

Na mocy (73) jest

$$(87) \quad x_i = \frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{b+a}{2} \quad (i=0,1,2,3).$$

Wzór (68) przybierze postać

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{4} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3),$$

gdzie $f(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym funkcji $F(x)$, który w punktach (87) ma z funkcją $F(x)$ te same wartości y_0, y_1, y_2, y_3 . Punkty (87)

obliczamy z wartości (86). Błąd, z jakim liczba I przybliża całkę $\int_a^b F(x) dx$, szacujemy ze wzoru (80).

Czytelnik interesujący się metodą Czebyszewa może znaleźć bardziej szczegółowe informacje w cytowanej już książce Sz. E. Mikeladzego¹⁾ jak również w książce I. P. Natanson²⁾.

Warto tu jednak podkreślić, że S. N. Bernsztejn udowodnił, iż układ (84) nie ma rozwiązań rzeczywistych dla $n > 9$. Wiadomo również, że dla $n=8$ układ ten nie ma rozwiązań rzeczywistych. Natomiast dla $n=1, 2, \dots, 7$ układ (84) ma rozwiązanie rzeczywiste, znalezione przez P. L. Czebyszewa.

§ 68. Metoda Gaussa. Metodą Gaussa nazywamy sposób obliczania

wartości przybliżonej I całki $\int_a^b F(x) dx$ ze wzoru (68), w którym y_0, y_1, \dots

\dots, y_n oznaczają wartości tej funkcji w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , odpowiadających według wzoru (73) wartościom $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ zmiennej pomocniczej ξ , a liczby $A_0, A_1, \dots, A_n, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ dobiera się tak, by była spełniona jak największa liczba równań typu (75), tzn. tak, by wzór (68) był dokładny dla wielomianów $f(x)$ możliwie wysokiego stopnia.

Zakładamy, że dana funkcja $F(x)$, której całkę $\int_a^b F(x) dx$ mamy obliczyć, ma w przedziale $[a, b]$ pochodną $F^{(2n+2)}(x)$ rzędu $2n+2$ i że zachodzi nierówność $M_{2n+2}^- \leq F^{(2n+2)}(x) \leq M_{2n+2}^+$, gdzie M_{2n+2}^-, M_{2n+2}^+ są stałymi, skąd

$$(88) \quad |F^{(2n+2)}(x) - F_{2n+2}| \leq M_{2n+2},$$

¹⁾ Ibidem, str. 345.

²⁾ И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва-Ленинград 1949, str. 641.

gdzie

$$(88a) \quad F_{2n+2} = \frac{M_{2n+2}^+ + M_{2n+2}^-}{2} \quad \text{i} \quad M_{2n+2} = \frac{M_{2n+2}^+ - M_{2n+2}^-}{2}.$$

Punkty x_0, x_1, \dots, x_n i liczby A_0, A_1, \dots, A_n dobierzemy tak, by wzór (68) był prawdziwy dla wszelkich wielomianów $f(x)$ stopnia $2n+1$. W tym celu wprowadzamy dla wygody nową zmienną ξ , określoną wzorem (69). Wtedy punktom x_0, x_1, \dots, x_n odpowiadają wartości $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ określone wzorem

$$(73), \text{ a całce } I \text{ ze wzoru (68) — całka } \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi, \text{ związana z całką } I \text{ wzorem}$$

(70). Funkcja $\varphi(\xi)$ związana jest z funkcją $f(x)$ wzorem (69a) i jest oczywiście wielomianem stopnia $2n+1$ jak funkcja $f(x)$. Aby wzór (68) był dokładny dla wszelkich wielomianów stopnia $2n+1$, potrzeba i wystarcza, aby wzór (71) był dokładny dla wielomianów tegoż stopnia. Niech

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_{2n+1} \xi^{2n+1}.$$

Stąd

$$(89) \quad y_i = f(x_i) = \varphi(\xi_i) = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \xi_i^2 + \dots + a_{2n+1} \xi_i^{2n+1} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

oraz

$$(90) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \dots + \frac{1}{2n+1} a_{2n}.$$

