

Oznaczając

$$(49) \quad \int_a^\beta p(x) [\varphi_j(x)]^2 dx = \lambda_j \quad (j=0, 1, \dots, n),$$

mamy

$$(50) \quad \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\lambda_0} \int_a^\beta p(x) \varphi_0(x) F(x) dx, \\ c_1 &= \frac{1}{\lambda_1} \int_a^\beta p(x) \varphi_1(x) F(x) dx, \\ &\dots \dots \dots \\ c_n &= \frac{1}{\lambda_n} \int_a^\beta p(x) \varphi_n(x) F(x) dx. \end{aligned}$$

To, że funkcja (47) istotnie osiąga minimum, gdy są spełnione równości (50), widać od razu, gdy przedstawimy ją w postaci

$$\begin{aligned} \Psi(c_0, c_1, \dots, c_n) &= \int_a^\beta p(x) [F(x)]^2 dx - 2 \sum_{i=0}^n c_i \int_a^\beta p(x) \varphi_i(x) F(x) dx + \sum_{i=0}^n \lambda_i c_i^2 = \\ &= \int_a^\beta p(x) [F(x)]^2 dx - \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} \left[\int_a^\beta p(x) \varphi_i(x) F(x) dx \right]^2 + \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \lambda_i \left[c_i - \frac{1}{\lambda_i} \int_a^\beta p(x) \varphi_i(x) F(x) dx \right]^2, \end{aligned}$$

którą otrzymujemy korzystając z ortogonalności funkcji $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ i wzorów (49).

Widzimy również, że jeżeli są spełnione równości (50), to

$$(51) \quad \Psi(c_0, c_1, \dots, c_n) = \int_a^\beta p(x) [F(x)]^2 dx - \sum_{i=0}^n \lambda_i c_i^2.$$

Współczynniki c_0, c_1, \dots, c_n określone wzorami (50) nazywamy *współczynnikami Fouriera funkcji $F(x)$* .

Ogólna dyskusja błędu aproksymacji funkcji $F(x)$ wielomianem ortogonalnym (46) nie jest łatwa. Dla oceny dobroci aproksymacji wprowadzimy tu jedynie błąd średni, podobnie jak dla wszystkich metod aproksymacyjnych opartych na metodzie najmniejszych kwadratów.

Błąd średni M_n aproksymacji funkcji $F(x)$ wielomianem ortogonalnym (46) określimy wzorem

$$M_n^2 = \frac{1}{\int_a^\beta p(x) dx} \Psi(c_0, c_1, \dots, c_n).$$

Jeżeli c_0, c_1, \dots, c_n są współczynnikami Fouriera funkcji $F(x)$, to z (51)

$$(52) \quad M_n^2 = \frac{1}{\int_a^\beta p(x) dx} \left(\int_a^\beta p(x) [F(x)]^2 dx - \lambda_0 c_0^2 - \lambda_1 c_1^2 - \dots - \lambda_n c_n^2 \right).$$

Układ ortogonalny $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ nazywamy *zupełnym*, jeżeli dla każdej funkcji $F(x)$ ciągłej w przedziale $[a, \beta]$ jest

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

Można dowieść (dowód pomijamy¹⁾), że układy (39) i (45) są zupełne. Ze wzorów (50) wynika, że współczynniki wielomianu ortogonalnego aproksymującego funkcję $F(x)$ w przedziale $[a, \beta]$ są niezależne od stopnia n tego wielomianu. Jest to bardzo cenna właściwość wielomianów ortogonalnych, gdyż w przypadku, gdy wielomian

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_k \varphi_k(x)$$

aproksymuje daną funkcję $F(x)$ z za małą dokładnością, a chcemy osiągnąć żadaną dokładność aproksymując funkcję $F(x)$ wielomianem wyższego stopnia

$$f^*(x) = \bar{c}_0 \varphi_0(x) + \bar{c}_1 \varphi_1(x) + \dots + \bar{c}_m \varphi_m(x) \quad (m > k),$$

to $\bar{c}_0 = c_0, \bar{c}_1 = c_1, \dots, \bar{c}_k = c_k$ i wystarcza za pomocą wzorów (50) obliczyć jedynie brakujące współczynniki $\bar{c}_{k+1}, \bar{c}_{k+2}, \dots, \bar{c}_m$, aby wielomian $f^*(x)$ był znany. Podobnie, obliczając błąd średni aproksymacji wzorem (52) nie trzeba rachunków rozpoczynać od nowa, a tylko wprowadzić dodatkowo brakujące wyrazy.

PRZYKŁAD 11. Rozwiążmy zadanie z przykładu 10 posługując się wielomianami Legendre'a.

Ponieważ daną funkcję $y = F(x) = \sin x$ mamy aproksymować w przedziale $[0, \pi/2]$, a układ wielomianów Legendre'a jest ortogonalny w przedziale $[-1, +1]$, więc wprowadzamy nową zmienną

$$(54) \quad u = \frac{4}{\pi} x - 1,$$

której wartości leżą w przedziale $[-1, +1]$, gdy wartości x bierzemy z przedziału $[0, \pi/2]$. Mamy wtedy

$$x = \frac{\pi}{4} (u+1), \quad \sin x = \sin \frac{\pi(u+1)}{4}.$$

¹⁾ Dowód podany jest w książce St. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne t. VI, Warszawa-Lwów 1935, str. 106 i 119.

