

## ROZDZIAŁ IV

### APROKSYMACJA

**§ 30. Wstęp.** W rachunkach numerycznych bardzo często zastępujemy daną funkcję  $y=F(x)$  inną funkcją  $y=f(x)$ , która z tych czy innych względów jest dla nas wygodniejsza. Funkcję  $f(x)$  nazywamy wtedy *aproksymacją* lub *przybliżeniem* funkcji  $F(x)$ . Zastąpienie funkcji  $F(x)$  jej przybliżeniem  $f(x)$  pociąga za sobą pewne błędy w wynikach rachunków, w których na miejscu  $F(x)$  figuruje przybliżenie  $f(x)$ . Błędy, których przyczyną jest zastąpienie funkcji  $F(x)$  jej przybliżeniem  $f(x)$ , nazywać będziemy *błędami aproksymacji* lub *błędami przybliżenia*. Metoda aproksymacyjna może mieć tylko wtedy sens praktyczny, jeżeli podaje sposób oszacowania błędów aproksymacji.

Wielkość błędów aproksymacji zależy w dużym stopniu od umiejętnego doboru metody aproksymacyjnej. Gdyby na przykład dana była funkcja  $y=F(x)$ , która w punktach  $-2, -1, 0, 1, 2$  przybiera wartości  $8, -2, 1, -4, 10$ , i gdybyśmy zażądali, aby przybliżenie  $f(x)$  było wielomianem możliwie niskiego stopnia, który by w punktach  $-2, -1, 0, 1, 2$  przybierał również wartości  $8, -2, 1, -4, 10$ , to — jak wiemy z przykładu (12) w rozdziale III —

$$f(x) = 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{3}{2}x + 1.$$

Gdybyśmy jednak poszukali takiego przybliżenia  $f^*(x)$ , które by było funkcją wymierną

$$f^*(x) = \frac{a + bx + cx^2}{d + ex + fx^2},$$

przybierającą w punktach  $-2, -1, 0, 1, 2$  wartości  $8, -2, 1, -4, 10$ , to — jak wiemy z tego samego przykładu —

$$f^*(x) = \frac{2 - x - 5x^2}{2 - x^2}.$$

Rysunek 2 pokazuje, jak dalece różnią się od siebie przybliżenia  $f(x)$  i  $f^*(x)$ .



Metod aproksymacji jest wiele. Z niektórymi z nich zetknęliśmy się już w rozdziale o interpolacji. W rozdziale niniejszym omówimy tylko kilka najbardziej znanych i używanych.

Dobieramy zwykle metodę aproksymacyjną tak, aby z jednej strony błędy aproksymacyjne nie były zbyt duże, a z drugiej strony rachunki nie nastroczały zbyt wielkich trudności.

**§ 31. Przybliżenia jednostajne.** Niech będą dane dwie funkcje  $F(x)$  i  $f(x)$  określone w przedziale zamkniętym  $[a, b]$ . Funkcję  $f(x)$  nazywać będziemy *przybliżeniem jednostajnym* funkcji  $F(x)$  w przedziale  $[a, b]$  z dokładnością do  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  jest tu liczbą dodatnią), jeżeli

$$(1) \quad |F(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

dla wszystkich  $x$  z przedziału  $[a, b]$ .

Charakterystyczną cechą przybliżenia jednostajnego jest właśnie to, że istnieje taka liczba dodatnia  $\varepsilon$ , iż nierówność (1) jest spełniona dla wszystkich  $x$  z przedziału  $[a, b]$ .

Najważniejszym przypadkiem przybliżenia jednostajnego jest aproksymacja funkcji ciągłej w przedziale zamkniętym przez wielomian. W tym przypadku fundamentem teorii aproksymacji jest następujące twierdzenie:

**Twierdzenie Weierstrassa.** *Niech  $F(x)$  będzie funkcją ciągłą w przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Dla każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje taki wielomian  $w(x)$ , że*

$$|F(x) - w(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich  $x$  z przedziału  $[a, b]$ .

Dowodu powyższego twierdzenia nie podajemy<sup>1)</sup>. Twierdzenie Weierstrassa gwarantuje nam, że funkcje ciągłe w przedziale  $[a, b]$  można aproksymować jednostajnie wielomianami z dowolnie dużą dokładnością.

Niech  $w(x)$  będzie wielomianem stopnia  $n$ , a  $F(x)$  funkcją ciągłą w przedziale domkniętym  $[a, b]$ . Liczbę

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |w(x) - F(x)|$$

nazywać będziemy *odległością wielomianu  $w(x)$  od funkcji  $F(x)$  w przedziale  $[a, b]$* . Każdą liczbę nie mniejszą od  $\Delta$  nazywać będziemy *maksymalnym błędem aproksymacji funkcji  $F(x)$  w przedziale  $[a, b]$  przez wielomian  $w(x)$* .

