

Ponadto $h = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ i na mocy (59)

$$\begin{aligned} & \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} = \\ &= \frac{1}{12} (1,44270 + 4 \cdot 1,23315 + 2 \cdot 1,09136 + 4 \cdot 0,98853 + 0,91024) + \\ &+ \frac{1}{12} (\pm 0,000005 \pm 4 \cdot 0,000005 \pm 2 \cdot 0,000005 \pm 4 \cdot 0,000005 \pm 0,000005) - \\ &- \frac{1}{180} \cdot 4 \cdot 12,4 \cdot \frac{1}{4^5} \pm \frac{1}{180} \cdot 4 \cdot 11,7 \cdot \frac{1}{4^5} = \\ &= 1,11853 \pm 0,000002 \pm 0,000005 - 0,00027 \pm 0,000001 \pm 0,00026 = \\ &= 1,1183 \pm 0,00031. \end{aligned}$$

Zobaczmy jeszcze, jak wypadłoby oszacowanie błędu ze wzoru (65). Na mocy (60) jest $I_1 = 1,11853$, a na mocy (63)

$$I_2 \approx \frac{1}{6} (1,44270 + 4 \cdot 1,09136 + 0,91024) \approx 1,11973.$$

Ze wzoru (65) otrzymujemy wtedy błąd B_1 przybliżenia I_1

$$B_1 \approx \frac{1,11853 - 1,11973}{15} = \frac{-0,0012}{15} = -0,00008.$$

§ 66. Metoda Newtona-Cotesa. Zarówno w metodzie trapezów, jak i w metodzie Simpsona całkowanie przybliżone polegało na zastąpieniu funkcji podcałkowej $F(x)$ jej wielomianem interpolacyjnym $f(x)$, który w metodzie trapezów był pierwszego, a w metodzie Simpsona — drugiego stopnia. Naturalnym uogólnieniem tamtych dwóch metod jest metoda, polegająca na zastąpieniu pod znakiem całki funkcji $F(x)$ jej wielomianem interpolacyjnym n -tego stopnia $f(x)$, który w różnych pomiędzy sobą punktach x_0, x_1, \dots, x_n przybiera wartości $y_0 = F(x_0)$, $y_1 = F(x_1)$, ..., $y_n = F(x_n)$. Wtedy przyjmuje się jak w poprzednich metodach, że

$$(67) \quad \int_a^b F(x) dx \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Zanim przejdziemy do oszacowania błędu takiego przybliżenia, zwróćmy uwagę, że przez analogię do poprzednich metod wolno się spo-

dziewać, iż można tak dobrać liczby A_0, A_1, \dots, A_n , aby wzór

$$(68) \quad I = \int_a^b f(x) dx = (b-a)(A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n)$$

był prawdziwy dla dowolnego wielomianu $f(x)$ stopnia co najwyżej n , jeżeli we wzorze (68) podstawić za y_0, y_1, \dots, y_n wartości tego wielomianu w punktach x_0, x_1, \dots, x_n . Aby obliczyć współczynniki A_0, A_1, \dots, A_n , wygodnie jest wprowadzić nową zmienną

$$(69) \quad \xi = \frac{2x - a - b}{b - a}, \quad \text{skąd} \quad x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}.$$

Wtedy

$$(69a) \quad f(x) = f\left(\frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}\right) = \varphi(\xi),$$

gdzie $\varphi(\xi)$ jest, podobnie jak funkcja $f(x)$, wielomianem stopnia co najwyżej n oraz

$$(70) \quad I = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ze wzorów (68) i (70) wynika, że

$$(71) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi = 2A_0 y_0 + 2A_1 y_1 + \dots + 2A_n y_n.$$

Wzór ten ma być prawdziwy dla wszelkich wielomianów $\varphi(\xi)$ stopnia co najwyżej n . Niech