Będziemy aproksymować funkcję

$$(55) \quad G(u) = \sin \frac{\pi(u+1)}{4}$$

wielomianem

$$(56) \quad g(u) = c_0 P_0(u) + c_1 P_1(u) + c_2 P_2(u) + c_3 P_3(u) + c_4 P_4(u),$$

gdzie $P_0(u), P_1(u), P_2(u), P_3(u), P_4(u)$ są wielomianami Legendre'a, określonymi wzorami (44).

Na podstawie wzorów (50) i (44) mamy

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} 1 \sin \frac{\pi(u+1)}{4} du = \frac{2}{\pi},$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} u \sin \frac{\pi(u+1)}{4} du = \frac{24}{\pi^2} - \frac{6}{\pi},$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\pi(u+1)}{4} du = -\frac{480}{\pi^3} + \frac{120}{\pi^2} + \frac{10}{\pi},$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{5}{2} u^3 - \frac{3}{2} u \right) \sin \frac{\pi(u+1)}{4} du = -\frac{13440}{\pi^4} + \frac{3360}{\pi^3} + \frac{336}{\pi^2} - \frac{14}{\pi},$$

$$c_4 = \frac{9}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{35}{8} u^4 - \frac{15}{4} u^2 + \frac{3}{8} \right) \sin \frac{\pi(u+1)}{4} du =$$

$$= \frac{483840}{\pi^5} - \frac{120960}{\pi^4} - \frac{12960}{\pi^3} + \frac{720}{\pi^2} + \frac{18}{\pi}.$$

A zatem

$$(57) \quad g(u) = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{24}{\pi^2} - \frac{6}{\pi} \right) u - \left(\frac{480}{\pi^3} - \frac{120}{\pi^2} - \frac{10}{\pi} \right) \left(\frac{3}{2} u^2 - \frac{1}{2} \right) -$$

$$- \left(\frac{13440}{\pi^4} - \frac{3360}{\pi^3} - \frac{336}{\pi^2} + \frac{14}{\pi} \right) \left(\frac{5}{2} u^3 - \frac{3}{2} u \right) +$$

$$+ \left(\frac{483840}{\pi^5} - \frac{120960}{\pi^4} - \frac{12960}{\pi^3} + \frac{720}{\pi^2} + \frac{18}{\pi} \right) \left(\frac{35}{8} u^4 - \frac{15}{4} u^2 + \frac{3}{8} \right).$$

A oto wartości przybliżone współczynników c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$c_0 \approx 0,636619772367, \quad c_1 \approx 0,52184909031, \quad c_2 \approx -0,1390956290,$$

$$c_3 \approx -0,022066510, \quad c_4 \approx 0,00249144.$$

Obliczemy błąd średni M aproksymacji na podstawie wzoru (52). Mamy

$$\int_{-1}^{+1} \sin^2 \frac{\pi(u+1)}{4} du = 1,$$

a na podstawie (49) i (42)

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_1 = 2/3, \quad \lambda_2 = 2/5, \quad \lambda_3 = 2/7, \quad \lambda_4 = 2/9,$$

skąd

$$c_0^2 \lambda_0 \approx 0,8105694691$$

$$c_1^2 \lambda_1 \approx 0,1815509820$$

$$c_2^2 \lambda_2 \approx 0,0077390376$$

$$c_3^2 \lambda_3 \approx 0,0001391231$$

$$c_4^2 \lambda_4 \approx 0,0000013794$$

$$\text{Suma} \approx 0,9999999912$$

Ponieważ $\int_a^b p(x) dx = \int_{-1}^{+1} dx = 2$, więc

$$M^2 \approx \frac{1}{2} (1 - 0,9999999912) = 0,0000000044, \quad M \approx 0,00007.$$

§ 37. Szereg Fouriera. Szereg

$$c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots,$$

gdzie funkcje $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ tworzą układ ortogonalny, a c_0, c_1, \dots są stałymi współczynnikami, nosi nazwę *szeregu ortogonalnego*. Szczególnym przypadkiem szeregu ortogonalnego jest *szereg trygonometryczny*

$$(58) \quad \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots +$$

$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots$$

Jeśli dla $n = 0, 1, 2, \dots$ jest

$$(59) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx dx,$$

gdzie $F(x)$ jest pewną daną funkcją całkowalną w przedziale $[0, 2\pi]$, to szereg (58) nazywamy wtedy *szeregiem Fouriera funkcji $F(x)$* .

Szereg Fouriera nie zawsze jest zbieżny, a jeżeli nawet jest zbieżny, to nie znaczy to jeszcze, że jest zbieżny do funkcji $F(x)$. Można podać

różne warunki dla funkcji $F(x)$, aby jej szereg Fouriera był do niej zbieżny. Podamy tu bez dowodu¹⁾ tzw. warunki Dirichleta:

Jeżeli

1° przedział $[0, 2\pi]$ daje się podzielić na skończoną liczbę części, w których dana funkcja $F(x)$ jest monotoniczna,

2° funkcja $F(x)$ ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale $[0, 2\pi]$,

3° w każdym punkcie nieciągłości ξ jest

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \xi-} F(x) + \lim_{x \rightarrow \xi+} F(x) \right),$$

$$4^\circ F(0) = F(2\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) + \lim_{x \rightarrow 2\pi-} F(x) \right),$$

to dla każdego $x = x_0$ z przedziału $[0, 2\pi]$ szereg Fouriera funkcji $F(x)$ jest zbieżny do $F(x_0)$.