<sup>1)</sup> Dowód ten znajduje się np. w książce: Fr. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. II uzupełnione, Warszawa 1949, str. 267.



Jeżeli nie ma takiego wielomianu stopnia  $n$ , którego odległość od danej funkcji byłaby mniejsza od odległości pewnego wielomianu  $p(x)$  stopnia  $n$  od tejże funkcji  $F(x)$  i w tymże przedziale, to wielomian  $p(x)$  nazywać będziemy *najlepszym przybliżeniem jednostajnym funkcji  $F(x)$  wielomianem stopnia  $n$* .

E. Borel wykazał<sup>1)</sup>, że dla każdej funkcji  $F(x)$  ciągłej w przedziale  $[a, b]$  i każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje wielomian  $p_n(x)$  będący najlepszym przybliżeniem jednostajnym funkcji  $F(x)$  wielomianem stopnia  $n$ . P. L. Czebyszew<sup>2)</sup> udowodnił, że istnieje tylko jeden taki wielomian.

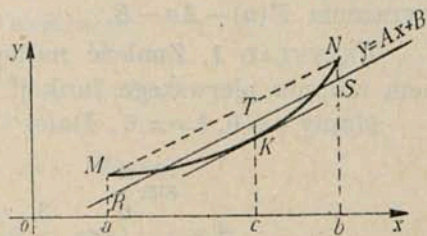
Nie znamy jednak ogólnej metody, która by pozwoliła dla dowolnej funkcji  $F(x)$  ciągłej w pewnym przedziale domkniętym  $[a, b]$  i dowolnej liczby naturalnej  $n$  znaleźć wielomian będący najlepszym przybliżeniem jednostajnym funkcji  $F(x)$  wielomianem stopnia  $n$ . Podamy tu jedynie metodę znajdowania najlepszego przybliżenia jednostajnego wielomianem stopnia pierwszego w pewnym przypadku szczególnym.

Zakładamy o funkcji  $F(x)$ , że

1° jest ciągła w przedziale domkniętym  $[a, b]$ ,

2° posiada pochodną rzędu drugiego  $F''(x)$  w przedziale otwartym  $(a, b)$ ,

3°  $F''(x)$  nie zmienia znaku w przedziale  $(a, b)$ .



Rys. 3

Niech  $F''(x) > 0$  i niech wielomian  $Ax + B$  będzie najlepszym przybliżeniem jednostajnym funkcji  $F(x)$  (rys. 3). Niech  $M$  i  $N$  będą punktami krzywej  $y = F(x)$ , których odcięte są  $a$  i  $b$ , a  $K$  punktem łuku  $\overline{MN}$  tejże krzywej, w którym styczna do niej jest równoległa do siecznej  $MN$ . Ponieważ  $F''(x) > 0$ , więc istnieje dokładnie jeden taki punkt. Niech  $c$  będzie odciętą punktu  $K$ . Łuk  $\overline{MKN}$  krzywej leży — na mocy założenia  $F'' > 0$  — w pasie ograniczonym sieczną  $MN$  i styczną przez punkt  $K$ . Łatwo zauważyć, że prosta  $y = Ax + B$  musi przecinać proste  $x = a$ ,  $x = b$  i  $x = c$  w takich punktach  $R$ ,  $S$  i  $T$ , żeby odcinki  $RM$ ,  $KT$  i  $SN$  były równe. Istotnie, gdyby tak nie było, prosta  $y = Ax + B$ , jako najlepsze przybliżenie funkcji  $y = F(x)$ , musiałaby przecinać prostą  $x = a$  nie niżej punktu  $R$ , prostą  $x = b$  nie niżej punktu  $S$  i równocześnie prostą  $x = c$  nie wyżej punktu  $T$ , co jest niemożliwe. Mamy zatem

$$F(a) - Aa - B = F(b) - Ab - B = Ac + B - F(c).$$

<sup>1)</sup> Patrz np. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва 1949, str. 48.

<sup>2)</sup> Ibidem, str. 55.



Dostajemy stąd

$$(2) \quad A = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \quad B = \frac{F(a) + F(c)}{2} - A \frac{a + c}{2},$$

a liczbę  $c$  znajdujemy z równania

$$(3) \quad F'(c) = A = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{z warunkiem, że } a < c < b.$$

Maksymalny błąd aproksymacji jest nie mniejszy od odległości  $\Delta$  wielomianu  $Ax + B$  od funkcji  $F(x)$  w przedziale  $[a, b]$  i

$$(4) \quad \Delta = |F(a) - Aa - B|.$$

Gdyby założyć, że  $F''(x) < 0$  w przedziale  $(a, b)$ , wzory (2), (3) i (4) nie uległyby zmianie (dlatego piszemy we wzorze (4) wartość bezwzględną wyrażenia  $F(a) - Aa - B$ ).