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n.$$

Wtedy

$$(72) \quad \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) d\xi = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 + \dots + \frac{2}{m+1} a_m,$$

gdzie

$$m = \begin{cases} n-1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ n & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Z drugiej strony

$$y_i = f(x_i) = \varphi(\xi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

gdzie

$$(73) \quad \xi_i = \frac{2x_i - a - b}{b - a} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Zatem

$$(74) \quad y_i = a_0 + a_1 \xi_i + \dots + a_n \xi_i^n \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Podstawiając wzory (72) i (74) do (71) i przyrównując współczynniki przy a_0, a_1, \dots, a_n po obu stronach znaku równości, co zapewnia prawdziwość wzoru (71) dla wszelkich a_0, a_1, \dots, a_n , otrzymujemy następujący układ n równań liniowych z n niewiadomymi A_0, A_1, \dots, A_n :

$$(75) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n A_i &= 1, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i A_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^2 A_i &= \frac{1}{3}, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^3 A_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^4 A_i &= \frac{1}{5}, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^n \xi_i^n A_i &= \beta, \quad \text{gdzie} \quad \beta = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \frac{1}{n+1} & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases} \end{aligned}$$

Układ (75) ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie, ponieważ jego wyznacznik charakterystyczny jest tzw. wyznacznikiem Vandermonde'a¹⁾, a więc różnym od zera dla różnych pomiędzy sobą liczb $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$. Ale $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ są na mocy (69) różne, bowiem założyliśmy, że x_0, x_1, \dots, x_n są różne.

Niech teraz

$$(76) \quad x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

W szczególności jest wtedy $x_0 = a$ i $x_n = b$. Na mocy (69) jest

$$(76a) \quad \xi_i = \frac{2a + 2i \frac{b-a}{n} - a - b}{b-a} = i \frac{2}{n} - 1$$

¹⁾ Patrz np. W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa-Wrocław 1951, str. 20.

oraz

$$\xi_i + \xi_{n-i} = i \frac{2}{n} - 1 + (n-i) \frac{2}{n} - 1 = 0.$$

Niech

$$(77) \quad k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Układ (75) jest teraz równoważny układowi

$$(78) \quad \begin{aligned} A_i &= A_{n-i}, \quad i=0, 1, \dots, k, \\ \sum_{i=0}^k A_i - \frac{1}{2} \gamma &= \frac{1}{2}, \quad \text{gdzie } \gamma = \begin{cases} A_k & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases} \\ \sum_{i=0}^k \xi_i^2 A_i &= \frac{1}{6}, \\ \sum_{i=0}^k \xi_i^4 A_i &= \frac{1}{10}, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^k \xi_i^{2k} A_i &= \frac{1}{2(2k+1)}, \end{aligned}$$

gdzie ξ_i ($i=0, 1, \dots, k$) są liczbami określonymi wzorami (76a).

Z układu (78) obliczamy A_0, A_1, \dots, A_n i podstawiamy do (68). Obliczenie wartości przybliżonej I całki $\int_a^b F(x) dx$ z tak otrzymanego wzoru (68) nosi nazwę *metody Newtona-Cotesa*.

Zauważmy, że dla n parzystych wzór (68) jest prawdziwy również dla każdego wielomianu $f(x)$ stopnia $n+1$. Jeżeli bowiem $\varphi(\xi) = a_0 + a_1 \xi + \dots + a_{n+1} \xi^{n+1}$, to wzór (72) jest nadal prawdziwy, a wzór (74) przybiera postać $y_i = a_0 + a_1 \xi_i + \dots + a_{n+1} \xi_i^{n+1}$ ($i=0, 1, \dots, n$). Podstawiając te wzory do (71) i przyrównując współczynniki przy a_0, a_1, \dots, a_{n+1} otrzymujemy nadal układ (75), ale ponadto równanie $\sum_{i=0}^n \xi_i^{n+1} A_i = 0$. Równanie to jest spełnione na mocy wzoru (76a) i pierwszego z równań (78).

