2!} + \delta^3 y_{1/2} \frac{\tau \left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right)}{3!} + \\
 & + \mu \delta^4 y_{1/2} \frac{\left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{9}{4}\right)}{4!} + \delta^5 y_{1/2} \frac{\tau \left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{9}{4}\right)}{5!} + \\
 & + \mu \delta^6 y_{1/2} \frac{\left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{9}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{25}{4}\right)}{6!} + \dots + R_n,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$R_n = \begin{cases} \mu \delta^n y_{1/2} \frac{\left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{9}{4}\right) \dots \left[\tau^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]}{n!} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \delta^n y_{1/2} \frac{\tau \left(\tau^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\tau^2 - \frac{9}{4}\right) \dots \left[\tau^2 - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right]}{n!} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Wzory interpolacyjne Gaussa, Stirlinga i Bessela stosujemy wtedy, gdy interesuje nas zachowanie się funkcji  $f(x)$  w otoczeniu punktu  $x=x_0$  i mamy możliwość rozbudowywania tabeli różnic po obu stronach tego punktu.

Najwygodniej jest używać w tych wzorach symboli różnic centralnych.

Wzory Stirlinga i Bessela mają tę wyższość nad wzorami Gaussa, że są symetryczne: wzór Stirlinga względem punktu  $x_0$ , a wzór Bessela względem punktu  $x_{1/2}$ . Wzory Gaussa mają natomiast tę wyższość nad wzorami Stirlinga i Bessela, że współczynniki przy kolejnych różnicach są współczynnikami dwumiennymi Newtona. Mając tablice tych współczynników można z łatwością korzystać zarówno z obu wzorów interpolacyjnych Newtona, jak i ze wzorów Gaussa.

Do wygodnego używania wzorów Stirlinga lub Bessela potrzeba osobnych tablic współczynników dla każdego z tych wzorów oddzielnie. Pod względem wygody i zakresu zastosowań oba wzory Gaussa są równoważne.

Podobnie równoważne są wzory Stirlinga i Bessela.



**§ 26. Wzór Everetta.** Niech wielomian  $y=f(x)$  będzie co najwyżej stopnia  $2n+1$  i niech w punktach

$$x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$$

przybiera wartości

$$y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}.$$

Niech punkty  $x_{-n}, \dots, x_{n+1}$  będą położone w równych odstępach, tj. niech

$$(48) \quad x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n, n+1,$$

gdzie  $\Delta x$  jest pewną stałą różną od zera.

Wprowadzimy dwie nowe zmienne  $\xi$  i  $\bar{\xi}$  określone wzorami

$$(49) \quad \xi = \frac{x - x_0}{\Delta x}, \quad \bar{\xi} = 1 - \xi.$$

Wielomian  $y=f(x)$  daje się wtedy przedstawić w postaci

$$(50) \quad y = \xi y_0 + \binom{\bar{\xi}+1}{3} \delta^2 y_0 + \binom{\bar{\xi}+2}{5} \delta^4 y_0 + \dots + \binom{\bar{\xi}+n}{2n+1} \delta^{2n} y_0 + \\ + \xi y_1 + \binom{\xi+1}{3} \delta^2 y_1 + \binom{\xi+2}{5} \delta^4 y_1 + \dots + \binom{\xi+n}{2n+1} \delta^{2n} y_1,$$

gdzie  $\delta^2 y_0, \delta^2 y_1, \delta^4 y_0 \dots$  oznaczają różnice centralne funkcji  $f(x)$  w punktach  $x_0$  i  $x_1$ . Wzór (50) nosi nazwę *wzoru Everetta*.

Wykażemy prawdziwość wzoru (50).

Zauważmy przede wszystkim, że symbol  $\binom{\xi+k}{l}$  oznacza pewien wielomian stopnia  $l$  względem  $\xi$ . Mamy bowiem na mocy definicji tego symbolu

$$\binom{\xi+k}{l} = \frac{(\xi+k)(\xi+k-1)\dots(\xi+k-l+1)}{l!}.$$

Zatem po podstawieniu nowych zmiennych wyrażonych wzorami (49) do wielomianu (50) otrzymujemy wielomian co najwyżej stopnia  $2n+1$  względem  $x$ .