PRZYKŁAD 1. Znaleźć najlepsze przybliżenie jednostajne wielomianem stopnia pierwszego funkcji  $F(x) = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi/6]$ .

Mamy  $a = 0$ ,  $b = \pi/6$ . Dalej

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi} = 0,95493^{01},$$

$$F'(c) = \cos c = 0,95493^{01},$$

$$c = \arccos 0,95493 = 0,301372^{01 \quad 37},$$

$$F(c) = \sin c = 0,29683^{05},$$

$$B = \frac{0,29683^{05}}{2} - 0,95493^{01} \frac{0,301372^{37}}{2} = 0,00452^{05}.$$

Najlepszym przybliżeniem jednostajnym jest wielomian

$$p(x) = 0,95493x + 0,00452^{01 \quad 05}.$$

Na mocy wzoru (4) liczba  $\Delta = 0,00453$  jest maksymalnym błędem aproksymacji.

Ze względu na prostotę metody aproksymacyjnej i rachunków z nią związanych rezygnujemy często z najlepszego przybliżenia jednostajnego



i daną funkcję  $F(x)$  aproksymujemy wielomianami nie będącymi na ogół najlepszymi przybliżeniami jednostajnymi. Kilku metodom takich aproksymacji poświęcone będą następne paragrafy tego rozdziału.

**§ 32. Metoda szeregów potęgowych.** Niech będzie dana funkcja  $F(x)$  rozwijalna w otoczeniu punktu  $x=c$  w szereg Taylora o promieniu zbieżności równym  $r$ . Niech dalej będą dane dwie liczby  $a$  i  $b$  takie, że

$$(5) \quad c-r < a < b < c+r.$$

Wielomian stopnia  $n$

$$(6) \quad w(x) = F(c) + \frac{F'(c)}{1!} (x-c) + \frac{F''(c)}{2!} (x-c)^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

przybliża funkcję  $F(x)$  jednostajnie w przedziale  $[a, b]$ .

Mamy — jak to wynika ze wzoru Taylora —

$$F(x) - w(x) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1},$$

gdzie  $c < \xi < x$ , gdy  $c < x$ , i  $x < \xi < c$ , gdy  $x < c$ . Zatem

$$(7) \quad |F(x) - w(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1},$$

gdzie  $M_{n+1}$  i  $h$  są takimi liczbami, że

$$|F^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1} \quad \text{dla} \quad a \leq x \leq b,$$

$$|c-a| \leq h \quad \text{i} \quad |c-b| \leq h.$$

Nierówność (7) daje nam oszacowanie błędów aproksymacji funkcji  $F(x)$  przez wielomian  $w(x)$  w przedziale  $[a, b]$ .

Rozwijalność funkcji  $F(x)$  w szereg Taylora zapewnia nam możliwość przybliżania funkcji  $F(x)$  przez wielomiany (6) z dowolnie dużą dokładnością.

**PRZYKŁAD 2.** Znaleźć za pomocą wzoru (6) wielomian pierwszego stopnia przybliżający funkcję  $F(x) = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi/6]$ .

Przyjmijmy  $c = \pi/12$ . Wtedy

$$\begin{aligned} w(x) &= \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \left( x - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{12} x + \left( \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right) = \\ &\quad \begin{matrix} 05 & 05 \end{matrix} \\ &= 0,96593x + 0,00594. \end{aligned}$$

Obliczymy maksymalny błąd aproksymacji na podstawie nierówności (7).



W przedziale  $[0, \pi/6]$  mamy

$$|F^{(n+1)}(x)| = |F''(x)| = |-\sin x| = \sin x \leq 0,5.$$

Przyjmujemy  $M_2 = 0,5$ . Ponieważ  $a = 0$ ,  $b = \pi/6$ ,  $c = \pi/12$ , więc przyjmujemy  $h = \pi/12$ . Zatem

$$|F(x) - w(x)| \leq \frac{0,5}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right) < 0,0172.$$

Maksymalny błąd aproksymacji 0,0172 jest około 4 razy większy niż — jak to obliczyliśmy w przykładzie 1 — błąd 0,00453 w przypadku najlepszej aproksymacji jednostajnej funkcji  $\sin x$  wielomianem stopnia pierwszego.