Gdybyśmy zatem zamiast wielomianu interpolacyjnego $f(x)$ stopnia n obliczyli wielomian interpolacyjny $f^*(x)$ stopnia $n+1$, który nie tylko w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , ale ponadto w dowolnym punkcie x_{n+1} z prze-

działu $[a, b]$ miałyby te same wartości, co funkcja $F(x)$, to mielibyśmy

$$(68a) \quad I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx.$$

Pozostaje do omówienia sprawa dokładności, z jaką całka I obliczona ze wzoru (68) przybliży całkę $\int_a^b F(x) dx$ danej funkcji $F(x)$. Zakładamy, że funkcja $F(x)$ ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną rzędu $n+1$, jeśli wielomian interpolacyjny $f(x)$ jest stopnia n nieparzystego, a ciągłą pochodną $(n+2)$ -go rzędu, jeśli wielomian jest stopnia n parzystego. Niech

$$s = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ n+1 & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

oraz

$$(79) \quad M_{s+1}^- \leq F^{(s+1)}(x) \leq M_{s+1}^+.$$

Zatem

$$(79a) \quad |F^{(s+1)}(x) - F_{s+1}| \leq M_{s+1},$$

gdzie

$$(79b) \quad F_{s+1} = \frac{M_{s+1}^+ + M_{s+1}^-}{2}, \quad M_{s+1} = \frac{M_{s+1}^+ - M_{s+1}^-}{2}.$$

Niech dalej będzie

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ f^*(x) & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Na mocy wzoru (8) z rozdziału IV jest

$$F(x) - g(x) = \frac{F^{(s+1)}(\vartheta) - F_{s+1}}{(s+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s) + \\ + \frac{F_{s+1}}{(s+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s),$$

gdzie ϑ jest liczbą dobraną do x i zawartą w przedziale (a, b) . Gdy n jest liczbą parzystą, to $x_s = x_{n+1}$ jest dowolną liczbą z przedziału $[a, b]$.

Zatem

$$|F(x) - g(x) - \frac{F_{s+1}}{(s+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s)| \leq \\ \leq \frac{M_{s+1}}{(s+1)!} |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s)|.$$

Zatem na mocy (36), (37) i (68 a) jest

$$(80) \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \frac{F_{s+1}}{(s+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s) dx \pm \\ \pm \frac{M_{s+1}}{(s+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s)| dx.$$

Oszacowanie błędu we wzorze (80) można poprawić. Można dowieść¹⁾, że prawdziwy jest wzór

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \frac{F_{s+1}}{(s+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s) dx \pm \\ \pm \frac{M_{s+1}}{(s+1)!} \left| \int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_s) dx \right|,$$

gdzie dla n parzystych $x_s = x_{n+1} = x_{n/2}$.

Wzór ten po uproszczeniu i po podstawieniu (68) ma postać

$$(81) \quad \int_a^b F(x) dx = (b-a)(A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n) + K F_{s+1} \pm |K| M_{s+1},$$

gdzie liczby A_0, A_1, \dots, A_n oblicza się z układu (78), liczby F_{s+1} i M_{s+1} określone są wzorem (79b) oraz

$$(81a) \quad K = \begin{cases} \frac{2}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2n} \right)^{n+2} \int_0^n (\xi^2 - 1^2)(\xi^2 - 3^2)(\xi^2 - 5^2) \dots (\xi^2 - n^2) d\xi & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ \frac{2}{(n+2)!} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+3} \int_0^{n/2} \xi^2 (\xi^2 - 1^2)(\xi^2 - 2^2) \dots \left(\xi^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right) d\xi & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Niech np. $n=4$. Ze wzoru (77) otrzymujemy $k=2$, a ze wzoru (76a)

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = -\frac{1}{2}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}, \quad \xi_4 = 1. \text{ Układ (78) przybiera postać}$$

$$A_0 = A_4, \quad A_1 = A_3, \quad A_0 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 = \frac{1}{2},$$

$$A_0 + \frac{1}{4} A_1 = \frac{1}{6}, \quad A_0 + \frac{1}{16} A_1 = \frac{1}{10},$$

¹⁾ Np. bezpośrednio na mocy twierdzenia udowodnionego w książce: И. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*, Москва 1953, str. 312-321.

skąd

$$A_0 = \frac{7}{90}, \quad A_1 = \frac{32}{90}, \quad A_2 = \frac{12}{90}, \quad A_3 = \frac{32}{90}, \quad A_4 = \frac{7}{90}.$$

Ze wzoru (81a) otrzymujemy

$$K = \frac{2}{6!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^7 \int_0^2 \xi^2 (\xi^2 - 1)(\xi^2 - 4) d\xi = -\frac{8}{945} \left(\frac{b-a}{4} \right)^7.$$

Zatem wzór (81) dla $n=4$ ma postać

$$(82) \quad \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{90} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) - \\ - \frac{8}{945} F_6 \left(\frac{b-a}{4} \right)^7 \pm \frac{8}{945} M_6 \left(\frac{b-a}{4} \right)^7.$$

W tablicy VIII na końcu książki podane są wzory (81) Newtona-Cotesa dla $n=1, 2, \dots, 6$.