Na mocy twierdzenia 1 wystarczy zatem wykazać, że dla

$$x = x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1},$$

a więc dla

$$\xi = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n, n+1,$$

otrzymujemy ze wzoru (50)

$$y = y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}.$$



Otóż na mocy wzorów (38) i (4) z rozdziału II jest

$$\begin{aligned}
 \delta^2 y_0 &= y_{-1} - 2y_0 + y_1, \\
 \delta^2 y_1 &= y_0 - 2y_1 + y_2, \\
 \delta^4 y_0 &= y_{-2} - 4y_{-1} + 6y_0 - 4y_1 + y_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \delta^{2n} y_0 &= y_{-n} - \binom{2n}{1} y_{-n+1} + \binom{2n}{2} y_{-n+2} - \dots - \binom{2n}{2n-1} y_{n-1} + y_n, \\
 \delta^{2n} y_1 &= y_{-n+1} - \binom{2n}{1} y_{-n+2} + \binom{2n}{2} y_{-n+3} - \dots - \binom{2n}{2n-1} y_n + y_{n+1}.
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Układ równań (51) posiada dla danych  $y_0, y_1, \delta^2 y_0, \delta^2 y_1, \delta^4 y_0, \dots, \delta^{2n} y_0, \delta^{2n} y_1$  jednoznaczne rozwiązanie na  $y_{-1}, y_2, y_{-2}, y_3, \dots, y_{-n}, y_{n+1}$ .

Dla okazania prawdziwości wzoru (50) wystarczy zatem okazać, iż otrzymujemy z niego

$$\begin{aligned}
 \delta^{2i} y &= \delta^{2i} y_0 \quad \text{dla} \quad \xi = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\
 \delta^{2i} y &= \delta^{2i} y_1 \quad \text{dla} \quad \xi = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Otóż na mocy wzoru (38) z rozdziału II dla ustalonych  $k$  i  $l$  mamy

$$\begin{aligned}
 \delta^{2i} \binom{\xi + k}{l} &= \Delta^{2i} \binom{\xi - i + k}{l} = \\
 &= \Delta^{2i} \frac{(\xi - i + k)(\xi - i + k - 1) \dots (\xi - i + k - l + 1)}{l!} = \\
 &= \Delta^{2i} \frac{(\xi - i + k)^{(l)}}{l!}, \\
 \delta^{2i} \binom{\xi + k}{l} &= \delta^{2i} \binom{k + 1 - \xi}{l} = \Delta^{2i} \binom{k + 1 - \xi + i}{l} = \\
 &= \Delta^{2i} \frac{(k + i - \xi + 1)(k + i - \xi)(k + i - \xi - 1) \dots (k + i - \xi - l + 2)}{l!} = \\
 &= (-1)^l \Delta^{2i} \frac{(\xi - i - k + l - 2)^{(l)}}{l!}.
 \end{aligned}$$

Dla  $l \geq 2i$  jest na mocy wzoru (14) z rozdziału II dla ustalonego  $\alpha$

$$\Delta^{2i} \frac{(\xi + \alpha)^{(l)}}{l!} = \frac{l(l-1) \dots (l-2i+1)}{l!} (\xi + \alpha)^{(l-2i)} = \frac{(\xi + \alpha)^{(l-2i)}}{(l-2i)!} = \binom{\xi + \alpha}{l-2i},$$

a dla  $l < 2i$  na mocy twierdzenia 1 z rozdziału II

$$\Delta^{2i} [(\xi + \alpha)^{(l)} / l!] = 0.$$

Zatem dla  $l \geq 2i$

$$\begin{aligned}
 \delta^{2i} \binom{\xi+k}{l} &= \binom{\xi+k-i}{l-2i}, \\
 (52) \quad \delta^{2i} \binom{\bar{\xi}+k}{l} &= (-1)^l \binom{\xi-i-k+l-2}{l-2i} = \\
 &= (-1)^l \frac{(\xi-i-k+l-2)(\xi-i-k+l-3)\dots(\xi+i-k-1)}{(l-2i)!} = \\
 &= \frac{(\bar{\xi}+k-i)(\xi+k-i-1)\dots(\bar{\xi}+k+i-l+1)}{(l-2i)!} = \binom{\bar{\xi}+k-i}{l-2i},
 \end{aligned}$$

a dla  $l < 2i$

$$(52a) \quad \delta^{2i} \binom{\xi+k}{l} = \delta^{2i} \binom{\bar{\xi}+k}{l} = 0.$$