Oszacowanie (7) błędu aproksymacji jest często niedokładne. Można nieraz podać dokładniejsze oszacowania, a nawet obliczyć dokładnie odległość wielomianu  $w(x)$  od funkcji  $F(x)$ , jak ma to na przykład miejsce w ostatnim przykładzie. Badamy mianowicie funkcję

$$B(x) = F(x) - w(x) = \sin x - \cos \frac{\pi}{12} x - \left( \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right).$$

Mamy

$$B'(x) = \cos x - \cos \frac{\pi}{12},$$

zatem funkcja  $B(x)$  ma w przedziale  $[0, \pi/6]$  tylko jedno ekstremum lokalne, mianowicie maksimum dla  $x = \pi/12$ .

Odległość  $\Delta$  wielomianu  $w(x)$  od funkcji  $F(x)$  możemy znaleźć ze wzoru

$$\Delta = \max \left( |B(0)|, \left| B\left(\frac{\pi}{12}\right) \right|, \left| B\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| \right).$$

Ponieważ

$$|B(0)| = \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 0,00594^{05}, \quad B\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,$$

$$\left| B\left(\frac{\pi}{6}\right) \right| = \sin \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} = 0,01170^{05},$$

więc

$$\Delta = \sin \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} = 0,01170^{05}.$$

Błąd 0,01171 aproksymacji jest więc tylko około 2,5 razy większy niż błąd 0,00453 w przypadku najlepszej aproksymacji jednostajnej.



**§ 33. Przybliżenia interpolacyjne. Wielomiany Czebyszewa.** Niech będzie dana funkcja  $y=F(x)$ , która w punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (zakładamy, że  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ) przybiera wartości  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Każdą funkcję  $y=f(x)$  taką, że  $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1, \dots, f(x_n)=y_n$ , nazywać będziemy *przybliżeniem interpolacyjnym funkcji  $F(x)$* .

Niech  $f(x)$  będzie wielomianem interpolacyjnym stopnia co najwyżej  $n$ . Oszacujemy odległość wielomianu  $f(x)$  od funkcji  $F(x)$  w przedziale domkniętym  $[a, b]$ , gdzie  $a \leq x_0 < x_n \leq b$ , przy założeniu, że funkcja  $F(x)$  ma w tym przedziale ciągle pochodne do rzędu  $(n+1)$  włącznie. W tym celu wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$\varphi(x) = F(x) - f(x) - K(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

gdzie  $K$  jest stałą. Dobieramy  $K$  tak, aby funkcja  $\varphi(x)$  była równa zero w punkcie  $x=\bar{x}$ , gdzie  $\bar{x}$  jest pewną liczbą z przedziału  $[a, b]$  różną od  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Taki wybór liczby  $K$  jest zawsze możliwy, gdyż wyrażenie  $(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\dots(\bar{x}-x_n) \neq 0$ . W takim razie funkcja  $\varphi(x)$  staje się równa zero w  $n+2$  punktach:  $\bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n$ . Z twierdzenia Rolle'a wynika, że pochodna  $\varphi'(x)$  staje się równa zero co najmniej w  $n+1$  różnych punktach, skąd dalej wynika — znów na podstawie twierdzenia Rolle'a — że druga pochodna  $\varphi''(x)$  staje się równa zero co najmniej w  $n$  różnych punktach. Stosując twierdzenie Rolle'a  $n+1$  razy dochodzimy do wniosku, że istnieje taki punkt  $x=\xi$ , gdzie  $\xi$  jest liczbą zawartą między najmniejszą i największą spośród liczb  $\bar{x}, x_0, x_1, \dots, x_n$ , że

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Ale

$$\varphi^{(n+1)}(x) = F^{(n+1)}(x) - K(n+1)!.$$

Stąd

$$F^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)! = 0,$$

a zatem

$$K = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

i

$$(8) \quad F(\bar{x}) - f(\bar{x}) = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)\dots(\bar{x}-x_n).$$

Niech

$$M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |F^{(n+1)}(x)|.$$

Ponieważ o liczbie  $\bar{x}$  założyliśmy jedynie, że jest różna od liczb  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i leży w przedziale  $[a, b]$ , a dla  $x=x_0, x_1, \dots, x_n$  jest

$$F(x) - f(x) = 0,$$



więc mamy

$$(8a) \quad |F(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

dla każdego  $x$  z przedziału  $[a, b]$ .