Podstawiając wzory (89) i (90) do (71) i przyrównując współczynniki przy $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ po obu stronach znaku równości (co zapewnia prawdziwość wzoru (71) dla wszelkich wartości $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$) otrzymujemy układ $2n+2$ równań z $2n+2$ niewiadomymi $A_0, A_1, \dots, A_n, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$:

$$(91) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n A_i &= 1, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i A_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^2 A_i &= \frac{1}{3}, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^3 A_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^4 A_i &= \frac{1}{5}, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^{2n+1} A_i &= 0. \end{aligned}$$

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem tego układu. W tym celu wprowadzimy wielomian pomocniczy

$$(92) \quad \psi_n(\xi) = (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n)$$

i wykazemy, że na to, by liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ były pierwiastkami układu (91), tzn. by wzór (71) był prawdziwy dla wszelkich wielomianów stopnia $2n+1$, potrzeba i wystarcza, by funkcja $\psi_n(\xi)$ była ortogonalna do każdego wielomianu $\sigma(\xi)$ stopnia co najwyżej n , tzn. by

$$(93) \quad \int_{-1}^{+1} \psi_n(\xi) \sigma(\xi) d\xi = 0.$$

Konieczność warunku (93) wynika z faktu, iż funkcja

$$\Phi_n(\xi) = \psi_n(\xi) \sigma(\xi) = (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \dots (\xi - \xi_n) \sigma(\xi)$$

jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n+1$, więc na mocy (71) ma być

$$\int_{-1}^{+1} \Phi_n(\xi) d\xi = 2A_0 \Phi_n(\xi_0) + 2A_1 \Phi_n(\xi_1) + \dots + 2A_n \Phi_n(\xi_n) = 0.$$

Wykażemy teraz dostateczność warunku (93). Niech $\varphi(\xi)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia co najwyżej $2n+1$. Dzieląc wielomian $\varphi(\xi)$ przez wielomian $\psi_n(\xi)$ otrzymujemy

$$(94) \quad \varphi(\xi) = \sigma(\xi) \psi_n(\xi) + \varrho(\xi),$$

gdzie $\sigma(\xi)$ i $\varrho(\xi)$ są wielomianami stopnia co najwyżej n .

Na mocy (93) jest zatem

$$(95) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \varrho(\xi) d\xi.$$

Ponieważ — jak wykazaliśmy — układ (75) ma zawsze dla ustalonych i różnych $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ dokładnie jedno rozwiązanie dla A_0, A_1, \dots, A_n i wtedy wzór (68) jest prawdziwy dla wszelkich wielomianów stopnia n , więc zawsze można znaleźć takie liczby A_0, A_1, \dots, A_n , że będzie

$$(96) \quad \int_{-1}^{+1} \varrho(\xi) d\xi = A_0 \varrho(\xi_0) + A_1 \varrho(\xi_1) + \dots + A_n \varrho(\xi_n).$$

Ale na mocy (94) jest

$$(97) \quad \varphi(\xi_i) = \sigma(\xi_i) \psi_n(\xi_i) + \varrho(\xi_i) \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

a ponieważ ze wzoru (92) wynika, że $\psi_n(\xi_i) = 0$, więc

$$(98) \quad \varphi(\xi_i) = \varrho(\xi_i).$$

Ostatecznie na mocy (95), (96) i (98) jest

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi = A_0 \varphi(\xi_0) + A_1 \varphi(\xi_1) + \dots + A_n \varphi(\xi_n),$$

czyli wzór (71) jest prawdziwy dla dowolnego wielomianu stopnia co najwyżej $2n+1$.

Wykazaliśmy zatem, że aby układ (91) miał rozwiązanie, potrzeba i wystarcza, by liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ były pierwiastkami wielomianu $\psi_n(x)$ stopnia $n+1$, ortogonalnego do wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n . Otóż wiemy już, że wielomiany Legendre'a (44) z rozdziału IV tworzą układ ortogonalny, więc można przyjąć, że liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ spełniające układ (91) są pierwiastkami wielomianu Legendre'a stopnia $n+1$. Należy jeszcze wykazać, że liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ są rzeczywiste i leżą w przedziale $[-1, +1]$ oraz zbadać, czy układ (91) ma tylko jedno rozwiązanie. Otóż liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ są rzeczywiste i leżą w przedziale $(-1, +1)$ (a więc i w przedziale $[-1, +1]$) na mocy twierdzenia 1 z rozdziału IV, § 35. Można również dowieść (dowód pomijamy) na gruncie teorii szeregów ortogonalnych, że jeżeli warunek (93) jest spełniony dla $\psi_n(\xi) = W_1(\xi)$ i $\psi_n(\xi) = W_2(\xi)$, to $W_1(\xi) = CW_2(\xi)$, gdzie C jest stałą.

