

Podstawiając te liczby do wzoru (41), w którym uwzględniamy tylko wyrazy [do szóstej potęgi c_0 włącznie, otrzymujemy

$$\xi \approx 2 + 0,1 - 0,006 + 0,00062 - 0,000078 + 0,0000108 - 0,0000016 = 2,0945512.$$

Błąd otrzymanego przybliżenia można szacować według wzoru (39) albo (32). Wygodniejszy jest wzór (32).

Mamy w przedziale $[2,3]$

$$|f'(x)| = |3x^2 - 2| \geq 3 \cdot 2^2 - 2 = 10.$$

Ponadto $x_n = 2,0945512$ i $f(x_n) = -0,00000314$. Zatem ze wzoru (39)

$$|x_n - \xi| < 0,00000032 < 0,000001.$$

Błąd uzyskanego przybliżenia spełnia zatem warunki zadania.

Dyskusję istnienia innych pierwiastków przeprowadzamy tak samo jak w przykładzie 3.

§ 44. Metoda Newtona. Jeżeli we wzorze Eulera (38) przyjmiemy $n=2$, a zamiast symboli x_0, y_0, y'_0, R_n użyjemy symboli $x_m, f(x_m), f'(x_m), B_{m+1}$, to wzór ten przyjmie postać

$$(42) \quad \xi = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} + B_{m+1},$$

gdzie

$$(43) \quad B_{m+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\bar{\xi})}{f'(\bar{\xi})} \left(\frac{f(x_m)}{f'(\bar{\xi})} \right)^2,$$

a $\bar{\xi}$ jest pewną liczbą zawartą między pierwiastkiem ξ a jego przybliżeniem x_m . Jeżeli we wzorze (42) opuścić resztę B_{m+1} , to zamiast pierwiastka ξ otrzymamy jego nowe przybliżenie x_{m+1} :

$$(44) \quad x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

z dokładnością określoną wzorem (43).

Rozpoczynając rachunek od danego przybliżenia x_0 możemy ze wzoru (44), dla $m=0,1,2,\dots$, obliczać coraz to nowe przybliżenia

$$(45) \quad x_0, x_1, x_2, \dots$$

Ten sposób postępowania nosi nazwę *metody kolejnych przybliżeń Newtona*. Ciągowi (45) odpowiada ciąg błędów B_1, B_2, B_3, \dots , określonych wzorem (43). Ze wzorów (42) i (44) otrzymujemy

$$(46) \quad B_{m+1} = \xi - x_{m+1}.$$

B_m ($m=1,2,\dots$) jest zatem błędem przybliżenia x_m . Jeżeli

$$(47) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = 0,$$

to wtedy oczywiście

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi.$$

Wzór (44) ma prostą interpretację geometryczną. Jeżeli mianowicie w punkcie $(x_m, f(x_m))$ poprowadzić styczną do krzywej $y=f(x)$, to styczna ta przecnie oś x w punkcie x_{m+1} (rys. 8). Dlatego metoda Newtona nosi również nazwę *metody stycznej*.

Wzór (44) można wyprowadzić jeszcze inaczej. Niech będzie mianowicie — jak poprzednio — dane równanie

$$(48) \quad f(x) = 0,$$

gdzie o funkcji $f(x)$ zakładamy, że ma w przedziale $[\xi, x_m]$ albo $[x_m, \xi]$ ciągle pochodne do drugiego rzędu włącznie i $f'(x) \neq 0$. Liczba ξ jest pierwiastkiem równania (48), a x_m pewnym jego przybliżeniem. Ze wzoru Taylora mamy

$$f(\xi) = 0 = f(x_m) + \frac{f'(x_m)}{1!} (\xi - x_m) + \frac{f''(\vartheta)}{2!} (\xi - x_m)^2,$$

gdzie ϑ jest liczbą zawartą między ξ i x_m . Zatem

$$(49) \quad \xi = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} - \frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)} (\xi - x_m)^2.$$

Jeżeli błąd przybliżenia x_m jest

$$B_m = \xi - x_m,$$

to błąd przybliżenia (44) jest

$$(50) \quad B_{m+1} = \xi - x_{m+1} = - \frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)} B_m^2.$$

Jeżeli wiemy, że

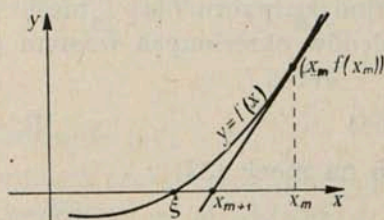
$$|f''(\vartheta)| < K \quad (K = \text{const})$$

dla każdego ϑ zawartego między ξ i x_m , to

$$(51) \quad |B_{m+1}| < \frac{K}{2|f'(x_m)|} B_m^2.$$

Jeżeli wiemy, że

$$(52) \quad \left| \frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)} \right| < M \quad (M = \text{const})$$



Rys. 8

dla każdego ϑ zawartego między ξ i x_m , to

$$(53) \quad |B_{m+1}| < M B_m^2.$$

Ze wzoru (53) widać, że — z grubsza mówiąc — przy małych błędach B_m jednorazowe użycie wzoru (44) daje przybliżenie o dwa razy większej ilości cyfr znaczących. Z tego spostrzeżenia korzystamy często w praktyce.