Sposób obliczenia wielomianu  $f(x)$ , gdy podane są punkty  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  podany był w rozdziale o interpolacji. Ponieważ w wyniku obliczeń z różnych wzorów interpolacyjnych otrzymujemy ten sam wielomian  $f(x)$ , więc wzór (8a) daje oszacowanie błędu przybliżenia interpolacyjnego dla każdego ze wzorów interpolacyjnych. Ponieważ wielomian  $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$  najczęściej przybiera w pobliżu punktów skrajnych  $x_0$  i  $x_n$  wartości większe co do modułu niż w części środkowej przedziału  $(x_0, x_n)$ , więc błąd (8a) jest na ogół mniejszy dla wartości  $x$  z części środkowej tego przedziału niż dla wartości  $x$  leżących w pobliżu  $x_0$  lub  $x_n$ . Dlatego też staramy się zawsze przy interpolacji tak dobrać punkty  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , aby punkty, w których interesuje nas zachowanie się funkcji  $F(x)$ , leżały w części środkowej przedziału  $(x_0, x_n)$ . Przy spełnieniu tego warunku i ustalonych punktach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  wybór wzoru interpolacyjnego nie ma już wpływu na błąd aproksymacji, gdyż z każdego wzoru otrzymujemy ten sam wielomian interpolujący. Jednakże — jak o tym była mowa w rozdziale poprzednim — najwygodniej używać wtedy wzorów Gaussa, Stirlinga, Bessela lub Everetta. Mylny pogląd, że wzory te dają mniejsze błędy aproksymacyjne niż wzory Newtona, ma przyczynę w tym, że wzory te najwygodniej jest stosować w tej części przedziału  $(x_0, x_n)$ , w której błędy aproksymacji są najmniejsze.

Przybliżenia interpolacyjne stosujemy nieraz w takich przypadkach, gdy punkty  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  nie są narzucone z góry, a dobór ich zależy od rachującego. Zazwyczaj przyjmuje się wtedy, że punkty te są położone w równych odstępach, tj. że

$$x_i = x_0 + i \Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

gdzie  $\Delta x$  jest pewną stałą dodatnią. Umożliwia to korzystanie np. ze wzoru Newtona (23) w rozdziale III czy też wzoru Everetta (50) w rozdziale III, co znacznie upraszcza rachunki. Można jednak inaczej postawić zagadnienie: jak należy dobrać punkty  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , aby błąd aproksymacji

był najmniejszy. Ponieważ w nierówności (8a) wielkość  $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$  nie zależy od metody aproksymacji, zagadnienie sprowadza się do znalezienia takich punktów  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , aby maksimum modułu wielomianu

$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

w przedziale  $[a, b]$  było możliwie najmniejsze.



Bez ograniczenia ogólności możemy przyjąć, że

$$a = -1 \text{ i } b = 1.$$

Gdyby bowiem tak nie było, wprowadzilibyśmy w miejsce  $x$  nową zmienną  $\bar{x}$ , określoną wzorem

$$x = \frac{b-a}{2} \bar{x} + \frac{a+b}{2}.$$

Wtedy dla  $a \leq x \leq b$  mielibyśmy  $-1 \leq \bar{x} \leq 1$ .

Ostatecznie zagadnienie formułujemy następująco: znaleźć taki wielomian

$$T_{n+1}(x) = (x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n),$$

aby

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_{n+1}(x)| = \min_{x_0, x_1, \dots, x_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|.$$

Zagadnienie to zostało całkowicie rozwiązane przez P. L. Czebyszewa w 1857 r. Wykazał on<sup>1)</sup>, że

$$(9) \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2^n}.$$

Wielomiany (9) noszą nazwę *wielomianów Czebyszewa*. Spełniają one dla  $n \geq 1$  wzór rekurencyjny

$$T_{n+1}(x) - x T_n(x) + \frac{1}{4} T_{n-1}(x) = 0^2).$$

Oto kilka pierwszych wielomianów Czebyszewa

$$(10) \quad \begin{aligned} T_0(x) &= 2, & T_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8}, \\ T_1(x) &= x, & T_5(x) &= x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{5}{16} x, \\ T_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2}, & T_6(x) &= x^6 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{9}{16} x^2 - \frac{1}{32}, \\ T_3(x) &= x^3 - \frac{3}{4} x, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Dowód patrz w książce: И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва-Ленинград 1949, str. 63.

<sup>2)</sup> Dowód znajdzie czytelnik w książce: S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, tom VI, Warszawa-Lwów 1935, str. 115.