Jeżeli szereg Fouriera funkcji $F(x)$ jest zbieżny do funkcji $F(x)$ w całym przedziale $[0, 2\pi]$, a funkcja ta jest okresowa o okresie 2π , tzn. dla każdego x jest

$$F(x + 2\pi) = F(x),$$

to oczywiście szereg ten jest zbieżny do funkcji $F(x)$ w całym przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdyż wszystkie funkcje układu ortogonalnego $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ są okresowe o okresie 2π . Z tego względu funkcje okresowe wygodnie jest rozwijać w szeregi Fouriera. Gdy okres funkcji $F(x)$ nie jest równy 2π , lecz np. ω , dokonujemy zamiany zmiennej za pomocą wzoru

$$x = \frac{\omega}{2\pi} \bar{x}.$$

Wtedy funkcja

$$G(\bar{x}) = F\left(\frac{\omega}{2\pi} \bar{x}\right)$$

jest już funkcją okresową o okresie 2π .

W szereg Fouriera rozwijamy również często w przedziale $[0, 2\pi]$ funkcje nie będące okresowymi.

Suma częściowa

$$(60) \quad S_n = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

¹⁾ Dowód można znaleźć np. w książce: Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том III, Москва 1949, str. 529.

szeregu Fouriera funkcji $F(x)$ jest oczywiście przybliżeniem tej funkcji, jakie się uzyskuje metodą najmniejszych kwadratów, gdyż wzory (59) są szczególnym przypadkiem wzorów (50).

Szereg Fouriera funkcji $F(x)$ ciąglej w przedziale $[0, 2\pi]$ nie zawsze jest zbieżny w sensie zwykłym do funkcji $F(x)$, ale dla jego sum częściowych zawsze zachodzi wzór (53). Wynika to z zupełności układu ortogonalnego funkcji $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$, o czym już była mowa w poprzednim paragrafie. Mówimy wtedy, że szereg Fouriera tej funkcji jest do niej *średnio zbieżny*.

PRZYKŁAD 12. Funkcję

$$y = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1, \\ -1 & \text{dla } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $[-1, +1]$.

Dokonyjemy zamiany zmiennej

$$x = \frac{\bar{x}}{\pi} - 1.$$

Funkcja

$$G(\bar{x}) = F\left(\frac{\bar{x}}{\pi} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \bar{x} = 0, \\ -1 & \text{dla } 0 < \bar{x} < \pi, \\ 0 & \text{dla } \bar{x} = \pi, \\ 1 & \text{dla } \pi < \bar{x} < 2\pi, \\ 0 & \text{dla } \bar{x} = 2\pi \end{cases}$$

spełnia warunki Dirichleta, zatem jej szereg Fouriera jest do niej zbieżny.

Obliczamy współczynniki tego szeregu ze wzorów (59)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\bar{x}) \cos n\bar{x} d\bar{x} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos n\bar{x} d\bar{x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\bar{x} d\bar{x} = 0$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\bar{x}) \sin n\bar{x} d\bar{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin n\bar{x} d\bar{x} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin n\bar{x} d\bar{x} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Mamy stąd następujące rozwinięcie funkcji $G(\bar{x})$ w szereg Fouriera w przedziale $[0, 2\pi]$:

$$G(\bar{x}) = -\frac{4}{\pi} \sin \bar{x} - \frac{4}{3\pi} \sin 3\bar{x} - \frac{4}{5\pi} \sin 5\bar{x} - \frac{4}{7\pi} \sin 7\bar{x} - \dots,$$

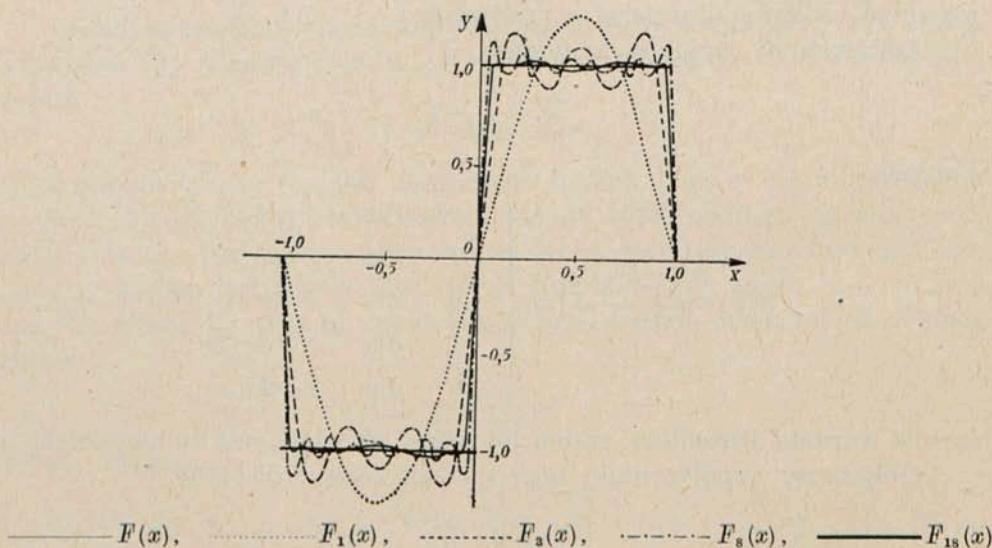
a więc następujące rozwinięcie funkcji $F(x)$ w szereg Fouriera w przedziale $[-1, +1]$:

$$(61) \quad F(x) = G[\pi(x+1)] = -\frac{4}{\pi} \sin \pi(x+1) - \frac{4}{3\pi} \sin 3\pi(x+1) - \\ - \frac{4}{5\pi} \sin 5\pi(x+1) - \frac{4}{7\pi} \sin 7\pi(x+1) - \dots$$

Niech

$$F_m(x) = -\sum_{i=1}^m \frac{4}{(2i-1)\pi} \sin(2i-1)\pi(x+1).$$

Na rys. 5 podano wykresy funkcji $y = F(x), F_1(x), F_3(x), F_8(x), F_{18}(x)$.