Niech będzie dany ciąg przybliżeń x_0, x_1, x_2, \dots otrzymywanych kolejno ze wzoru (44) i niech B_0, B_1, B_2, \dots będzie ciągiem odpowiednich błędów określonych wzorem (46).

Jeżeli

$$(54) \quad |B_0| < M^s \quad (s = \text{const}),$$

to na mocy (53)

$$|B_1| < M^{2s+1}, \quad |B_2| < M^{4s+3},$$

i ogólnie

$$(55) \quad |B_k| < M^{2k(s+1)-1}.$$

Otrzymujemy stąd następujące kryterium:

Jeżeli dane są liczby M i s określone wzorami (52) i (54), to na to, żeby

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi$$

wystarczy, aby

$$(56) \quad (M-1)(s+1) < 0.$$

Dowód. Warunek (56) jest spełniony, gdy

$$M < 1 \quad \text{ i } \quad s > -1$$

albo gdy

$$M > 1 \quad \text{ i } \quad s < -1.$$

W obu przypadkach mamy na mocy wzoru (55)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B_m = 0$$

i stąd

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi,$$

co było do wykazania.

Udowodnimy jeszcze następujące kryterium:

Jeżeli w przedziale $(\xi, x_m]$ albo $[x_m, \xi)$ funkcje $f(x)$ i $f''(x)$ mają ten sam znak, to

$$(57) \quad |B_{m+1}| < |B_m|,$$

czyli przybliżenie x_{m+1} otrzymane ze wzoru (44) jest dokładniejsze niż x_m .

Dowód. Na mocy (44) i (49) jest

$$B_m = -\frac{f(x_m)}{f'(x_m)} - \frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)}(\xi - x_m)^2, \quad B_{m+1} = -\frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)}(\xi - x_m)^2.$$

Jeżeli $\frac{f(x_m)}{f'(x_m)} < 0$, to na mocy założenia tych samych znaków dla $f(x)$

i $f''(x)$ jest $\frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)} < 0$, skąd $B_m > B_{m+1} > 0$. Jeżeli $\frac{f(x_m)}{f'(x_m)} > 0$, to $\frac{f''(\vartheta)}{2f'(x_m)} > 0$,

skąd $B_m < B_{m+1} < 0$.

W obu przypadkach jest spełniona nierówność (57).

Z kryterium tego wypływa następujący wniosek praktyczny: *Aby przybliżenie x_{m+1} otrzymane ze wzoru (44) było dokładniejsze od przybliżenia x_m , należy w przypadku gdy $\frac{f''(x)}{f'(x)} < 0$ w otoczeniu punktu $x = \xi$ przyjmować jako x_m przybliżenia pierwiastka z niedomiarem, a w przypadku gdy $\frac{f''(x)}{f'(x)} > 0$ przybliżenia z nadmiarem.*

Istotnie, niech

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} < 0.$$

Jeżeli $f''(x) > 0$ i $f'(x) < 0$, to dla $x_m < \xi$ jest $f(x_m) > f(\xi) = 0$ i są spełnione założenia kryterium poprzedniego, bo obie funkcje $f(x)$ i $f''(x)$ są dodatnie. Jeżeli $f''(x) < 0$ i $f'(x) > 0$, to dla $x_m < \xi$ jest $f(x_m) < f(\xi) = 0$ i też są spełnione założenia kryterium poprzedniego, bo $f(x)$ i $f''(x)$ są ujemne.

Dowód w przypadku $\frac{f''(x)}{f'(x)} > 0$ przeprowadzamy analogicznie.

PRZYKŁAD 5. Rozwiązać równanie

$$(58) \quad 0,6x - \sin x - 0,1 = 0$$

z dokładnością do 0,001.