Pierwiastki  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  wielomianu  $T_n(x)$  znajdujemy z łatwością z równania

$$\cos(n \arccos x) = 0.$$

Mamy na przykład

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \text{dla } n=1: \xi_0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \text{dla } n=2: \xi_0 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7071067812, \\ \quad \xi_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071067812, \\ \text{dla } n=3: \xi_0 = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,8660254038, \\ \quad \xi_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \quad \xi_2 = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254038, \\ \text{dla } n=4: \xi_0 = \cos \frac{7\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx -0,9238795325, \\ \quad \xi_1 = \cos \frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx -0,3826834324, \\ \quad \xi_2 = \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx 0,3826834324, \\ \quad \xi_3 = \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \approx 0,9238795325, \\ \text{dla } n=5: \xi_0 = \cos \frac{9\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx -0,9510565163, \\ \quad \xi_1 = \cos \frac{7\pi}{10} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx -0,5877852523, \\ \quad \xi_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
 \xi_3 &= \cos \frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0,5877852523, \\
 \xi_4 &= \cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx 0,9510565163, \\
 \text{dla } n=6: \quad \xi_0 &= \cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx -0,9659258263, \\
 \xi_1 &= \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7071067812, \\
 \xi_2 &= \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx -0,2588190451, \\
 \xi_3 &= \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588190451, \\
 \xi_4 &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071067812, \\
 \xi_5 &= \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0,9659258263.
 \end{aligned}
 \tag{11 c. d.}$$

Z definicji (9) wynika, że

$$(12) \quad |T_{n+1}(x)| = |(x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Jeśli zatem przy aproksymacji interpolacyjnej przyjmimy

$$(13) \quad x_0 = \xi_0, \quad x_1 = \xi_1, \quad \dots, \quad x_n = \xi_n,$$

gdzie  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  są pierwiastkami wielomianu  $T_{n+1}$  Czebyszewa, to mamy wtedy minimum  $\Delta$  maksymalnego błędu aproksymacji i na mocy wzoru (8a)

$$(14) \quad \Delta = \max_{-1 \leq x \leq 1} |F(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

W przypadku (13) aproksymację nazywać będziemy *optymalną aproksymacją interpolacyjną wielomianem stopnia  $n$* .

**PRZYKŁAD 3.** Znajdźmy przybliżenie interpolacyjne funkcji  $y = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi/2]$  wielomianem  $f(x)$  stopnia co najwyżej czwartego, który by w punktach  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  przybierał wartości  $\sin 0, \sin \pi/6, \sin \pi/4, \sin \pi/3, \sin \pi/2$ , tzn. wartości  $0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1$ .



Zastosujemy metodę ilorazów różnicowych. Sporządzamy tabelę ilorazów różnicowych

$x$	$y$			
0	0	$\frac{3}{\pi}$		
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{\pi^2} (2\sqrt{2}-3)$		
		$\frac{6}{\pi} (\sqrt{2}-1)$	$\frac{36}{\pi^3} (3\sqrt{3}-8\sqrt{2}+6)$	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{36}{\pi^2} (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$	$\frac{72}{\pi^4} (16\sqrt{2}-9\sqrt{3}-7)$	
		$\frac{6}{\pi} (\sqrt{3}-\sqrt{2})$	$\frac{36}{\pi^3} (8\sqrt{2}-6\sqrt{3}-1)$	
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{12}{\pi^2} (2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2)$		
		$\frac{3}{\pi} (2-\sqrt{3})$		
$\frac{\pi}{2}$	1			

Zatem

$$\begin{aligned}
 f(x) = & \frac{3}{\pi} x + \frac{12}{\pi^2} (2\sqrt{2}-3) x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \\
 & + \frac{36}{\pi^3} (3\sqrt{3}-8\sqrt{2}+6) x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \\
 & + \frac{72}{\pi^4} (16\sqrt{2}-9\sqrt{3}-7) x \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left(x - \frac{\pi}{3}\right),
 \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}
 (15) \quad f(x) = & \left(25 - 32\sqrt{2} + \frac{27}{2}\sqrt{3}\right) \frac{x}{\pi} + (352\sqrt{2} - 162\sqrt{3} - 217) \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + \\
 & + (594\sqrt{3} - 1152\sqrt{2} + 594) \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + (1152\sqrt{2} - 648\sqrt{3} - 504) \left(\frac{x}{\pi}\right)^4.
 \end{aligned}$$



Obliczmy  $\sin 18^\circ$  za pomocą wzoru (15). Mamy

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &\approx f\left(\frac{\pi}{10}\right) = \\ &= \left(25 - 32\sqrt{2} + \frac{27}{2}\sqrt{3}\right)\frac{1}{10} + (352\sqrt{2} - 162\sqrt{3} - 217)\frac{1}{100} + \\ &\quad + (594\sqrt{3} - 1152\sqrt{2} + 594)\frac{1}{1000} + (1152\sqrt{2} - 648\sqrt{3} - 504)\frac{1}{10000} = \\ &= 0,8736 - 0,7168\sqrt{2} + 0,2592\sqrt{3} = 0,30884.\end{aligned}$$

Oszacujemy błąd otrzymanego przybliżenia na podstawie nierówności (8a)

$$\begin{aligned}\left|\sin \frac{\pi}{10} - f\left(\frac{\pi}{10}\right)\right| &\leq \frac{1}{5!} \left|\frac{\pi}{10}\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \\ &= \frac{7}{9} \pi^5 10^{-6} < 0,000239.\end{aligned}$$

24

Zatem  $\sin 18^\circ = 0,30884$ .