Ze wzorów (50), (52) i (52a) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \delta^{2i} y &= \binom{\bar{\xi}}{1} \delta^{2i} y_0 + \binom{\bar{\xi}+1}{3} \delta^{2i+2} y_0 + \dots + \binom{\bar{\xi}+n-i}{2n+1-2i} \delta^{2n} y_0 + \\
 &+ \binom{\xi}{1} \delta^{2i} y_1 + \binom{\xi+1}{3} \delta^{2i+2} y_1 + \dots + \binom{\xi+n-i}{2n+1-2i} \delta^{2n} y_1.
 \end{aligned}$$

Dla  $\xi=0$  (a więc dla  $\bar{\xi}=1$ ) jest

$$\binom{\bar{\xi}}{1} = 1, \quad \binom{\xi}{1} = 0, \quad \binom{\bar{\xi}+1}{3} = \binom{\xi+1}{3} = \dots = 0,$$

a dla  $\xi=1$  (a więc dla  $\bar{\xi}=0$ ) jest

$$\binom{\xi}{1} = 1, \quad \binom{\bar{\xi}}{1} = 0, \quad \binom{\bar{\xi}+1}{3} = \binom{\xi+1}{3} = \dots = 0.$$

Zatem dla  $\xi=0$  jest  $\delta^{2i} y = \delta^{2i} y_0$  i dla  $\xi=1$  jest  $\delta^{2i} y = \delta^{2i} y_1$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ), c. b. d. d.

W tablicy VI na końcu książki podane są współczynniki  $\binom{\xi+1}{3}$  i  $\binom{\xi+2}{5}$  dla  $\xi=0, 0,01, 0,02, \dots, 1,00^1$ ). Pozwala to na szybkie obliczenie wartości wielomianu  $f(x)$  w określonym punkcie za pomocą wzoru Everetta, jeżeli  $n=1$  lub  $n=2$ .

<sup>1)</sup> Jednym z największych wydawnictw w tej dziedzinie jest: A. J. Thompson, *Table of the Coefficients of Everett's Central-Difference Interpolation Formula*, Tracts for Computers, N° 5, wyd. II, London, Cambridge University Press.



Różnice  $\delta^2 y_0, \delta^2 y_1, \delta^4 y_0 \dots$  we wzorze (50) najwygodniej obliczać nie jako różnice centralne, a jako różnice zwykłe zgodnie ze wzorami (38) i (39) z rozdziału II, tj. według schematu następującego (podkreślone różnice wchodzą do wzoru Everetta):

$$(53) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} x & y & & & & & & & \\ \hline x_{-n} & y_{-n} & \Delta y_{-n} & \Delta^2 y_{-n} = \delta^2 y_{-n+1} & & & & & \\ x_{-n+1} & y_{-n+1} & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ x_{-2} & y_{-2} & \Delta y_{-2} & \Delta^2 y_{-2} = \delta^2 y_{-1} & \Delta^3 y_{-2} & \Delta^4 y_{-2} = \delta^4 y_{-1} & \Delta^5 y_{-2} & \Delta^6 y_{-2} = \delta^6 y_{-1} \\ x_{-1} & y_{-1} & \Delta y_{-1} & \Delta^2 y_{-1} = \delta^2 y_0 & \Delta^3 y_{-1} & \Delta^4 y_{-1} = \delta^4 y_0 & \Delta^5 y_{-1} & \Delta^6 y_{-1} = \delta^6 y_0 \\ x_0 & y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 = \delta^2 y_1 & \Delta^3 y_0 & \Delta^4 y_0 = \delta^4 y_1 & \Delta^5 y_0 & \Delta^6 y_0 = \delta^6 y_1 \\ x_1 & y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 = \delta^2 y_2 & \Delta^3 y_1 & \Delta^4 y_1 = \delta^4 y_2 & \Delta^5 y_1 & \Delta^6 y_1 = \delta^6 y_2 \\ x_2 & y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 = \delta^2 y_3 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \Delta y_n & \Delta^2 y_{n-1} = \delta^2 y_n & & & & \\ y_{n+1} & y_{n+1} & & & & & & \end{array}$$

PRZYKŁAD 11. Funkcja  $y=f(x)$  przybiera w punktach  $-\pi/36, \pi/36, 3\pi/36, 5\pi/36, 7\pi/36, 9\pi/36$  wartości  $-0,087156, 0,087156, 0,258819, 0,422618, 0,573576, 0,707107$ . Obliczyć wartość funkcji  $f(x)$  dla  $x=0,105\pi$ , zakładając, że  $f(x)$  jest wielomianem stopnia co najwyżej piątego.