Równanie to przedstawimy w postaci

$$0,6x - 0,1 = \sin x.$$

Pierwiastki tego równania są zatem odciętymi punktów przecięcia krzywych

$$y = 0,6x - 0,1 \quad \text{ i } \quad y = \sin x.$$

Z rysunku 9 widzimy, że równanie (58) ma trzy pierwiastki: $\xi_1 \approx -1,4$, $\xi_2 \approx -0,2$ i $\xi_3 \approx 1,7$. Stosujemy metodę Newtona. Niech

$$f(x) = 0,6x - \sin x - 0,1.$$

Ponieważ — co można sprawdzić rachunkiem lub odczytać z rysunku — $f'(\xi_1) > 0$ i $f''(\xi_1) < 0$, więc zgodnie z wnioskiem z pierwszego kryterium staramy się dla ξ_1 rozpocząć obliczenia od przybliżenia z niedomiarem i bierzemy ostrożnie jako pierwsze przybliżenie

$$x_0 = -1,5.$$

Wtedy — korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych — obliczamy

$$f(x_0) \approx -0,002505.$$

Ponieważ

$$f'(x) = 0,6 - \cos x,$$

więc

$$f'(x_0) \approx 0,5293.$$

Obliczamy ze wzoru (44), że

$$x_1 \approx -1,495.$$

Na mocy podanego kryterium x_1 jest bliższe ξ_1 niż x_0 . Błąd $B_1 = \xi_1 - x_1$ możemy oszacować ze wzoru (43), ale wygodniejszy jest wzór (32).

Ponieważ z rysunku możemy odczytać, że

$$-1,5 < \xi_1 < -1,3,$$

więc w tym przedziale jest

$$|f'(x)| = |0,6 - \cos x| > |0,6 - \cos 1,3| > 0,33.$$

Obliczamy dalej, że

$$f(-1,495) = 0,000128.$$

Zatem na mocy (32)

$$|-1,495 - \xi_1| < 0,00039.$$

Liczba $-1,495$ przybliża zatem pierwiastek ξ_1 z żadaną dokładnością.

Obliczenia dla ξ_2 i ξ_3 przeprowadzamy analogicznie.

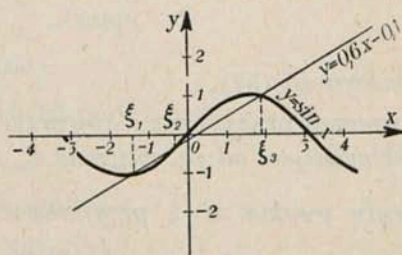
Rachunek dla ξ_2 rozpoczynamy od przybliżenia $x_0 = -0,3$ i otrzymujemy $x_1 \approx -0,256$, a następnie oszacowanie

$$|-0,256 - \xi_2| < 0,0011.$$

Przybliżenie $-0,256$ jest za mało dokładne. Zamiast szukać następnego ze wzoru (44) sprawdzamy za pomocą wzoru (32), że dla liczby $-0,257$ jest

$$|-0,257 - \xi_2| < 0,0006.$$

Liczba $-0,257$ przybliża już pierwiastek ξ_2 z żadaną dokładnością.



Rys. 9

W celu obliczenia przybliżenia dla ξ_3 przyjmujemy $x_0=1,8$, otrzymujemy $x_1 \approx 1,793$ i oszacowanie $|1,793 - \xi_3| < 0,0005$.

Jest ostatecznie

$$\xi_1 \approx -1,495, \quad \xi_2 \approx -0,257, \quad \xi_3 \approx 1,793$$

z dokładnością do 0,0006.

§ 45. Uproszczona metoda Newtona. Stosowanie metody Newtona wymaga obliczenia w każdym punkcie x_m wartości dwóch funkcji: $f(x)$ i $f'(x)$. Można uniknąć obliczania wartości $f'(x_m)$, gdy kolejne przybliżenia x_{m-1} i x_m są już dostatecznie bliskie. Mamy bowiem wtedy

$$f'(x_m) \approx \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{x_m - x_{m-1}}$$

i wzór (44) możemy zastąpić wzorem

$$(59) \quad x_{m+1} = x_m - f(x_m) \frac{x_m - x_{m-1}}{f(x_m) - f(x_{m-1})}.$$

Jest to wzór (25) dla *regula falsi* zastosowany do przedziału $[x_{m-1}, x_m]$.

Postępowanie wygląda zatem następująco: Rozpoczynamy rachunek metodą Newtona obliczając ze wzoru (44) przybliżenie x_1 mając z góry dane przybliżenie x_0 . Jeżeli różnica między przybliżeniami x_0 i x_1 jest mała, następne przybliżenia rachujemy ze wzoru (59). Jeżeli różnica między x_0 i x_1 jest duża, rachujemy następne przybliżenia metodą Newtona tak długo, aż błędy otrzymywanych przybliżeń staną się tak małe, że będzie można stosować wzór (59). Powyższy sposób postępowania będziemy nazywali *uproszczoną metodą Newtona*.

Jak już zauważyliśmy, wzór (59) jest identyczny ze wzorem (25). Różnica polega na tym, że w *regula falsi* zakładaliśmy, że wartości funkcji na krańcach przedziału $[x_{m-1}, x_m]$ mają przeciwne znaki. Tutaj tego założenia nie czynimy.

Można wykazać, że kryterium i wniosek z niego, wyprowadzone dla metody Newtona, pozostają dla wzoru (59) prawdziwe. Dowód pomijamy.