Sprawdzamy w tablicach funkcji  $y = \sin x$ , że  $\sin 18^\circ = 0,30901\dots$

Można by w rachunkach powyższych od samego początku zastąpić liczby  $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$  ich przybliżeniami dziesiętnymi. Wtedy musielibyśmy również szacować błędy płynące z takiego zastąpienia. Wygodnie jest przyjąć na tyle dokładne przybliżenia dziesiętne liczb  $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ , aby błędy stąd płynące były bardzo małe i aby można je było śmiało pomijać. Przyjmijmy na przykład

$$\pi \approx 3,1415926, \quad \sqrt{2} \approx 1,4142136, \quad \sqrt{3} \approx 1,7320508$$

i zastosujmy teraz do obliczenia  $\sin 18^\circ$  metodę Aitkena podług schematu (5) w rozdziale IV.

$x$	$\Delta x$	$y$				
0,0000000	0,3141593	0,0000000				
0,5235988	-0,2094395	0,5000000	0,3000000			
0,7853982	-0,4712389	0,7071068	0,2828427	0,3137259		
1,0471976	-0,7330383	0,8660254	0,2598076	0,3160770	0,309494	
1,5707963	-1,2566370	1,0000000	0,2000000	0,3200000	0,309961	0,30884



Otrzymaliśmy ten sam wynik, który uzyskaliśmy metodą ilorazów różnicowych.

PRZYKŁAD 4. Znajdźmy teraz optymalne przybliżenie interpolacyjne funkcji  $y = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi/2]$  wielomianem czwartego stopnia.

Wprowadzamy nową zmienną  $\bar{x}$  określoną wzorem

$$x = \frac{\pi}{4} \bar{x} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} (\bar{x} + 1).$$

Mamy aproksymować funkcję  $y = \sin \frac{\pi(\bar{x}+1)}{4}$  w przedziale  $[-1, +1]$ .

Ponieważ szukany wielomian ma być optymalnym przybliżeniem interpolacyjnym, więc punkty  $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4$ , w których obie funkcje, aproksymowana i aproksymująca, mają te same wartości, znajdujemy jako pierwiastki wielomianu  $T_5(x)$  Czebyszewa w tablicy (11). Mamy

$$(16) \quad \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \cos \frac{9\pi}{10} = -0,9510565^{02}, & \bar{x}_2 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0, \\ \bar{x}_1 &= \cos \frac{7\pi}{10} = -0,5877853^{05}, & \bar{x}_3 &= \cos \frac{3\pi}{10} = 0,5877853^{05}, \\ \bar{x}_4 &= \cos \frac{\pi}{10} = 0,9510565^{02}. \end{aligned}$$

Obliczamy teraz wartości funkcji  $y = \sin \frac{\pi(\bar{x}+1)}{4}$  w punktach (16) i układamy tabelkę ilorazów różnicowych

$\bar{x}$	$y$				
<sup>02</sup> -0,9510565	<sup>06</sup> 0,0384307				
		<sup>61</sup> 0,7699366			
<sup>05</sup> -0,5877853	<sup>10</sup> 0,3181265		<sup>102</sup> -0,1137302		
	<sup>31</sup> 0,6617728			<sup>99</sup> -0,0653177	
0	<sup>02</sup> 0,7071068		<sup>48</sup> -0,2142438		<sup>98</sup> 0,0109258
	<sup>22</sup> 0,4099141			<sup>77</sup> -0,0445355	
<sup>05</sup> 0,5877853	<sup>07</sup> 0,9480483		<sup>69</sup> -0,2827769		
	<sup>41</sup> 0,1409773				
<sup>02</sup> 0,9510565	<sup>06</sup> 0,9992613				