Rys. 5

§ 38. Analiza harmoniczna. Zdarza się często, że funkcja $F(x)$, którą chcemy aproksymować wielomianem trygonometrycznym

$$(62) \quad f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \\ + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

nie jest nam znana, wiemy jednak, że w punktach x_0, x_1, \dots, x_{m-1} ($m > 2n+1$) przybiera wartości y_0, y_1, \dots, y_{m-1} . Współczynniki $a_0, a_1,$

b_1, \dots, a_n, b_n wielomianu (62) można wtedy znaleźć metodą najmniejszych kwadratów. Żądamy mianowicie, aby funkcja

$$(63) \quad \Phi(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) = \\ = (y_0 - a_0 - a_1 \cos x_0 - b_1 \sin x_0 - \dots - a_n \cos nx_0 - b_n \sin nx_0)^2 + \\ + (y_1 - a_0 - a_1 \cos x_1 - b_1 \sin x_1 - \dots - a_n \cos nx_1 - b_n \sin nx_1)^2 + \dots + \\ + (y_{m-1} - a_0 - a_1 \cos x_{m-1} - b_1 \sin x_{m-1} - \dots - a_n \cos nx_{m-1} - b_n \sin nx_{m-1})^2$$

osiągała minimum. Musi być zatem

$$(64) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} = 0,$$

co daje $2n+1$ równań normalnych

$$(65) \quad \begin{aligned} \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] &= 0, \\ \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] \cos \tau x_v &= 0, \\ \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] \sin \tau x_v &= 0, \end{aligned} \quad \tau = 1, 2, \dots, n.$$

Z równań tych obliczamy współczynniki $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ wielomianu (62). (Dyskusję istnienia rozwiązania układu (65) pomijamy).

Analizą harmoniczną nazywamy właśnie wyznaczanie współczynników wielomianu trygonometrycznego (62) będącego przybliżeniem funkcji $F(x)$.

Rozwiązanie równań normalnych (65) prowadzi w przypadku ogólnym do bardzo długich i żmudnych rachunków. Rachunki te stają się o wiele prostsze, gdy punkty x_0, x_1, \dots, x_{m-1} , w których znamy wartości funkcji $F(x)$, następują po sobie w równych odstępach. Załóżmy mianowicie, że

$$(66) \quad x = \frac{\pi v}{m}, \quad v = 0, 1, \dots, m-1.$$

Gdyby tak nie było, ale $x_v = x_0 + v\Delta x$, gdzie Δx jest stałą różną od zera, to wprowadzilibyśmy w miejsce x nową zmienną \bar{x} określoną wzorem

$$(67) \quad \bar{x} = \frac{x - x_0}{\Delta x} \cdot \frac{2\pi}{m}.$$

Po oznaczeniu przez $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m-1}$ wartości, jakie zmienna \bar{x} przybiera dla $x = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$, otrzymalibyśmy

$$\bar{x}_v = \frac{2\pi v}{m}, \quad v = 0, 1, \dots, m-1,$$

jak we wzorze (66). Przybliżenie funkcji $F(x)$ otrzymujemy w postaci

$$f(\bar{x}) = f\left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \cdot \frac{2\pi}{m}\right).$$

W zastosowaniach praktycznych analizy harmonicznej warunek (66) jest nieraz spełniony i podstawienie (67) nie jest wtedy potrzebne.

Po podstawieniu (66) równania normalne (65) przybierają postać

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] &= \sum_{v=0}^{m-1} y_v - ma_0 - a_1 \sum_{v=0}^{m-1} \cos x_v - b_1 \sum_{v=0}^{m-1} \sin x_v - \\ &\quad - a_2 \sum_{v=0}^{m-1} \cos 2x_v - b_2 \sum_{v=0}^{m-1} \sin 2x_v - \dots - a_n \sum_{v=0}^{m-1} \cos nx_v - \\ &\quad - b_n \sum_{v=0}^{m-1} \sin nx_v = 0, \\ \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] \cos \tau x_v &= \sum_{v=0}^{m-1} y_v \cos \tau x_v - a_0 \sum_{v=0}^{m-1} \cos \tau x_v - \\ &\quad - a_1 \sum_{v=0}^{m-1} \cos x_v \cos \tau x_v - b_1 \sum_{v=0}^{m-1} \sin x_v \cos \tau x_v - \dots - \\ &\quad - b_n \sum_{v=0}^{m-1} \sin nx_v \cos \tau x_v = 0, \\ \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)] \sin \tau x_v &= \sum_{v=0}^{m-1} y_v \sin \tau x_v - a_0 \sum_{v=0}^{m-1} \sin \tau x_v - \\ &\quad - a_1 \sum_{v=0}^{m-1} \cos x_v \sin \tau x_v - b_1 \sum_{v=0}^{m-1} \sin x_v \sin \tau x_v - \dots - \\ &\quad - b_n \sum_{v=0}^{m-1} \sin nx_v \sin \tau x_v = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

gdzie $\tau=1, 2, \dots, n$.