PRZYKŁAD 6. Rozwiązać z dokładnością do 0,0000005 równanie

$$(60) \quad \varphi + \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^2 \varphi = 0$$

z warunkiem $0 < \varphi < \pi/2$.

Mnożąc równanie (60) przez 2 i podstawiając $x = 2\varphi$ otrzymujemy po przekształceniu

$$(61) \quad x + \sin x + 2 \cos x - 2 = 0$$

z warunkiem $0 < x < \pi$.

Niech

$$f(x) = x + \sin x + 2 \cos x - 2.$$

Wtedy

$$f'(x) = 1 + \cos x - 2 \sin x, \quad f''(x) = -\sin x - 2 \cos x.$$

Mamy $f''(x) = 0$, gdy $\operatorname{tg} x = -2$. W przedziale $(0, \pi)$ równanie to ma tylko jeden pierwiastek $x = 2,03444\dots$, który znajdujemy za pomocą tablic trygonometrycznych. Ponieważ

$$f'''(2,0344\dots) = -\cos 2,0344\dots + 2 \sin 2,0344\dots > 0,$$

więc funkcja $f'(x)$ ma w tym punkcie swoje jedyne ekstremum, mianowicie minimum. Obliczamy, że

$$f'(0) = 2, \quad f'(\pi) = 0,$$

a więc musi być $f'(2,0344\dots) < 0$.

Pochodna $f'(x)$ zmienia zatem znak w przedziale $(0, \pi)$ tylko jeden raz, mianowicie między 0 i $2,0344\dots$ z dodatniej przechodzi na ujemną. Funkcja $f(x)$ ma więc w przedziale $(0, \pi)$ tylko jedno ekstremum, mianowicie maksimum i to między 0 i $2,0344\dots$. Ponieważ $f(0) = 0$, więc funkcja $f(x)$ jest co najmniej dla bardzo małych $x > 0$ dodatnia. Ponieważ jednak $f(\pi) = \pi - 4 < 0$, więc funkcja $f(x)$ ma w przedziale $(0, \pi)$ tylko jeden pierwiastek, który oznaczmy literą ξ .

Zastosujmy nasamprzód metodę Newtona. Ponieważ trudno jest ocenić, jaki znak ma $f''(x)$ w otoczeniu punktu $x = \xi$, rezygnujemy z korzystania z kryterium. Próbuje $x = 2$. Wtedy $f(2) = 0,0770\dots > 0$. Ponieważ $f(\pi) < 0$, więc na pewno $2 < \xi < \pi$ i liczba 2 jest przybliżeniem z niedomiaru. Przyjmujemy $x_0 = 2$ i ze wzoru (44) obliczamy $x_1 = 2,062\dots$. Ponieważ x_1 jest bliskie x_0 , stosujemy teraz wzór (59).

$$x_2 = 2,062 - f(2,062) \frac{0,062}{f(2,062) - f(2)} \approx 2,062316.$$

Oszacujemy błąd na podstawie wzoru (32).

$$f(2,062316) = 0,00000023\dots < 0,00000024.$$

Dla $2,062 < x < 2,063$ jest

$$f'(x) < 0 \quad \text{ i } \quad |f'(x)| > |f'(2,063)| > 1,2.$$

Stąd

$$|2,062316 - \xi| < \frac{0,00000024}{1,2} = 0,0000002.$$

W takim razie liczba $x_2/2 = 1,031158$ przybliży jedyny pierwiastek $\varphi = \xi/2$ równania (60) z dokładnością do 0,0000001.

§ 46. Metoda interpolacyjna. Dane jest równanie

$$(62) \quad f(x) = 0,$$

o którym wiemy, że ma pierwiastek ξ w przedziale $[a, b]$. O funkcji $y=f(x)$ zakładamy, że jest w tym przedziale ciągła i ma w nim funkcję odwrotną

$$(63) \quad x=g(y).$$

Pierwiastek ξ jest zatem wartością funkcji $g(y)$ w punkcie $y=0$:

$$\xi=g(0).$$

Znalezienie funkcji odwrotnej (63) jest często trudne. Możemy ją wtedy zastąpić wielomianem interpolacyjnym $x=w(y)$. Wartość \bar{x} wielomianu $w(y)$ dla $y=0$ jest przybliżeniem szukanego pierwiastka ξ . Błąd przybliżenia najwygodniej oszacować posługując się wzorem (32). Taki sposób rozwiązywania równania (62) będziemy nazywali *metodą interpolacyjną*.

Punkty potrzebne do znalezienia wielomianu interpolacyjnego $w(y)$, tj. punkty, w których funkcje $w(y)$ i $g(y)$ mają mieć te same wartości, znajdujemy obliczając wartości funkcji $f(x)$:

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_1), \quad \dots, \quad y_n=f(x_n),$$

gdyż wtedy oczywiście

$$x_0=g(y_0), \quad x_1=g(y_1), \quad \dots, \quad x_n=g(y_n).$$

Mając te punkty możemy obliczyć przybliżoną wartość pierwiastka ξ

$$\bar{x}=w(0)$$

dowolną metodą opisaną w rozdziale III, np. metodą Lagrange'a czy ilorazów różnicowych.