PRZYKŁAD 8. Obliczyć całkę z przykładów 6 i 7 stosując wzór (82).
Mamy zatem obliczyć całkę

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}.$$

Jest

$$x_0 = 2,00, \quad x_1 = 2,25, \quad x_2 = 2,5, \quad x_3 = 2,75, \quad x_4 = 3,00$$

oraz

$$y_0 = \frac{1}{\ln 2,00} = 1,44270 \pm 0,000005,$$

$$y_1 = \frac{1}{\ln 2,25} = 1,23315 \pm 0,000005,$$

$$y_2 = \frac{1}{\ln 2,50} = 1,09136 \pm 0,000005,$$

$$y_3 = \frac{1}{\ln 2,75} = 0,98853 \pm 0,000005,$$

$$y_4 = \frac{1}{\ln 3,00} = 0,91024 \pm 0,000005.$$

Ponadto

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(6)} = \frac{2}{x^6 \ln^7 x} (60 \ln^5 x + 274 \ln^4 x + 675 \ln^3 x + 1020 \ln^2 x + 900 \ln x + 360).$$

Ponieważ

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(7)} = \frac{-2}{x^7 \ln^8 x} (360 \ln^6 x + 1764 \ln^5 x + 4872 \ln^4 x + 8820 \ln^3 x + 10500 \ln^2 x + 7560 \ln x + 2520),$$

więc dla $2 \leq x \leq 3$ jest

$$\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(7)} < 0$$

i stąd

$$5 < \left(\frac{1}{\ln x}\right)_{x=3}^{(6)} \leq \left(\frac{1}{\ln x}\right)^{(6)} \leq \left(\frac{1}{\ln x}\right)_{x=2}^{(6)} < 720.$$

Przyjmujemy $M_6^- = 4$, $M_6^+ = 720$ i na mocy (79a) mamy $F_6 = 362$, $M_6 = 358$.

Ostatecznie

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{\ln x} &= \frac{1}{90} (7 \cdot 1,44270 + 32 \cdot 1,23315 + 12 \cdot 1,09136 + 32 \cdot 0,98853 + \\ &+ 7 \cdot 0,91024) + \frac{1}{90} (7 + 32 + 12 + 32 + 7) (\pm 0,000005) - \\ &- \frac{8}{945} \cdot 362 \cdot \frac{1}{4^7} \pm \frac{8}{945} \cdot 358 \cdot \frac{1}{4^7} = 1,1183 \pm 0,00023. \end{aligned}$$

Jak widać z porównania z wynikiem uzyskanym metodą Simpsona, wynik jest ten sam, a oszacowanie błędu ze wzoru (82) jest nieco dokładniejsze.

§ 67. Metoda Czebyszewa. Można uzyskać spełnienie równań układu (75) na innej drodze niż opisana w poprzednim paragrafie. Można mianowicie ustalić z góry wartości współczynników A_0, A_1, \dots, A_n z tym jedynie warunkiem, by spełniały pierwsze z równań układu (75), tzn. warunek

$$(83) \quad \sum_{i=0}^n A_i = 1,$$

a liczby $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ dobrać tak, by były spełnione pozostałe równania układu (75) i ponadto równanie

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^{n+1} A_i = \gamma,$$

gdzie $\gamma = 0$ dla n parzystych i $\gamma = \frac{1}{n+2}$ dla n nieparzystych, tzn. układ

$$(84) \quad \sum_{i=0}^n \xi_i A_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n \xi_i^2 A_i = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^n \xi_i^{n+1} A_i = \gamma.$$

Gdy wartości funkcji $F(x)$, której całkę $\int_a^b F(x) dx$ należy obliczyć, dane są z doświadczenia i należy się poważnie liczyć z błędami tych wartości, wygodnie jest przyjąć

$$(85) \quad A_0 = A_1 = \dots = A_n = \frac{1}{n+1}.$$

Można łatwo wykazać (dowód pomijamy), że wtedy na ogół błędy wartości funkcji mają najmniejszy wpływ na błąd przybliżenia (68) całki $\int_a^b F(x) dx$.