Obliczmy najpierw sumy

$$\sum_{v=0}^{m-1} \cos \tau x_v, \quad \sum_{v=0}^{m-1} \sin \tau x_v, \quad \tau=1, 2, \dots, n.$$

W tym celu piszemy sumę zespoloną

$$\sum_{v=0}^{m-1} \cos \tau x_v + i \sum_{v=0}^{m-1} \sin \tau x_v = \sum_{v=0}^{m-1} \exp i \tau x_v.$$

Ale $x_v = 2\pi v/m$ i $\exp i \tau x_v = \exp(2\pi i v \tau/m) = [\exp(2\pi i \tau/m)]^v$. Po wprowadzeniu pomocniczej zmiennej $q = \exp(2\pi i \tau/m)$ otrzymujemy

$$\sum_{v=0}^{m-1} \cos \tau x_v + i \sum_{v=0}^{m-1} \sin \tau x_v = 1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1} = \frac{q^m - 1}{q - 1},$$

przy czym $q \neq 1$, bo $m > 2n$ i dla $0 < \tau \leq 2n$ jest $0 < \tau/m < \tau/2n \leq 1$.

Ale $q^m = \exp(2\pi i \tau m/m) = \exp 2\pi i \tau = 1$, więc

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \tau x_{\nu} + i \sum_{\nu=0}^{m-1} \sin \tau x_{\nu} = 0,$$

skąd

$$(69) \quad \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \tau x_{\nu} = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{m-1} \sin \tau x_{\nu} = 0,$$

dla τ naturalnych nie większych od $2n$.

Mamy dalej

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \sigma x_{\nu} \cos \tau x_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos(\sigma + \tau) x_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos(\sigma - \tau) x_{\nu},$$

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \sigma x_{\nu} \sin \tau x_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sin(\sigma + \tau) x_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sin(\sigma - \tau) x_{\nu},$$

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \sin \sigma x_{\nu} \sin \tau x_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos(\sigma - \tau) x_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos(\sigma + \tau) x_{\nu},$$

skąd na mocy (69) dla $\sigma, \tau = 1, 2, \dots, n$

$$(70) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \sigma x_{\nu} \cos \tau x_{\nu} &= \begin{cases} 0 & \text{dla } \sigma \neq \tau, \\ \frac{m}{2} & \text{dla } \sigma = \tau, \end{cases} \\ \sum_{\nu=0}^{m-1} \cos \sigma x_{\nu} \sin \tau x_{\nu} &= 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m-1} \sin \sigma x_{\nu} \sin \tau x_{\nu} &= \begin{cases} 0 & \text{dla } \sigma \neq \tau, \\ \frac{m}{2} & \text{dla } \sigma = \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory (69) i (70) w układzie równań (68) z łatwością uzyskujemy jego rozwiązanie

$$(71) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_{\nu}, \\ a_{\tau} &= \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_{\nu} \cos \tau x_{\nu} = \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_{\nu} \cos \frac{2\pi \tau \nu}{m}, \\ b_{\tau} &= \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_{\nu} \sin \tau x_{\nu} = \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_{\nu} \sin \frac{2\pi \tau \nu}{m}, \end{aligned}$$

gdzie $\tau = 1, 2, \dots, n$.

Dla uproszczenia rachunków przyjmuje się z reguły, że m jest liczbą podzielną przez 4, tzn.

$$(72) \quad m = 4r,$$

gdzie r jest liczbą naturalną.

Mamy wtedy

$$x_{m-v} = \frac{2\pi(m-v)}{m} = 2\pi - x_v, \quad v = 1, 2, \dots, \frac{m}{2},$$

skąd

$$\cos \tau x_{m-v} = \cos \tau x_v, \quad \sin \tau x_{m-v} = -\sin \tau x_v.$$

Zatem

$$a_\tau = \frac{2}{m} y_0 + \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m}{2}-1} (y_v + y_{m-v}) \cos \tau x_v + \frac{2}{m} y_{m/2} \cos \pi \tau,$$

$$b_\tau = \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m}{2}-1} (y_v - y_{m-v}) \sin \tau x_v.$$

Ale

$$x_{m/2-v} = \frac{2\pi\left(\frac{m}{2}-v\right)}{m} = \pi - x_v, \quad v = 1, 2, \dots, \frac{m}{4},$$

więc

$$\cos \tau x_{m/2-v} = \begin{cases} -\cos \tau x_v & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ \cos \tau x_v & \text{dla } \tau \text{ parzystych,} \end{cases}$$

$$\sin \tau x_{m/2-v} = \begin{cases} \sin \tau x_v & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ -\sin \tau x_v & \text{dla } \tau \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Zatem

$$a_\tau = \begin{cases} \frac{2}{m} (y_0 - y_{m/2}) + \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m}{4}-1} (y_v - y_{m/2-v} - y_{m/2+v} + y_{m-v}) \cos \frac{2\pi\tau v}{m} & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ \frac{2}{m} (y_0 + y_{m/2}) + \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m}{4}-1} (y_v + y_{m/2-v} + y_{m/2+v} + y_{m-v}) \cos \frac{2\pi\tau v}{m} + \\ + \frac{2}{m} (y_{m/4} + y_{3m/4}) \cos \frac{\pi}{2} \tau & \text{dla } \tau \text{ parzystych,} \end{cases}$$

$$b_\tau = \begin{cases} \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m-1}{4}} (y_v + y_{m/2-v} - y_{m/2+v} - y_{m-v}) \sin \frac{2\pi\tau v}{m} + \frac{2}{m} (y_{m/4} - y_{3m/4}) \sin \frac{\pi}{2} \tau & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{\frac{m-1}{4}} (y_v - y_{m/2-v} + y_{m/2+v} - y_{m-v}) \sin \frac{2\pi\tau v}{m} & \text{dla } \tau \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Wprowadzamy teraz oznaczenia:

$$(73) \quad \left. \begin{aligned} s_v &= y_v + y_{m-v}, \\ d_v &= y_v - y_{m-v}, \\ S_{s_v} &= s_v + s_{m/2-v}, \\ S_{d_v} &= d_v + d_{m/2-v}, \\ D_{s_v} &= s_v - s_{m/2-v}, \\ D_{d_v} &= d_v - d_{m/2-v}, \\ A &= y_0 + y_{m/2}, \\ B &= y_0 - y_{m/2}. \end{aligned} \right\} \quad v=1, 2, \dots, \frac{m}{2}-1,$$

Wzory (71) przybierają wtedy ostatecznie postać

$$(74) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{m} (A + s_r + \sum_{v=1}^{r-1} S_{s_v}), \\ a_\tau &= \begin{cases} \frac{2}{m} \left(B + \sum_{v=1}^{r-1} D_{s_v} \cos \frac{\pi\tau v}{2r} \right) & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ \frac{2}{m} \left(A + s_r \cos \frac{\pi}{2} \tau + \sum_{v=1}^{r-1} S_{s_v} \cos \frac{\pi\tau v}{2r} \right) & \text{dla } \tau \text{ parzystych,} \end{cases} \\ b_\tau &= \begin{cases} \frac{2}{m} \left(d_r \sin \frac{\pi}{2} \tau + \sum_{v=1}^{r-1} S_{d_v} \sin \frac{\pi\tau v}{2r} \right) & \text{dla } \tau \text{ nieparzystych,} \\ \frac{2}{m} \sum_{v=1}^{r-1} D_{d_v} \sin \frac{\pi\tau v}{2r} & \text{dla } \tau \text{ parzystych,} \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie $r=m/4$ zgodnie ze wzorem (72).

Błąd średni M_n aproksymacji funkcji $F(x)$ wielomianem trygonometrycznym (62) określamy wzorem

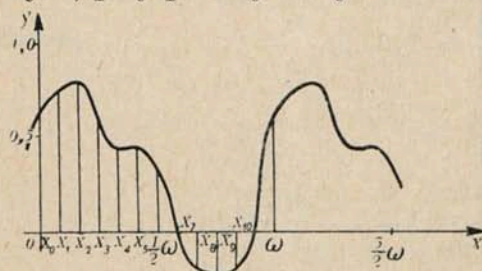
$$M_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{v=0}^{m-1} [y_v - f(x_v)]^2,$$

który na mocy wzorów (69), (70) i (71) daje się przedstawić w postaci

$$(75) \quad M_n^2 = \frac{\sum_{v=0}^{m-1} y_v^2}{m} - a_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{v=0}^n (a_v^2 + b_v^2).$$

Ilość n wyrazów w wielomianie (62) dobieramy zazwyczaj tak, aby M_n było dostatecznie małe i aby był spełniony warunek $m > 2n$.

Są w użyciu specjalne przyrządy zwane *analizatorami harmonicznymi*, przy pomocy których możemy otrzymać (oczywiście z ograniczoną dokładnością) współczynniki wielomianu trygonometrycznego (62), gdy dany jest wykres funkcji aproksymowanej $F(x)$. Zasadą ich działania jest przybliżone obliczanie całek we wzorach (59) dla współczynników Fouriera. Szczegółowy opis analizatorów harmonicznymi (w szczególności najbardziej rozpowszechnionego analizatora harmonicznego O. Madera)



Rys. 6

znajdzie czytelnik np. w książce A. N. Kryłowa poświęconej rachunkom przybliżonym¹⁾.

PRZYKŁAD 13. Przeprowadzić analizę harmoniczną funkcji periodycznej o okresie ω , której wykres jest dany na rys. 6.

Dzielimy przedział $(0, \omega)$ na 12 równych części (znając wartości danej funkcji w 12 punktach przedziału o długości jednego okresu, znamy już w przybliżeniu przebieg tej funkcji). Zatem we wzorach (74) i (75) będzie $m=12$ i $r=3$. Z wykresu odczytujemy

$$\begin{aligned} y_0 &= 0,60, & y_{11} &= 0,05, \\ y_1 &= 0,72, & y_{10} &= -0,19, \\ y_2 &= 0,77, & y_9 &= -0,22, \\ y_3 &= 0,62, & y_8 &= -0,18, \\ y_4 &= 0,43, & y_7 &= 0,03, \\ y_5 &= 0,44, & y_6 &= 0,34. \end{aligned}$$

Powyższy schemat zapisu odczytanych wartości y_0, y_1, \dots, y_{11} jest wygodny dla dalszych obliczeń.

¹⁾ А. Н. Крылов, *Лекции о приближенных вычислениях*, Москва-Ленинград 1950, стр. 182-188.