Gdy wielomian $w(x)$ jest pierwszego stopnia, metoda interpolacji sprowadza się do *regula falsi*. Mamy wtedy tylko dwa punkty

$$x_0=g(y_0), \quad x_1=g(y_1)$$

takie, że $y_0=f(x_0)$ i $y_1=f(x_1)$ i na mocy wzoru (1) z rozdziału III

$$\bar{x} = \frac{0 - y_1}{y_0 - y_1} g(y_0) + \frac{0 - y_0}{y_1 - y_0} g(y_1),$$

czyli

$$\bar{x} = \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} x_1.$$

Stąd

$$\bar{x} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

zgodnie ze wzorem (25).

PRZYKŁAD 7. Rozwiązać równanie

$$(64) \quad 3x^3 - 5x^2 + 7x - 6 = 0$$

z dokładnością do 0,00001.

Niech

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 6.$$

Ponieważ

$$(65) \quad f'(x) = 9x^2 - 10x + 7 > 0$$

dla wszystkich x , więc funkcja $f(x)$ jest rosnąca i ma tym samym funkcję odwrotną $x=g(y)$, a równanie ma tylko jeden pierwiastek ξ .

Obliczamy, że

$$y_0 = f(-2) = -64, \quad y_1 = f(-1) = -21, \quad y_2 = f(0) = -6,$$

$$y_3 = f(1) = -1, \quad y_4 = f(2) = 12.$$

Stąd

$$g(-64) = -2, \quad g(-21) = -1, \quad g(-6) = 0, \quad g(-1) = 1, \quad g(12) = 2.$$

Funkcję $g(y)$ aproksymujemy wielomianem co najwyżej czwartego stopnia. Wartość \bar{x} tego wielomianu dla $y=0$, czyli przybliżenie szukanego pierwiastka ξ obliczymy ze wzoru (7) z rozdziału III, który w danym przypadku przyjmuje postać

$$(66) \quad \bar{x} = [y_0] + [y_0 y_1](-y_0) + [y_0 y_1 y_2](-y_0)(-y_1) + \\ + [y_0 y_1 y_2 y_3](-y_0)(-y_1)(-y_2) + [y_0 y_1 y_2 y_3 y_4](-y_0)(-y_1)(-y_2)(-y_3).$$

W tym celu sporządzamy tabelkę ilorazów różnicowych, które obliczamy z dokładnością do 12 miejsc dziesiętnych po przecinku

y	x				
-64	-2				
		0,023255813953			
-21	-1		748462978		
		0,066666666667		93939741	
-6	0		6666666667		-6620528
		0,200000000000		-409220409	
-1	1		-6837606838		
		0,076923076923			
12	2				

Do wzoru (66) podstawiamy liczby podkreślone w tabelce i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{x} = & -2 + 0,023255813953 \cdot 64 + 0,000748462978 \cdot 64 \cdot 21 + \\ & + 0,000093939741 \cdot 64 \cdot 21 \cdot 6 - 0,000006620528 \cdot 64 \cdot 21 \cdot 6 \cdot 1 \approx \\ & \approx 1,19845.\end{aligned}$$

Oszacujemy błąd otrzymanego przybliżenia za pomocą wzoru (32). Mamy

$$f(1,19845) = 0,3717^1$$

i dla $1 < x < 1,3$

$$f'(x) > 6.$$

Zatem

$$(67) \quad |1,19845 - \xi| < \frac{0,3718}{6} < 0,062.$$

Mimo zastosowania interpolacji wielomianem czwartego stopnia, błąd wypadł duży. Wynika to stąd, że wartości funkcji $f(x)$ obliczaliśmy w dużych odstępach: $-2, -1, 0, 1, 2$.

Ponieważ na mocy (67) otrzymujemy

$$1,19845 - 0,062 < \xi < 1,19845 + 0,062, \quad \text{czyli} \quad 1,136 < \xi < 1,261,$$

więc zastosujemy wzór (66) ponownie dla wartości

$$y_0 = f(1,14) = -0,073368,$$

$$y_1 = f(1,17) = 0,150339,$$

$$y_2 = f(1,20) = 0,384000,$$

$$y_3 = f(1,23) = 0,628101,$$

$$y_4 = f(1,26) = 0,883128.$$

Oto tabelka ilorazów różnicowych:

y	x				
-0,073368	1,14				
		0,1341039842			
0,150339	1,17		-0,012490715		
		0,1283911307		0,00142153	
0,384000	1,20		-0,011493554		-0,00013869
		0,1228999472		0,00128887	
0,628101	1,23		-0,010549085		
		0,1176346034			
0,883128	1,26				