Szukany wielomian ma zatem postać

$$\begin{aligned}
 (17) \quad y = & \overset{06}{0,0384307} + \overset{61}{0,7699366} (\bar{x} + \overset{02}{0,9510565}) - \\
 & \overset{102}{0,1137302} (\bar{x} + \overset{02}{0,9510565}) (\bar{x} + \overset{05}{0,5877853}) - \\
 & \overset{99}{0,0653177} (\bar{x} + \overset{02}{0,9510565}) (\bar{x} + \overset{05}{0,5877853}) \bar{x} + \\
 & \overset{98}{0,0109258} (\bar{x} + \overset{02}{0,9510565}) (\bar{x} + \overset{05}{0,5877853}) \bar{x} (\bar{x} - \overset{05}{0,5877853}).
 \end{aligned}$$

Minimum  $\Delta$  maksymalnego błędu aproksymacji jest na mocy (14)

$$\Delta \leq \frac{M_5}{2^4 5!} = \frac{1}{1920} M_5,$$

gdzie  $M_5$  jest maksimum wartości bezwzględnej piątej pochodnej funkcji  $y = \sin \frac{\pi(\bar{x}+1)}{4}$  w przedziale  $[-1, +1]$ .

Ponieważ

$$y^{(5)} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \cos \frac{\pi(\bar{x}+1)}{4},$$

więc  $M_5 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^5$  i

$$\Delta \leq \frac{1}{1920} \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < 0,00016,$$

a zatem błąd aproksymacji jest mniejszy niż w przykładzie 3.

Wracając we wzorze (17) do zmiennej  $x$  mamy

$$\begin{aligned}
 y = & \overset{06}{0,0384307} + \overset{61}{0,7699366} \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{02}{0,0489435}\right) - \\
 & \overset{102}{0,1137302} \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{02}{0,0489435}\right) \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{05}{0,4122147}\right) - \\
 & \overset{99}{0,0653177} \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{02}{0,0489435}\right) \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{05}{0,4122147}\right) \left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right) + \\
 & \overset{98}{0,0109258} \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{02}{0,0489435}\right) \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{05}{0,4122147}\right) \times \\
 & \times \left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right) \left(4 \frac{x}{\pi} - \overset{05}{1,5877853}\right);
 \end{aligned}$$



po uporządkowaniu

$$(18) \quad y = \sin x \approx 0,0001206 + 3,129496 \frac{x}{\pi} + 0,197059 \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - \\ - 6,312310 \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + 2,797005 \left(\frac{x}{\pi}\right)^4,$$

czyli ostatecznie po uwzględnieniu błędu aproksymacji

$$(19) \quad y = \sin x = 0,0001206 + 0,9961495x + 0,0199663x^2 - \\ - 0,2035817x^3 + 0,0287140x^4.$$

Podstawiając na przykład do wzoru (19)  $x = 18^\circ = \pi/10$  otrzymujemy

17

$\sin 18^\circ = 0,30901$ . Dokładna wartość jest  $\sin 18^\circ = 0,309017\dots$  Porównując błędy otrzymane dla  $\sin 18^\circ$  w przykładach 3 i 4 widzimy, że błąd otrzymany w przykładzie 4 jest mniejszy niż w przykładzie 3.

**§ 34. Metoda najmniejszych kwadratów.** Niech będzie dana funkcja  $y = F(x)$ , która w różnych pomiędzy sobą punktach  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$  przybiera wartości  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$ . Chcemy znaleźć takie przybliżenie funkcji  $y = F(x)$  wielomianem co najwyżej stopnia  $n$  ( $n < m$ )

$$(20) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

aby błąd średni  $M$  aproksymacji osiągnął minimum, tj. aby funkcja

$$(21) \quad \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = (y_0 - a_0 - a_1x_0 - a_2x_0^2 - \dots - a_nx_0^n)^2 + \\ + (y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2 - \dots - a_nx_1^n)^2 + \dots + \\ + (y_m - a_0 - a_1x_m - a_2x_m^2 - \dots - a_nx_m^n)^2 = (m+1) M^2$$

osiągała minimum. Należy podkreślić, że przy takim postawieniu zagadnienia minimizujemy tylko błąd średni  $M$ , z jakim wartości wielomianu  $f(x)$  w punktach  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$  przybliżają wartości  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$  funkcji  $F(x)$ . O błędzie, z jakim wielomian  $f(x)$  przybliża funkcję  $F(x)$  poza punktami  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ , nie potrafimy zazwyczaj nic powiedzieć.

Taką metodę aproksymacji nazywamy *metodą najmniejszych kwadratów*. O ile w przypadku przybliżeń interpolacyjnych było zawsze  $n = m$ , o tyle metodę najmniejszych kwadratów stosujemy, gdy  $n < m$ . W przypadku  $n = m$  metoda najmniejszych kwadratów pozwala otrzymać co prawda wielomian interpolacyjny, ale na dłuższej drodze niż bezpośrednie metody interpolacyjne.