Niech w szczególności $W_1(\xi) = \psi_n(\xi)$, $W_2(\xi) = P_{n+1}(\xi)$, gdzie wielomian $\psi_n(\xi)$ dany jest wzorem (92), a $P_{n+1}(\xi)$ jest $(n+1)$ -ym wielomianem Legendre'a. Mamy $\psi_n(\xi) = CP_{n+1}(\xi)$. Porównując współczynniki przy najwyższej potędze ξ wielomianów $\psi_n(\xi)$ i $P_{n+1}(\xi)$ dochodzimy do wniosku, że współczynnik przy ξ^{n+1} w wielomianie $P_{n+1}(\xi)$ jest równy $1/C$. Dla $P_{n+1}(\xi)$ mamy na mocy wzoru (39) z rozdziału IV

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\xi) &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (\xi^{2n+2} + \dots) = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} [(2n+2)(2n+1)\dots(n+2)\xi^{n+1} + \dots]. \end{aligned}$$

Zatem współczynnik przy ξ^{n+1} jest równy $\frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2}$ i mamy

$$\frac{1}{C} = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}[(n+1)!]^2},$$

skąd

$$C = \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}$$

i wreszcie

$$(99) \quad \psi_n(\xi) = \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} P_{n+1}(\xi).$$

Pierwiastki wielomianu $\psi_n(\xi)$ są zatem pierwiastkami wielomianu Legendre'a $P_{n+1}(\xi)$. Wynika stąd, że układ (91) ma tylko jedno rozwiązanie na $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, a mianowicie pierwiastki wielomianu $P_{n+1}(\xi)$. Poprzednio wykazaliśmy już (patrz układ (75)), że przy ustalonych i różnych $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie na A_0, A_1, \dots, A_n . Ostatecznie zatem wnioskujemy, że układ (91) ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie na A_0, A_1, \dots, A_n , $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, a wszystkie liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ leżą w przedziale $(-1, +1)$ i są pierwiastkami wielomianu Legendre'a stopnia $n+1$.

Układ (91) rozwiązujemy zatem w ten sposób, że obliczamy pierwiastki odpowiedniego wielomianu Legendre'a, podstawiamy je do układu i z pierwszych $n+1$ równań, które są liniowe względem współczynników A_0, A_1, \dots, A_n , obliczamy te współczynniki.

Pozostaje do omówienia sprawa dokładności, z jaką liczba I obliczona ze wzoru (68) w metodzie Gaussa przybliża szukaną całkę $\int_a^b F(x) dx$.

Wzór (68) jest dokładny dla wszelkich wielomianów $(2n+1)$ -go stopnia. Niech $f(x)$ będzie wielomianem interpolacyjnym $(2n+1)$ -go stopnia dla funkcji $F(x)$ i niech obie te funkcje mają te same wartości nie tylko w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , związanych z pierwiastkami $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ układu (91) wzorem (73), ale ponadto w różnych pomiędzy sobą punktach $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$. Na mocy wzoru (8) z rozdziału IV jest

$$F(x) - f(x) = \frac{F^{(2n+2)}(\xi) - F_{2n+2}}{(2n+2)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1}) + \\ + \frac{F_{2n+2}}{(2n+2)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1}),$$

czyli

$$\left| F(x) - f(x) - \frac{F_{2n+2}}{(2n+2)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1}) \right| \leq \\ \leq \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1})|,$$

gdzie liczby F_{2n+2} , M_{2n+2} są określone wzorami (88a).