Podstawiamy liczby podkreślone w tabelce do wzoru (66) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\bar{x} \approx & 1,14 + 0,1341040 \cdot 0,073368 + 0,0124907 \cdot 0,073368 \cdot 0,150339 + \\ & + 0,0014215 \cdot 0,073368 \cdot 0,150339 \cdot 0,384000 + \\ & + 0,00013869 \cdot 0,073368 \cdot 0,150339 \cdot 0,384000 \cdot 0,628101 \approx \\ \approx & 1,14998.\end{aligned}$$

Oszacujemy błąd za pomocą wzoru (32). Ponieważ

$$f(1,14998) = -0,000023^1$$

i — jak już obliczyliśmy poprzednio — dla $1 < x < 1,3$ jest

$$f'(x) > 6,$$

więc

$$|1,14998 - \xi| < \frac{0,000023}{6} < 0,000004.$$

Liczba 1,14998 przybliży zatem szukany pierwiastek ξ z żadaną dokładnością.

§ 47. Inne metody. Z innych niż powyższe metod rozwiązywania jednego równania z jedną niewiadomą na pierwszy plan wysuwa się *metoda iteracji*. Będzie o niej mowa w § 50, poświęconym rozwiązywaniu układów równań.

Osobną klasę stanowią różne warianty tzw. *metody Graeffe'go-Lobaczewskiego*. Jej myślą przewodnią jest obliczanie tego pierwiastka równania algebraicznego, który ma największy moduł, drogą zastąpienia danego równania takim, którego pierwiastkami byłyby potęgi pierwiastków równania danego i to potęgi o dużych wykładnikach.

Czytelnik interesujący się podobnymi metodami może znaleźć ich opis w wielu książkach¹⁾.

Poza tym istnieje jeszcze bardzo wiele innych metod. Wybraliśmy do niniejszej książki tylko te, które naszym zdaniem są najczęściej stosowane.

Część A niniejszego rozdziału, poświęconą rozwiązywaniu pojedynczych równań z jedną niewiadomą, zakończymy jeszcze jednym, nieco trudniejszym przykładem.

¹⁾ Patrz np. C. Runge u. H. König, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Berlin 1924, str. 164 i następne lub A. H. Крылов, *Лекции о приближенных вычислениях*, Москва-Ленинград, 1950, str. 19 i następne.

PRZYKŁAD 8. Rozwiązać równanie

$$(68) \quad x^7 - 0,8600x^6 - 0,8151x^5 + 2,8600x^4 - 1,9049x^3 - 0,6302x^2 + \\ + 0,8600x - 0,1849 = 0$$

z dokładnością do 0,001.

Najpierw stosujemy metodę Sturma (por. § 41). Mamy

$$w_0(x) = x^7 - 0,8600x^6 - 0,8151x^5 + 2,8600x^4 - 1,9049x^3 - 0,6302x^2 + \\ + 0,8600x - 0,1849, \\ w_1(x) = w_0'(x) = 7x^6 - 5,1600x^5 - 4,0755x^4 + 11,4400x^3 - 5,7147x^2 - \\ - 1,2604x + 0,8600.$$

Dzielimy $w_0(x)$ przez $w_1(x)$ i otrzymujemy

$$w_0(x) \approx (0,1428571x - 0,0175510)w_1(x) - (0,323449x^5 - 1,154186x^4 + \\ + 0,887732x^3 + 0,550442x^2 - 0,715022x + 0,169806).$$

Zatem

$$w_2(x) \approx 0,323449x^5 - 1,154186x^4 + 0,887732x^3 + 0,550442x^2 - \\ - 0,715022x + 0,169806.$$

Dzielimy $w_1(x)$ przez $w_2(x)$ i otrzymujemy

$$w_1(x) \approx (21,641743x + 61,272720)w_2(x) - \\ - (-47,4325x^4 + 54,8663x^3 + 23,9675x^2 - 38,8760x + 9,5445).$$

Zatem

$$w_3(x) \approx -47,4325x^4 + 54,8663x^3 + 23,9675x^2 - 38,8760x + 9,5445.$$

Dzielimy $w_2(x)$ przez $w_3(x)$ i otrzymujemy

$$w_2(x) \approx (-0,0068191430x + 0,0164453697)w_3(x) - \\ - (-0,148873x^3 + 0,108813x^2 + 0,010607x - 0,012843).$$

Zatem

$$w_4(x) \approx -0,148873x^3 + 0,108813x^2 + 0,010607x - 0,012843.$$

Dzielimy $w_3(x)$ przez $w_4(x)$ i otrzymujemy

$$w_3(x) \approx (318,6105x - 135,6680)w_4(x) - (-35,3504x^2 - 33,3451x - 7,8021).$$