Obliczamy teraz $s_1, d_1, s_2, d_2, \dots, s_5, d_5, A, B$ według wzorów (73).
Otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_1 &= 0,77, & s_5 &= 0,47, & d_1 &= 0,67, & d_5 &= 0,41, \\ s_2 &= 0,58, & s_4 &= 0,25, & d_2 &= 0,96, & d_4 &= 0,61, \\ & & s_3 &= 0,40, & & & d_3 &= 0,84, \\ & & & & A &= 0,94, & B &= 0,26. \end{aligned}$$

Obliczamy teraz $S_{s_1}, D_{s_1}, S_{d_1}, D_{d_1}, S_{s_2}, D_{s_2}, S_{d_2}, D_{d_2}$ według wzorów (73).
Otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_{s_1} &= 1,24, & D_{s_1} &= 0,30, & S_{d_1} &= 1,08, & D_{d_1} &= 0,26, \\ S_{s_2} &= 0,83, & D_{s_2} &= 0,33, & S_{d_2} &= 1,57, & D_{d_2} &= 0,35. \end{aligned}$$

Możemy teraz obliczyć współczynniki $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ według wzorów (74)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{12} (0,94 + 0,40 + 1,24 + 0,83) = \frac{3,41}{12} \approx 0,284, \\ a_1 &= \frac{1}{6} \left(0,26 + 0,30 \cos \frac{\pi}{6} + 0,33 \cos \frac{\pi}{3} \right) \approx 0,114, \\ b_1 &= \frac{1}{6} \left(0,84 + 1,08 \sin \frac{\pi}{6} + 1,57 \sin \frac{\pi}{3} \right) \approx 0,457, \\ a_2 &= \frac{1}{6} \left(0,94 - 0,40 + 1,24 \cos \frac{\pi}{3} + 0,83 \cos \frac{2\pi}{3} \right) \approx 0,124, \\ b_2 &= \frac{1}{6} \left(0,26 \sin \frac{\pi}{3} + 0,35 \sin \frac{2\pi}{3} \right) \approx 0,088, \\ a_3 &= \frac{1}{6} \left(0,26 + 0,30 \cos \frac{\pi}{2} + 0,33 \cos \pi \right) \approx -0,012, \\ b_3 &= \frac{1}{6} \left(-0,84 + 1,08 \sin \frac{\pi}{2} + 1,57 \sin \pi \right) = 0,040, \\ a_4 &= \frac{1}{6} \left(0,94 + 0,40 + 1,24 \cos \frac{2\pi}{3} + 0,83 \cos \frac{4\pi}{3} \right) \approx 0,051, \\ b_4 &= \frac{1}{6} \left(0,26 \sin \frac{2\pi}{3} + 0,35 \sin \frac{4\pi}{3} \right) \approx -0,013, \\ a_5 &= \frac{1}{6} \left(0,26 + 0,30 \cos \frac{5\pi}{6} + 0,33 \cos \frac{5\pi}{3} \right) \approx 0,028, \\ b_5 &= \frac{1}{6} \left(0,84 + 1,08 \sin \frac{5\pi}{6} + 1,57 \sin \frac{5\pi}{3} \right) \approx 0,003. \end{aligned}$$

Dalszych współczynników obliczać nie możemy, gdyż musi być spełniony warunek $m > 2n$.

Ponieważ okres funkcji danej jest równy ω , więc przyjmując $\Delta x = \omega/12$ mamy na mocy wzoru (67) $\bar{x} = 2\pi x/\omega$.

Wielomian trygonometryczny aproksymujący daną funkcję będzie miał zatem postać

$$(76) \quad f(x) = 0,284 + 0,114 \cos \frac{2\pi x}{\omega} + 0,457 \sin \frac{2\pi x}{\omega} + \\ + 0,124 \cos \frac{4\pi x}{\omega} + 0,088 \sin \frac{4\pi x}{\omega} - 0,012 \cos \frac{6\pi x}{\omega} + \\ + 0,040 \sin \frac{6\pi x}{\omega} + 0,051 \cos \frac{8\pi x}{\omega} - 0,013 \sin \frac{8\pi x}{\omega} + \\ + 0,028 \cos \frac{10\pi x}{\omega} + 0,003 \sin \frac{10\pi x}{\omega}.$$

Korzystając ze wzoru trygonometrycznego

$$C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\varphi + \delta),$$

gdzie

$$\sin \delta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos \delta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$

możemy wzór (76) zapisać jeszcze w postaci

$$f(x) = 0,284 + 0,471 \sin \left(\frac{2\pi x}{\omega} + 0,244 \right) + 0,152 \sin \left(\frac{4\pi x}{\omega} + 0,954 \right) + \\ + 0,042 \sin \left(\frac{6\pi x}{\omega} - 0,292 \right) + 0,053 \sin \left(\frac{8\pi x}{\omega} + 1,821 \right) + \\ + 0,028 \sin \left(\frac{10\pi x}{\omega} + 1,464 \right).$$

Obliczymy jeszcze błąd średni M_5 otrzymanego przybliżenia podług wzoru (75). Mamy

$$\sum_{r=0}^{11} y_r^2 = 2,4701, \quad a_0^2 = 0,080656, \quad \sum_{r=0}^5 (a_r^2 + b_r^2) = 0,250272.$$

Zatem

$$M_5^2 = \frac{2,4701}{12} - 0,080656 - \frac{0,250272}{2} \approx 0,000050 \quad \text{ i } \quad M_5 \approx 0,007.$$