Metodą Czebyszewa nazywamy właśnie obliczanie wartości przybliżonej całki $\int_a^b F(x) dx$ ze wzoru (68), w którym współczynniki A_0, A_1, \dots, A_n dane są wzorem (85), a wartości y_0, y_1, \dots, y_n funkcji $F(x)$ oblicza się w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , które są związane wzorem (73) z pierwiastkami $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ układu (84).

Niech np. $n=3$. Wtedy na mocy (85) jest $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 1/4$ i układ (84) ma postać

$$\begin{aligned} \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 0, & \xi_0^3 + \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 &= 0, \\ \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 &= \frac{4}{3}, & \xi_0^4 + \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Układ ten ma tylko jedno rozwiązanie spełniające warunek

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3,$$

mianowicie

$$(86) \quad \begin{aligned} \xi_0 &= -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \approx -0,794654, & \xi_2 &= \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}} \approx 0,187592, \\ \xi_1 &= -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}} \approx -0,187592, & \xi_3 &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \approx 0,794654. \end{aligned}$$

Na mocy (73) jest

$$(87) \quad x_i = \frac{b-a}{2} \xi_i + \frac{b+a}{2} \quad (i=0,1,2,3).$$

Wzór (68) przybierze postać

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{4} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3),$$

gdzie $f(x)$ jest wielomianem interpolacyjnym funkcji $F(x)$, który w punktach (87) ma z funkcją $F(x)$ te same wartości y_0, y_1, y_2, y_3 . Punkty (87)

obliczamy z wartości (86). Błąd, z jakim liczba I przybliża całkę $\int_a^b F(x) dx$, szacujemy ze wzoru (80).

Czytelnik interesujący się metodą Czebyszewa może znaleźć bardziej szczegółowe informacje w cytowanej już książce Sz. E. Mikuladzego¹⁾ jak również w książce I. P. Natanson²⁾.

Warto tu jednak podkreślić, że S. N. Bernsztejn udowodnił, iż układ (84) nie ma rozwiązań rzeczywistych dla $n > 9$. Wiadomo również, że dla $n=8$ układ ten nie ma rozwiązań rzeczywistych. Natomiast dla $n=1, 2, \dots, 7$ układ (84) ma rozwiązanie rzeczywiste, znalezione przez P. L. Czebyszewa.

§ 68. Metoda Gaussa. Metodą Gaussa nazywamy sposób obliczania

wartości przybliżonej I całki $\int_a^b F(x) dx$ ze wzoru (68), w którym y_0, y_1, \dots

\dots, y_n oznaczają wartości tej funkcji w punktach x_0, x_1, \dots, x_n , odpowiadających według wzoru (73) wartościom $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ zmiennej pomocniczej ξ , a liczby $A_0, A_1, \dots, A_n, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ dobiera się tak, by była spełniona jak największa liczba równań typu (75), tzn. tak, by wzór (68) był dokładny dla wielomianów $f(x)$ możliwie wysokiego stopnia.

Zakładamy, że dana funkcja $F(x)$, której całkę $\int_a^b F(x) dx$ mamy obliczyć, ma w przedziale $[a, b]$ pochodną $F^{(2n+2)}(x)$ rzędu $2n+2$ i że zachodzi nierówność $M_{2n+2}^- \leq F^{(2n+2)}(x) \leq M_{2n+2}^+$, gdzie M_{2n+2}^-, M_{2n+2}^+ są stałymi, skąd

$$(88) \quad |F^{(2n+2)}(x) - F_{2n+2}| \leq M_{2n+2},$$

¹⁾ Ibidem, str. 345.

²⁾ И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, Москва-Ленинград 1949, str. 641.