Zatem

$$w_5(x) \approx -35,3504x^2 + 33,3451x - 7,8021.$$

Dzielimy $w_4(x)$ przez $w_5(x)$ i otrzymujemy

$$w_4(x) \approx (0,0042113526x + 0,0008943322)w_5(x) - (-0,013642x + 0,005865).$$

Zatem

$$w_6(x) \approx -0,013642x + 0,005865.$$

Dzielimy $w_5(x)$ przez $w_6(x)$ i otrzymujemy

$$w_5(x) \approx (2591,29x - 1330,245)w_6(x) - 0,0002.$$

Zatem

$$w_7(x) \approx 0,0002.$$

Ponieważ $w_7(x)$ ma wartość bliską zera, a rachunki były wykonywane tylko z dokładnością do kilku miejsc dziesiętnych, należy sprawdzić, czy równanie (68) nie ma pierwiastka wielokrotnego. Pierwiastki $(k+1)$ -krotne równania (68) musiałyby być równocześnie k -krotnymi pierwiastkami równania $w_6(x) = 0$. Równanie to ma tylko jeden pierwiastek

$$x \approx \frac{0,005865}{0,013642} \approx 0,43.$$

Równanie (68) mogłoby mieć zatem tylko jeden pierwiastek wielokrotny, mianowicie pierwiastek podwójny $x \approx 0,43$. Podstawiając tę wartość do wzorów na funkcje $w_0(x)$ i $w_1(x) = w'_0(x)$ otrzymujemy

$$w_0(0,43) = w_1(0,43) = 0.$$

Liczba 0,43 jest zatem istotnie pierwiastkiem podwójnym równania (68). Piszemy

$$(69) \quad x_1 = x_2 = 0,43.$$

Wielomian $w_0(x)$ jest podzielny przez $(x - 0,43)^2$. Otrzymujemy

$$w_0(x) : (x - 0,43)^2 = x^5 - x^3 + 2x^2 - 1.$$

Równanie (68) można teraz napisać w postaci

$$(x - 0,43)^2 (x^5 - x^3 + 2x^2 - 1) = 0.$$

Wszystkie pozostałe pierwiastki równania (68), tzn. wszystkie prócz (69) możemy znaleźć jako rozwiązanie pełne równania

$$(70) \quad x^5 - x^3 + 2x^2 - 1 = 0,$$

które nie posiada już pierwiastków wielokrotnych. Możemy zatem zastosować do niego twierdzenie Sturma. W tym celu drogą kolejnych dzieleń obliczymy najpierw ciąg Sturma.

Niech teraz

$$w_0(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 1, \quad w_1(x) = w'_0(x) = 5x^4 - 3x^2 + 4x.$$

Dzielimy $w_0(x)$ przez $w_1(x)$ i otrzymujemy

$$w_0(x) = 0,2xw_1(x) - (0,4x^3 - 1,2x^2 + 1).$$

Zatem

$$w_2(x) = 0,4x^3 - 1,2x^2 + 1.$$

Dzielimy $w_1(x)$ przez $w_2(x)$ i otrzymujemy

$$w_1(x) = (12,5x + 37,5)w_2(x) - (-42x^2 + 8,5x + 37,5).$$

Zatem

$$w_3(x) = -42x^2 + 8,5x + 37,5.$$

Dzielimy $w_2(x)$ przez $w_3(x)$ i otrzymujemy

$$w_2(x) \approx (-0,00952381x + 0,0266440)w_3(x) - (-0,130669x - 0,000850).$$

Zatem

$$w_4(x) \approx -0,130669x - 0,000850.$$

Dzielimy $w_3(x)$ przez $w_4(x)$ i otrzymujemy

$$w_3(x) \approx (321,423x - 67,139)w_4(x) - (-37,443).$$

Zatem

$$w_5(x) \approx -37,443.$$

Ciąg Sturma tworzą funkcje

$$(71) \quad \begin{aligned} w_0(x) &= x^5 - x^3 + 2x^2 - 1, \\ w_1(x) &= 5x^4 - 3x^2 + 4x, \\ w_2(x) &= 0,4x^3 - 1,2x^2 + 1, \\ w_3(x) &= -42x^2 + 8,5x + 37,5, \\ w_4(x) &\approx -0,130669x - 0,000850, \\ w_5(x) &\approx -37,443. \end{aligned}$$

Niech $Z(t)$ oznacza liczbę kolejnych zmian znaku wyrazów tego ciągu w punkcie $x=t$, z pominięciem wyrazów równych zeru w tym punkcie.