Na mocy (36), (37) i (68) możemy zatem napisać, że

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= (b-a)(A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n) + \\ &+ \frac{F_{2n+2}}{(2n+2)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1}) dx \pm \\ &\pm \frac{M_{2n+2}}{(2n+2)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{2n+1})| dx. \end{aligned}$$

Przechodzimy teraz do granicy, gdy $x_{i+n+1} \rightarrow x_i$ ($i=0, 1, \dots, n$). Otrzymujemy

$$(100) \quad \int_a^b F(x) dx = (b-a)(A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n) + \\ + F_{2n+2}(b-a)^{2n+3} K \pm M_{2n+2}(b-a)^{2n+3} K,$$

gdzie

$$K = \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{1}{b-a} \right)^{2n+3} \int_a^b (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 dx,$$

czyli na mocy (69), (73) a następnie (92) i (99)

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+3} \int_{-1}^{+1} [(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)\dots(\xi - \xi_n)]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+3} \int_{-1}^{+1} [\psi_n(\xi)]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+3} \frac{2^{2n+2} [(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^2} \int_{-1}^{+1} [P_{n+1}(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

czyli, na mocy wzoru (42) z rozdziału IV, ostatecznie

$$(101) \quad K = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3}.$$

Skonstruowanie wzoru (100) sprowadza się zatem do:

1° obliczenia pierwiastków $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ wielomianu Legendre'a $(n+1)$ -go stopnia,

2° podstawienia pierwiastków $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ do pierwszych $n+1$ równań układu (91) i obliczenia z powstałego w ten sposób układu (75) współczynników A_0, A_1, \dots, A_n ,

3° podstawienia $\xi = \xi_i$ ($i=0, 1, \dots, n$) do wzorów (69) i obliczenia punktów x_0, x_1, \dots, x_n , w których należy obliczać wartości $y_0 = F(x_0)$, $y_1 = F(x_1)$, ..., $y_n = F(x_n)$ danej funkcji $F(x)$,

4° obliczenia liczby K ze wzoru (101),

5° podstawienia obliczonych liczb A_0, A_1, \dots, A_n, K do wzoru (100).

Niech np. $n=3$. Ze wzorów (44) z rozdziału IV mamy wielomian Legendre'a czwartego stopnia

$$P_4(\xi) = \frac{35}{8} \xi^4 - \frac{15}{4} \xi^2 + \frac{3}{8},$$

którego pierwiastkami są

$$(102) \quad \begin{aligned} \xi_3 = -\xi_0 &= \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} \approx 0,861136312, \\ \xi_2 = -\xi_1 &= \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} \approx 0,339981044. \end{aligned}$$

Podstawiając te liczby do układu (75) otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 &= 1, \\ \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} (A_3 - A_0) + \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} (A_2 - A_1) &= 0, \\ \frac{15+2\sqrt{30}}{35} (A_3 + A_0) + \frac{15-2\sqrt{30}}{35} (A_2 + A_1) &= \frac{1}{3}, \\ \sqrt{\left(\frac{15+2\sqrt{30}}{35}\right)^3} (A_3 - A_0) + \sqrt{\left(\frac{15-2\sqrt{30}}{35}\right)^3} (A_2 - A_1) &= 0, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} A_0 = A_3 &= \frac{18 - \sqrt{30}}{72} \approx 0,173927423, \\ A_1 = A_2 &= \frac{18 + \sqrt{30}}{72} \approx 0,326072577. \end{aligned}$$

Ze wzorów (69) mamy

$$(103) \quad x_i = \frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{b+a}{2} \quad (i=0, 1, 2, 3),$$

a ze wzoru (101)

$$K = \frac{1}{9} \cdot \frac{(4!)^4}{(8!)^3} = \frac{1}{1778112000}.$$

Wzór (100) przybiera zatem dla $n=3$ postać

$$\int_a^b F(x) dx = (b-a) \left[\frac{18 - \sqrt{30}}{72} (y_0 + y_3) + \frac{18 + \sqrt{30}}{72} (y_1 + y_2) \right] + \\ + \frac{1}{1778112000} F_8(b-a)^9 \pm \frac{1}{1778112000} M_8(b-a)^9,$$

gdzie wartości y_0, y_1, y_2, y_3 należy obliczać w punktach (103). W tablicy IX na końcu książki podano wzory Gaussa (100) dla $n=0, 1, 2, 3, 4$.