Stosujemy wzór Everetta. Najpierw sporządzamy tabelkę różnic.

$x$	$y$			
$-\pi/36$	<u>-0,087156</u>	174312		
$\pi/36$	0,087156	-2649	-5215	
$x_0 = 3\pi/36$	<u>0,258819</u>	171663	-7864	238
		163799	-4977	
$x_1 = 5\pi/36$	<u>0,422618</u>	-12841	-4586	391
		150958		
$7\pi/36$	0,573576	-17427		
		133531		
$9\pi/36$	<u>0,707107</u>			



Podkreślone różnice wchodzą do wzoru Everetta. Wprowadzamy nową zmienną  $\xi$  zgodnie z (49)

$$\xi = \frac{x - \frac{3\pi}{36}}{\frac{2\pi}{36}} = 18 \frac{x}{\pi} - 1,5.$$

Dla  $x = 0,105\pi$  jest  $\xi = 18 \cdot 0,105 - 1,5 = 0,39$ ,  $\bar{\xi} = 1 - \xi = 0,61$ .

W tabelicy VI na końcu książki odczytujemy dla  $\xi = 0,39$  i  $\bar{\xi} = 0,61$

$$\begin{aligned} \binom{\xi+1}{3} &\approx -0,05511, & \binom{\bar{\xi}+1}{3} &\approx -0,06384, \\ \binom{\xi+2}{5} &\approx 0,01060, & \binom{\bar{\xi}+2}{5} &\approx 0,01158. \end{aligned}$$

Wzór Everetta (50) przybiera zatem postać

$$\begin{aligned} y &\approx 0,61 \cdot 0,258819 + 0,06384 \cdot 0,007864 + 0,01158 \cdot 0,000238 + \\ &\quad + 0,39 \cdot 0,422618 + 0,05511 \cdot 0,012841 + 0,01060 \cdot 0,000391 \approx \\ &\approx 0,32392. \end{aligned}$$

**§ 27. Wybór wzoru interpolacyjnego.** Twierdzenie 1 orzeka, że istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny, który w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ) przybiera wartości  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Wynik obliczeń interpolacyjnych nie zależy zatem od wyboru wzoru interpolacyjnego.

Gdybyśmy szukali nie wielomianu, lecz tylko jego wartości w określonym punkcie, to również wypadnie ona ta sama z każdego z opisanych wzorów interpolacyjnych. Jeżeli stosujemy nieraz różne wzory interpolacyjne, to dlatego, że chcemy mieć rachunki możliwie proste i krótkie. Ocena prostoty, a nawet długości rachunków, bywa nieraz subiektywna. Dlatego też wybór właściwej metody rachunku zależy w pewnej mierze od możliwości, gustu i sprytu rachującego.

Podamy kilka naszych uwag dotyczących wyboru wzoru interpolacyjnego. Rozróżniliśmy cztery główne typy zagadnień interpolacji wielomianami:

I. Poszukiwanie wielomianu stopnia co najwyżej  $n$ , którego wartości w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  są znane, przy czym punkty te położone są w równych odstępach, tj.

$$x_i = x_0 + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie  $\Delta x$  jest pewną stałą różną od zera.

II. Poszukiwanie wartości wielomianu, określonego w I, w określonym punkcie.



III. Poszukiwanie wielomianu stopnia co najwyżej  $n$ , którego wartości w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  różnych pomiędzy sobą są znane, przy czym punkty te nie są położone w równych odstępach.

IV. Poszukiwanie wartości wielomianu określonego w III w określonym punkcie.

W przypadku zagadnienia typu I najwygodniej korzystać z metody zastosowanej w przykładzie 6. Gdy znane są różnice  $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ , równie dogodna jest metoda zastosowana w przykładzie 9.