Dla $x=-\infty$ otrzymujemy z (71) ciąg $-\infty, +\infty, -\infty, -\infty, +\infty, -37,443$. W ciągu tym są 4 kolejne zmiany znaku: przy przejściu od wyrazu pierwszego do drugiego, od drugiego do trzeciego, od czwartego do piątego i od piątego do szóstego. Zatem

$$Z(-\infty) = 4.$$

Dla $x=+\infty$ otrzymujemy z (71) ciąg $+\infty, +\infty, +\infty, -\infty, -\infty, -37,443$. Mamy tylko jedną zmianę znaku przy przejściu od wyrazu trzeciego do czwartego, więc

$$Z(+\infty) = 1.$$

Ponieważ

$$Z(-\infty) - Z(+\infty) = 4 - 1 = 3,$$

więc równanie (70) ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

Poszukamy teraz wartości przybliżonych tych trzech pierwiastków za pomocą twierdzenia Sturma.

Dla $x=0$ otrzymujemy z (71) ciąg znaków $-, 0, +, +, -, -$. Po pominięciu zera mamy w tym ciągu dwie zmiany znaku, więc $Z(0)=2$. Na mocy twierdzenia Sturma równanie (70) ma

$$Z(0) - Z(+\infty) = 2 - 1 = 1$$

pierwiastek dodatni i

$$Z(-\infty) - Z(0) = 4 - 2 = 2$$

pierwiastki niedodatnie, a ponieważ liczba 0 nie jest pierwiastkiem, więc równanie (70) ma dwa pierwiastki ujemne.

Podstawiając w (71) różne wartości na x otrzymujemy kolejno następujące ciągi znaków i liczby $Z(x)$ kolejnych zmian tych znaków (obieramy tu każdą następną wartość x kierując się położeniem pierwiastków równania (70), które oceniamy według zmian wartości $Z(x)$):

x	$w_0(x)$	$w_1(x)$	$w_2(x)$	$w_3(x)$	$w_4(x)$	$w_5(x)$	$Z(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
0	$-$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	2
-10	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
-1	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	4
+10	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1

Równanie (70) ma — jak widać z powyższej tabelki — po jednym pierwiastku w przedziałach

$$(72) \quad -2 < x \leq -1, \quad -1 < x \leq 0 \quad \text{i} \quad 0 < x \leq 1.$$

Dokładniejsze wartości przybliżone tych pierwiastków obliczymy teraz za pomocą *regula falsi*, tzn. ze wzoru (25). Niech x_3, x_4, x_5 oznaczają pierwiastki leżące kolejno w przedziałach (72), a $x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots, x_{41}, x_{42}, x_{43}, \dots, x_{51}, x_{52}, x_{53}, \dots$ kolejne przybliżenia tych pierwiastków. Niech $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 1$. Otrzymujemy

$$f(-2) = -17, \quad f(-1) = +1, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = +1$$

na mocy wzoru (25)

$$x_{31} = -2 - \frac{1 \cdot (-17)}{1 - (-17)} = -2 + \frac{17}{18} \approx -1,06,$$

$$x_{41} = -1 - \frac{1 \cdot 1}{-1 - 1} = -0,5,$$

$$x_{51} = 0 - \frac{1 \cdot (-1)}{1 - (-1)} = 0,5.$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} f(-1,06) &\approx +1,100, & f(-0,7) &\approx +0,155, \\ f(-1,2) &\approx +1,120, & f(-0,6) &\approx -0,142, \\ f(-1,4) &\approx +0,286, & f(0,5) &\approx -0,594, \\ f(-1,5) &\approx -0,719, & f(0,7) &\approx -0,195, \\ f(-0,5) &\approx -0,406, & f(0,8) &\approx +0,096. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$-1,5 \leq x_3 < -1,4, \quad -0,7 < x_4 < -0,6, \quad 0,7 < x_5 < 0,8.$$

Stosując do tych przedziałów wzór (25) mamy

$$x_{32} = -1,5 - \frac{0,1(-0,719)}{0,286 + 0,719} \approx -1,429,$$

$$x_{42} = -0,7 - \frac{0,1 \cdot 0,155}{-0,142 - 0,155} \approx -0,648,$$

$$x_{52} = 0,7 - \frac{0,1(-0,195)}{0,096 + 0,195} \approx 0,767.$$

Mamy dalej

$$\begin{aligned} f(-1,429) &\approx +0,0433, & f(-0,649) &\approx +0,0006, \\ f(-1,430) &\approx +0,0343, & f(0,767) &\approx -0,0092, \\ f(-1,433) &\approx +0,0069, & f(0,770) &\approx -0,0005, \\ f(-1,434) &\approx -0,0023, & f(0,771) &\approx +0,0030, \\ f(-0,648) &\approx -0,0023, & & \end{aligned}$$

Zatem $x_3 \approx -1,434$, $x_4 \approx -0,649$, $x_5 \approx 0,770$ z dokładnością do 0,001.

A oto pełne rozwiązanie równania (68):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 = 0,43, \\ x_3 &\approx -1,434 \\ x_4 &\approx -0,649 \\ x_5 &\approx 0,770 \end{aligned} \right\} \quad \text{z dokładnością do } 0,001.$$