PRZYKŁAD 9. Obliczymy całkę $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ z przykładów 6, 7 i 8 za pomocą wzoru Gaussa (100) dla $n=2$.

W przypadku $n=2$ wzór ten ma postać (por. tablica IX)

$$(104) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{18} (5y_0 + 8y_1 + 5y_2) + \frac{1}{2016000} F_6(b-a)^7 \pm \\ \pm \frac{1}{2016000} M_6(b-a)^7,$$

a wartości y_0, y_1, y_2 należy obliczyć w punktach x_0, x_1, x_2 , spełniających wzory (103) przy $\xi_2 = -\xi_0 = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,774596669$, $\xi_1 = 0$.

Zatem

$$x_0 \approx 2,1127017, \quad x_1 \approx 2,5, \quad x_2 \approx 2,8872983,$$

skąd

$$y_0 = \frac{1}{\ln x_0} = 1,336956 \pm 0,0000005,$$

$$y_1 = \frac{1}{\ln x_1} = 1,091357 \pm 0,0000005,$$

$$y_2 = \frac{1}{\ln x_2} = 0,943110 \pm 0,0000005.$$

Z przykładu 8 wiemy, iż można przyjąć $F_6=362$, $M_6=358$. Zatem wzór (104) przybierze postać

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} &= \frac{1}{18} (5 \cdot 1,336956 + 8 \cdot 1,091357 + 5 \cdot 0,943110) + \\ &+ \frac{1}{18} (5 + 8 + 5)(\pm 0,0000005) + \frac{362}{2016000} \pm \frac{358}{2016000} = \\ &= 1,11840 \pm 0,0000008 \pm 0,0000005 + 0,00018 \pm \\ &\pm 0,0000005 \pm 0,000178 = 1,11858 \pm 0,00018. \end{aligned}$$

§ 69. Metody numeryczne obliczania całek niewłaściwych. Do obliczania przybliżonych wartości całek niewłaściwych używa się najczęściej dwóch sposobów. Pierwszy polega na przekształceniu całki niewłaściwej na właściwą przez dobrane odpowiednio podstawienie, drugi na aproksymacji funkcji podcałkowej taką funkcją, której całka łatwo się daje obliczyć. Oba sposoby zilustrujemy przykładem.

PRZYKŁAD 10. Obliczyć całkę

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3x}}$$

z dokładnością do 0,0005.

Sposób I. Aby daną całkę przekształcić na całkę właściwą, stosujemy podstawienie

$$(105) \quad \sqrt{x} = u, \quad \text{czyli} \quad x = u^2.$$

Wtedy

$$(106) \quad I = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^4 + 3}}.$$

Przedział całkowania $[0,1]$ podzielimy na m równych części i do każdej z nich zastosujemy wzór Gaussa dla $n=1$. Aby oszacować, jak duża musi być liczba m , by błąd przybliżenia całki (106) nie przekroczył 0,0005, musimy wpierw oszacować pochodną $F^{(4)}(u)$ funkcji podcałkowej

$$(107) \quad F(u) = \frac{1}{\sqrt{u^4 + 3}}.$$

Obliczamy, że

$$F^{(4)}(u) = \frac{12}{\sqrt{(u^4 + 3)^9}} (10u^{12} - 243u^8 + 432u^4 - 27)$$

oraz

$$F^{(5)}(u) = \frac{-360u^3}{\sqrt{(u^4 + 3)^{11}}} (2u^{12} - 93u^8 + 396u^4 - 189).$$

Rozwiążemy równanie

$$2u^{12} - 93u^8 + 396u^4 - 189 = 0.$$

Podstawiając $u^4 = z$ mamy

$$2z^3 - 93z^2 + 396z - 189 = 0.$$

Równanie to ma w przedziale $0 \leq z \leq 1$ tylko jeden pierwiastek $z_1 = 0,5466 \pm \pm 0,00005$. Zatem pochodna $F^{(5)}(u)$ staje się zerem w przedziale $0 \leq u \leq 1$ dla $u = 0$ i $u = \sqrt[4]{0,5466 \pm 0,00005}$. Pochodna $F^{(4)}(u)$ może zatem przyjmować wartości ekstremalne w przedziale $0 \leq u \leq 1$ tylko w punktach $u = 0$, $u = \sqrt[4]{0,5466 \pm 0,00005}$ i $u = 1$. W tych punktach mamy