§ 39. Wybór metody aproksymacyjnej. W rozdziale niniejszym omówiliśmy tylko niektóre z najbardziej znanych i używanych metod aproksymacyjnych. Czym się teraz kierować przy wyborze odpowiedniej metody? Otóż wybór metody aproksymacyjnej zależy przede wszystkim od zagadnienia, do którego będziemy ją stosowali. A zagadnienia aproksymacyjne dzielą się na dwie klasy w zależności od teorii błędów, na które się opierają. Do klasy pierwszej należą zagadnienia oparte na teorii błędów maksymalnych. W zagadnieniach tej klasy zakładamy, że błąd aproksymacji nie może w żadnym punkcie rozpatrywanego przedziału przekroczyć określonej wartości, a więc poszukujemy przybliżeń jednostajnych. Do klasy drugiej należą zagadnienia oparte na statystycznej teorii błędów. W zagadnieniach tej klasy błędy aproksymacji określamy statystycznie przez podanie błędu średniego. Błędy aproksymacji mogą być lokalnie bardzo duże, ale prawdopodobieństwo dużych błędów ma być odpowiednio małe, co uzyskujemy przez założenie, że błąd średni ma być mniejszy od ustalonej wartości. Przybliżenia znajdowane na gruncie statystycznej teorii błędów noszą nazwę *przybliżeń kwadratowych*. Warto zauważyć, że jeżeli błąd maksymalny aproksymacji jest mały, to oczywiście i błąd średni jest mały, a zatem dokładne przybliżenia jednostajne są zarazem dokładnymi przybliżeniami kwadratowymi, ale nie na odwrót.

Zagadnienia klasy pierwszej rozwiązujemy najczęściej metodą szeregów potęgowych lub metodą interpolacyjną, zagadnienia klasy drugiej — najczęściej metodą najmniejszych kwadratów (która obejmuje jako przypadki szczególne metodę wielomianów ortogonalnych i analizę harmoniczną). Nie jest to jednak regułą bez wyjątków. Można np. szukać wielomianu aproksymującego daną funkcję metodą najmniejszych kwadratów, a szacować maksymalny błąd aproksymacji. Można również szukać wielomianu aproksymującego metodą interpolacyjną, a obliczać błąd średni aproksymacji. Jednak postępowanie takie należy do wyjątków i musi być usprawiedliwione specjalnym charakterem zagadnienia.

Zagadnienia związane z aproksymacją funkcji, danych w postaci analitycznej, przez inne funkcje należą prawie zawsze do klasy pierwszej. Zagadnienia związane z aproksymacją zależności stochastycznych lub funkcji, dla których znane są jedynie wartości w określonych punktach jako wyniki eksperymentu, należą z reguły do klasy drugiej, ponieważ wyniki eksperymentu mają z reguły znaczenie jedynie statystyczne i prowadzenie krzywych interpolacyjnych dokładnie przez punkty otrzymane z pomiarów wcale nie jest pożądane.

W zagadnieniach klasy pierwszej stosujemy metodę szeregów potęgowych wtedy, gdy funkcja aproksymowana daje się łatwo rozwinąć w szereg Taylora lub jest dana w postaci szeregu potęgowego, a zależy

nam przede wszystkim na prostocie i krótkości rachunków. Za prostotę rachunków musimy jednak często zapłacić tym, że — przy ustalonej dokładności aproksymacji — stopień wielomianu aproksymującego, otrzymanego metodą szeregów potęgowych, jest wyższy od stopnia wielomianu, jaki uzyskalibyśmy metodą interpolacyjną. Gdy zależy nam — przy ustalonej dokładności — na uzyskaniu możliwie niskiego stopnia wielomianu aproksymującego, stosujemy najczęściej metodę interpolacyjną, a zwłaszcza — o ile to jest możliwe (np. ze względu na długość rachunków) — optymalną metodę interpolacyjną. Metody interpolacyjne stosujemy również w tych przypadkach, gdy funkcja dana jest przez wartości w określonych punktach i wartości te uznajemy za pewne. Sytuację taką mamy np. w tablicach matematycznych.

Gdy funkcja aproksymowana daje się rozwinąć w szereg Fouriera, to w niektórych zagadnieniach klasy pierwszej opłaca się aproksymować tę funkcję wielomianem trygonometrycznym, który uzyskujemy jako sumę częściową tego szeregu. W ten sposób można nieraz otrzymać błąd maksymalny aproksymacji znacznie mniejszy niż w przypadku aproksymacji tejże funkcji wielomianem zwykłym tego samego stopnia. Na ogół jednak oszacowanie błędu maksymalnego nie jest w tych przypadkach łatwe.

W zagadnieniach klasy drugiej stosujemy różne warianty metody najmniejszych kwadratów. Ponieważ wymaga ona na ogół długich i żmudnych rachunków, staramy się ją upraszczać, o ile na to warunki zadania pozwalają. W niektórych zagadnieniach, gdy nie wymaga się dużej dokładności, można — przy pewnej wprawie — zastosować nawet tak radykalne uproszczenie, jak znalezienie wielomianu aproksymującego „na oko”. Np. w przykładzie na rys. 4 można by „na oko” poprowadzić prostą aproksymującą daną zależność stochastyczną. Takie postępowanie jest o tyle usprawiedliwione, że przez obliczenie błędu średniego mamy zawsze kontrolę dobroci aproksymacji. Ponadto błąd średni aproksymacji dla wielomianu znalezionego „na oko” jest zazwyczaj niewiele większy od błędu średniego dla wielomianu obliczonego precyzyjnie metodą najmniejszych kwadratów. Jeżeli wymagana jest większa dokładność, to duże uproszczenie metody najmniejszych kwadratów można uzyskać w przypadku, gdy wartości argumentu następują po sobie w równych odstępach (patrz przykład 9). Do zależności periodycznych stosujemy aproksymację metodą analizy harmonicznej. Gdy wreszcie aproksymujemy funkcję daną w postaci analitycznej, to stosujemy zazwyczaj aproksymację wielomianami ortogonalnymi.