W przypadku zagadnienia typu II, najczęściej spotykanego, najwygodniej korzystać ze wzoru (18), gdy dane są tablice współczynników Lagrange'a. Gdy nie mamy takich tablic, wybór wzoru interpolacyjnego zależeć winien od położenia punktu  $x = \bar{x}$ , w którym mamy obliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego. Jeśli  $\bar{x}$  leży blisko  $x_0$ , a nie mamy tablicy różnic dla  $x = x_{-1}, x_{-2}, \dots$ , to należy korzystać ze wzoru Newtona

(23). Jest on bardzo wygodny, gdy mamy tablice współczynników  $\begin{pmatrix} \xi \\ k \end{pmatrix}$ ,

a tym bardziej gdy podane są już różnice  $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots$ . Jeśli  $\bar{x}$  leży blisko  $x_n$ , a nie mamy tablicy różnic dla  $x = x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$  albo — co na jedno wychodzi — jeśli  $\bar{x}$  leży blisko  $x_0$ , a mamy tabelę różnic jedynie dla  $x = x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots$ , to korzystamy ze wzoru Newtona z różnicami wstecznymi, najlepiej w postaci (36) szczególnie dogodnej, gdy się ma tablice współczynników  $\begin{pmatrix} \xi \\ k \end{pmatrix}$ . Jeśli  $\bar{x}$  leży w środkowej części przedziału  $(x_0, x_n)$  albo — co

na jedno wychodzi — jeżeli  $\bar{x}$  leży blisko  $x_0$ , a tablicę różnic możemy rozbudować po obu stronach punktu  $x_0$ , to stosuje się wzory Gaussa, Stirlinga, Bessela lub Everetta. Najczęściej stosuje się wzór Everetta, zwłaszcza do interpolacji w tablicach, gdyż pozwala on ograniczyć się do podawania różnic rzędów parzystych i jest bardzo wygodny w większości zastosowań.

Gdy wielomian interpolacyjny nie jest identyczny z funkcją, którą chcemy interpolować, i traktujemy go jako aproksymację tej funkcji, to musimy przy wyborze wzoru interpolacyjnego mieć na uwadze również błędy aproksymacji. Będzie o tym mowa w rozdziale następnym.

W przypadku zagadnienia typu III korzystamy najchętniej ze wzoru Lagrange'a (1) lub z metody ilorazów różnicowych, tj. ze wzoru (7). Metoda Aitkena daje zbyt żmudne rachunki.

Wreszcie w przypadku zagadnienia typu IV można z powodzeniem korzystać zarówno ze wzoru Lagrange'a (1) lub metody Aitkena podług schematu (5), jak również z metody ilorazów różnicowych, tj. ze wzoru (7). Przy pewnej wprawie metoda ilorazów różnicowych jest bodajże najwygodniejsza.



§ 28. Interpolacja funkcjami wymiernymi. Zagadnienie interpolacji funkcjami wymiernymi sprowadza się do znalezienia funkcji wymiernej

$$(54) \quad y = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \quad (b_n \neq 0),$$

która by w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_{m+n}$  ( $x_0 < x_1 < \dots < x_{m+n}$ ) przybierała wartości  $y_0, y_1, \dots, y_{m+n}$ . Funkcja taka, jak później zobaczymy, dla z góry ustalonych  $m$  i  $n$  nie zawsze istnieje.

Wzór (54) możemy napisać w postaci

$$(55) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m - b_0 y - b_1 xy - b_2 x^2 y - \dots - b_n x^n y = 0.$$

Podstawiając tu kolejno pary liczbowe  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots$  otrzymujemy  $m+n+1$  równań z  $m+n+2$  niewiadomymi  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n$

$$(56) \quad a_0 + x_i a_1 + \dots + x_i^m a_m - y_i b_0 - x_i y_i b_1 - \dots - x_i^n y_i b_n = 0,$$

gdzie  $i=0, 1, \dots, m+n$ . Przyjmując  $b_n=1$  otrzymujemy układ  $m+n+1$  równań z  $m+n+1$  niewiadomymi. Układ taki — jak wiadomo — nie zawsze posiada rozwiązanie. Nie zawsze też będzie istniała funkcja (54), która w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_{m+n}$  przybiera wartości  $y_0, y_1, \dots, y_{m+n}$ .

Kwestii istnienia funkcji (54) jak też jednoznaczności rozwiązań omawiać tu nie będziemy.