$$F^{(4)}(0) = \frac{-324}{\sqrt[4]{3^9}} = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{3} = -2,31 \pm 0,01,$$

$$F^{(4)}(\sqrt[4]{0,5466 \pm 0,00005}) = 5,57 \pm 0,01,$$

$$F^{(4)}(1) = 4,03 \pm 0,01.$$

Zatem dla $0 \leq u \leq 1$ jest $-2,4 \leq F^{(4)}(u) \leq 5,6$. Przyjmujemy na mocy wzorów (88a)

$$F_4 = \frac{5,6 - 2,4}{2} = 1,6 \quad \text{oraz} \quad M_4 = \frac{5,6 + 2,4}{2} = 4.$$

Przedział całkowania dzielimy na m części i do każdej z nich stosujemy wzór Gaussa dla $n=1$. Błąd przybliżenia całki (106) ma być zatem $m \frac{1}{4320} \cdot 4 \left(\frac{1}{m}\right)^5 < 0,00005$, skąd $m > \sqrt[4]{2}$. Przyjmujemy $m=2$. Aby zastosować do przedziałów $[0, 0,5]$ i $[0,5, 1]$ wzór Gaussa dla $n=1$ (por. tablica IX), obliczamy jeszcze na mocy wzoru (107), że

$$y_0 = F\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{12}\right) = 0,57734 \pm 0,000002,$$

$$y_1 = F\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{12}\right) = 0,57504 \pm 0,000003,$$

$$y_2 = F\left(\frac{9 - \sqrt{3}}{12}\right) = 0,56482 \pm 0,000002,$$

$$y_3 = F\left(\frac{9 + \sqrt{3}}{12}\right) = 0,52416 \pm 0,000001.$$

Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \left[\frac{1}{4} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) + 2 \cdot \frac{1}{4320} \cdot 1,6 \cdot \frac{1}{32} \pm 2 \cdot \frac{1}{4320} \cdot 4 \cdot \frac{1}{32} \right] = \\
 &= 2 \left[0,56034 \pm \frac{1}{4} (0,000002 + 0,000003 + 0,000002 + 0,000001) + \right. \\
 &\quad \left. + 0,00002 \pm 0,000005 \pm 0,000058 \right] = \\
 &= 1,12072 \pm 0,00013 = 1,1207 \pm 0,0002.
 \end{aligned}$$

Sposób II. Rozwiążemy to samo zadanie inaczej. Niech

$$(108) \quad \frac{1}{\sqrt{x^3 + 3x}} = \frac{1}{\sqrt{3x}} R(x).$$

Zatem

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Rozwijamy funkcję $R(x)$ w szereg Maclaurina

$$R(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{5x^6}{432} + \frac{35x^8}{10368} - \frac{7x^{10}}{6912} + \frac{77x^{12}}{248832} - \dots$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 3x}} &= \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{x\sqrt{x}}{6\sqrt{3}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{24\sqrt{3}} - \frac{5x^5\sqrt{x}}{432\sqrt{3}} + \frac{35x^7\sqrt{x}}{10368\sqrt{3}} - \\
 &\quad - \frac{7x^9\sqrt{x}}{6912\sqrt{3}} + \frac{77x^{11}\sqrt{x}}{248832\sqrt{3}} - \dots
 \end{aligned}$$

Szereg $R(x)$ jest zbieżny dla $0 \leq x \leq 1$ i przemienny. Można zatem szacować resztę tego szeregu pierwszym opuszczonym wyrazem. Jest w ten sposób dla $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{x^3 + 3x}} &= \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{x\sqrt{x}}{6\sqrt{3}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{24\sqrt{3}} - \frac{5x^5\sqrt{x}}{432\sqrt{3}} + \frac{35x^7\sqrt{x}}{10368\sqrt{3}} - \\
 &\quad - \frac{7x^9\sqrt{x}}{6912\sqrt{3}} \pm 0,00018,
 \end{aligned}$$

ponieważ $\frac{77}{248832\sqrt{3}} < 0,00018$. Na mocy (35) mamy stąd

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+3x}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(x^{-1/2} - \frac{1}{6} x^{3/2} + \frac{1}{24} x^{7/2} - \frac{5}{432} x^{11/2} + \frac{35}{10368} x^{15/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{6912} x^{19/2} \right) dx \pm 0,00018 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{1}{15} + \frac{1}{108} - \frac{5}{2808} + \frac{35}{88128} - \frac{1}{10369} \right) \pm 0,00018 = \\ &= 1,1207 \pm 0,0002. \end{aligned}$$

Jak widać z powyższego, drugi sposób okazał się w danym zadaniu prostszy.

§ 70. Całkowanie graficzne. Metody graficznego całkowania polegają na wykorzystaniu geometrycznej interpretacji całki oznaczonej jako pola pewnego obszaru. Dla danej całki

$$I = \int_a^b F(x) dx$$

sporządza się wykres funkcji $y=F(x)$ w przedziale $[a, b]$ i mierzy pole ograniczone narysowaną krzywą, rzędnymi w punktach $x=a$, $x=b$ i osią x (rys. 13). Pomiar pola można wykonać różnymi sposobami. Gdy żądana dokładność nie jest duża, np. jeżeli błąd względny może sięgać 1%, to pomiar pola może być wykonany *planimetrem*¹⁾.

Gdy chcemy powiększyć dokładność pomiaru pola, możemy sporządzić wykres funkcji $y=F(x)$ na papierze milimetrowym i liczyć, ile kwadratów o boku 1 mm zawiera dany obszar. Można również posługiwać się metodą trapezów lub metodą Simpsona z tym, że wartości y_0, y_1, \dots, y_n funkcji $F(x)$ mierzy się na wykresie.

Dokładność otrzymywanych z wykresu wartości przybliżonych całki I zależy od dokładności wykresu krzywej $y=F(x)$ i od dokładności pomiaru pola ograniczonego tą krzywą, rzędnymi w punktach $x=a$ i $x=b$ oraz osią x .

Całkowanie graficzne ma duże znaczenie szczególnie wtedy, gdy funkcja podcałkowa $F(x)$ dana jest z doświadczenia. Możemy mieć wtedy dany jej wykres i obliczyć jej całkę oznaczoną bez uciekania się do wzorów analitycznych.

¹⁾ Opis planimetru czytelnik znajdzie np. w książce: А. Н. Крылов, *Лекции о приближенных вычислениях*, Москва-Ленинград 1950, str. 110 i następne.

§ 71. Wybór metody numerycznej całkowania. Najdokładniejszą z opisanych w niniejszym rozdziale metod przybliżonego całkowania jest metoda Gaussa. Ma ona jednak duże wady. Pierwszą z nich jest to, że współrzędne punktów, w których należy obliczyć wartości funkcji podcałkowej, jak również współczynniki przy tych wartościach, nie są na ogół liczbami „okrągłymi”. Powoduje to niejednokrotnie konieczność żmudnej interpolacji między znanymi wartościami funkcji podcałkowej i zwiększa ogólną ilość potrzebnych rachunków. Drugą wadą jest trudność szacowania błędu przez szacowanie wartości pochodnych wysokich rzędów.

Obie wady są na ogół nieistotne, gdy mamy do czynienia z funkcjami danymi z doświadczenia. Wtedy zakłada się z góry, że dana funkcja podcałkowa jest wielomianem określonego stopnia i dobiera się wzór przybliżonego całkowania dokładny dla wielomianów tego stopnia. W ten sposób oszacowanie błędu odpada. Z drugiej strony przy wykonywaniu doświadczeń jest nam często obojętne, dla jakich wartości zmiennej niezależnej należy pomierzyć wartości funkcji podcałkowej. Jeżeli np. zmienną niezależną jest czas, to na ogół nie sprawia nam różnicy, czy będziemy mierzyli wartość funkcji podcałkowej np. punktualnie o godz 11, czy też o 11 godz 37 min 24 sek. Możemy zatem często tak zaplanować doświadczenie, aby otrzymać te wartości funkcji podcałkowej, które są potrzebne do wzoru Gaussa.