Zauważmy jeszcze, że w wielu przypadkach funkcję (54) można znaleźć z warunku

$$(57) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^m & -y & -xy & -x^2y & \dots & -x^ny \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m & -y_0 & -x_0y_0 & -x_0^2y_0 & \dots & -x_0^ny_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m & -y_1 & -x_1y_1 & -x_1^2y_1 & \dots & -x_1^ny_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \dots & x_{m+n}^m & -y_{m+n} & -x_{m+n}y_{m+n} & -x_{m+n}^2y_{m+n} & \dots & -x_{m+n}^ny_{m+n} \end{vmatrix} = 0.$$

Gdyby bowiem warunek (57) nie był spełniony, to układ  $m+n+2$  równań, jaki otrzymamy dołączając do równań (56) równanie (55), miałby tylko jedno rozwiązanie:  $a_0 = a_1 = \dots = a_m = b_0 = b_1 = \dots = b_n = 0$ .

PRZYKŁAD 12. Znaleźć funkcję wymierną

$$y = \frac{a + bx + cx^2}{d + ex + fx^2},$$

która w punktach  $-2, -1, 0, 1, 2$  przybiera wartości  $8, -2, 1, -4, 10$ .



Wzór (55) przybierze tu postać

$$a + bx + cx^2 - dy - exy - fx^2y = 0,$$

a warunek (57) — postać

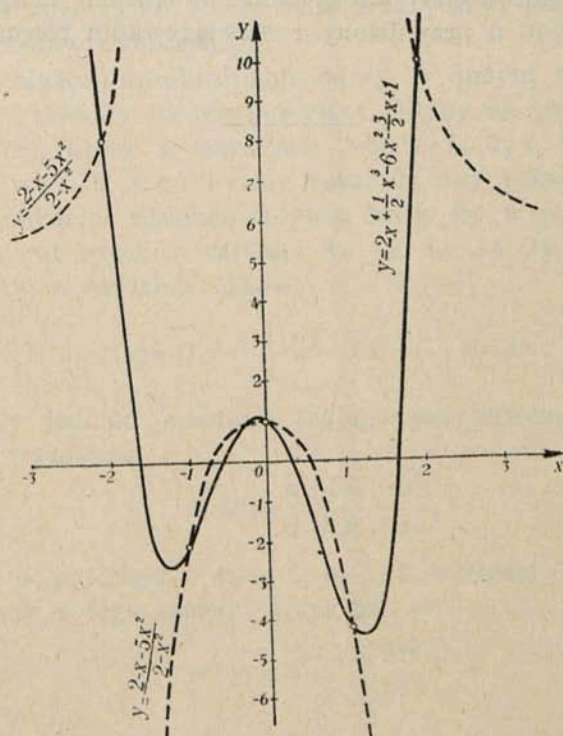
$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & -y & -xy & -x^2y \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & -10 & -20 & -40 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$-2 + x + 5x^2 + 2y - x^2y = 0,$$

skąd

$$(58) \quad y = \frac{2 - x - 5x^2}{2 - x^2}.$$



Rys. 2

Na rysunku 2 mamy przebieg funkcji (58), a ponadto dla porównania przebieg wielomianu

$$y = 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{3}{2}x + 1,$$

który w punktach  $-2, -1, 0, 1, 2$  przybiera, podobnie jak funkcja (58), wartości  $8, -2, 1, -4, 10$ .

**§ 29. Interpolacja odwrotna.** W rachunkach numerycznych spotykamy się często z następującym zagadnieniem interpolacyjnym:

Znane są wartości  $y_0, y_1, \dots, y_n$  funkcji  $y = f(x)$  w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ); szukamy funkcji odwrotnej  $x = g(y)$  przy założeniu, że funkcja taka  $g(y)$  istnieje i jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n$ .

Zagadnienie to sprowadza się do interpolacji zwykłej, gdy  $x_0, x_1, \dots, x_n$  traktować będziemy jako wartości funkcji  $x = g(y)$  zmiennej niezależnej  $y$  w punktach  $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ .

Ponieważ z reguły wartości  $y_0, y_1, \dots, y_n$  nie są położone w równych odstępach, więc do interpolacji odwrotnej stosujemy metodę Aitkena lub metodę ilorazów różnicowych.

Przykłady stosowania interpolacji odwrotnej znajdzie czytelnik w rozdziale V, § 46 o przybliżonym rozwiązywaniu równań.