W przypadku gdy dobór wartości zmiennej niezależnej w równych odstępach wyraźnie ułatwia obliczanie funkcji, korzystamy zazwyczaj ze wzorów Newtona-Cotesa, a więc w szczególności z metody trapezów i metody Simpsona. Z metodą trapezów może konkurować metoda Gaussa dla $n=0$, którą można by nazwać *metodą prostokątów*, ponieważ zamienia ona obliczanie danej całki na obliczanie pól prostokątów.

Metodę Newtona-Cotesa można stosować dwojako. Albo dobierać wzory możliwie dokładne dla całego przedziału całkowania, albo dzielić cały przedział na części i stosować do każdej z tych części wzory niższego rzędu. Na przykład w celu obliczenia całki

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$$

zastosowaliśmy w przykładzie 8 wzór Newtona-Cotesa dla $n=4$, a w przykładzie 7 metodę Simpsona, czyli metodę Newtona-Cotesa dla $n=2$, ale za to do mniejszych przedziałów całkowania. Błąd otrzymanych przybliżeń był w obu przykładach tego samego rzędu. Przy większej liczbie punktów dzielących przedział całkowania błąd przybliżeń otrzymywanych metodą Simpsona jest często mniejszy niż błąd przybliżeń otrzymywanych metodą Newtona-Cotesa dla większych war-

tości parametru n . Można nawet udowodnić¹⁾, że jeżeli I_k ($k=1, 2, \dots$) jest przybliżeniem danej całki I , uzyskanym ze wzoru Newtona-Cotesa dla $n=k$, to ciąg przybliżeń I_1, I_2, I_3, \dots nie jest na ogół zbieżny.

Jeśli natomiast \bar{I}_k ($k=1, 2, \dots$) oznacza przybliżenie danej całki I obliczanej w przedziale $[a, \beta]$, uzyskane przez stosowanie ustalonego wzoru Newtona-Cotesa, a więc np. wzoru Simpsona, do każdej z m równych części, na jakie podzielono cały przedział całkowania, to ciąg przybliżeń $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots$ jest zawsze zbieżny do całki I , co wynika ze wzoru (81),

z którego po podstawieniu $b-a = \frac{\beta-a}{m}$ otrzymujemy $\lim_{m \rightarrow \infty} mK = 0$.

Jeżeli jeszcze weźmiemy pod uwagę, że trudność szacowania błędów w metodzie Newtona-Cotesa wzrasta na ogół szybko ze wzrostem wartości parametru n , dojdziemy do wniosku, że na ogół najwygodniej jest stosować tę metodę dla małych wartości n , tzn. np. dla $n=1$ (metoda trapezów) czy $n=2$ (metoda Simpsona), ale za to nie do całego przedziału całkowania, lecz do jego części, co zostało ogólnie wykonane we wzorach (50) i (59). Można też zamiast metody trapezów użyć bardzo podobnej metody Gaussa dla $n=0$.

Metodę Newtona-Cotesa dla $n>2$ stosuje się zazwyczaj w przypadku funkcji danych z doświadczenia, gdy — z tych czy innych względów — wartości funkcji podcałkowych dane są w równooddalonych od siebie punktach, co nie pozwala użyć metody Gaussa. Ponieważ zakłada się z reguły, że funkcja podcałkowa jest wielomianem określonego stopnia, oszacowanie błędów nie jest na ogół potrzebne.

Gdy błędy doświadczalne obciążające wartości funkcji podcałkowej są tak duże, że musimy się z nimi poważnie liczyć, dobrze jest używać metody Czebyszewa, ponieważ w tej metodzie błędy wartości funkcji podcałkowej mają najmniejszy wpływ na wartość przybliżoną całki.

Jeżeli wreszcie funkcja podcałkowa daje się rozwijać w szereg potęgowy, to na ogół bardzo dobrą metodą całkowania tej funkcji jest metoda całkowania jej szeregu potęgowego wyraz po wyrazie. Metoda szeregów potęgowych jest zazwyczaj prostsza od metod pozostałych, szczególnie wtedy, gdy szeregi są szybko zbieżne.

¹⁾ Dowód znajdzie czytelnik w książce: И. И. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва-Ленинград 1949, rozdział VI.