

po uporządkowaniu

$$(18) \quad y = \sin x \approx 0,0001206 + 3,129496 \frac{x}{\pi} + 0,197059 \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 - \\ - 6,312310 \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 + 2,797005 \left(\frac{x}{\pi}\right)^4,$$

czyli ostatecznie po uwzględnieniu błędu aproksymacji

$$(19) \quad y = \sin x = 0,0001206 + 0,9961495x + 0,0199663x^2 - \\ - 0,2035817x^3 + 0,0287140x^4.$$

Podstawiając na przykład do wzoru (19)  $x = 18^\circ = \pi/10$  otrzymujemy

17

$\sin 18^\circ = 0,30901$ . Dokładna wartość jest  $\sin 18^\circ = 0,309017\dots$  Porównując błędy otrzymane dla  $\sin 18^\circ$  w przykładach 3 i 4 widzimy, że błąd otrzymany w przykładzie 4 jest mniejszy niż w przykładzie 3.

**§ 34. Metoda najmniejszych kwadratów.** Niech będzie dana funkcja  $y = F(x)$ , która w różnych pomiędzy sobą punktach  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$  przybiera wartości  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$ . Chcemy znaleźć takie przybliżenie funkcji  $y = F(x)$  wielomianem co najwyżej stopnia  $n$  ( $n < m$ )

$$(20) \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

aby błąd średni  $M$  aproksymacji osiągnął minimum, tj. aby funkcja

$$(21) \quad \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = (y_0 - a_0 - a_1x_0 - a_2x_0^2 - \dots - a_nx_0^n)^2 + \\ + (y_1 - a_0 - a_1x_1 - a_2x_1^2 - \dots - a_nx_1^n)^2 + \dots + \\ + (y_m - a_0 - a_1x_m - a_2x_m^2 - \dots - a_nx_m^n)^2 = (m+1) M^2$$

osiągała minimum. Należy podkreślić, że przy takim postawieniu zagadnienia minimizujemy tylko błąd średni  $M$ , z jakim wartości wielomianu  $f(x)$  w punktach  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$  przybliżają wartości  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_m$  funkcji  $F(x)$ . O błędzie, z jakim wielomian  $f(x)$  przybliża funkcję  $F(x)$  poza punktami  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ , nie potrafimy zazwyczaj nic powiedzieć.

Taką metodę aproksymacji nazywamy *metodą najmniejszych kwadratów*. O ile w przypadku przybliżeń interpolacyjnych było zawsze  $n = m$ , o tyle metodę najmniejszych kwadratów stosujemy, gdy  $n < m$ . W przypadku  $n = m$  metoda najmniejszych kwadratów pozwala otrzymać co prawda wielomian interpolacyjny, ale na dłuższej drodze niż bezpośrednie metody interpolacyjne.

W metodzie najmniejszych kwadratów szukamy minimum funkcji  $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Musi być zatem

$$(22) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0.$$

Dostajemy stąd  $n+1$  równań liniowych z  $n+1$  niewiadomymi  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Równania te noszą nazwę *równań normalnych*. Można dowieść <sup>1)</sup>, że układ równań normalnych (22) ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie i że to rozwiązanie daje istotnie punkt, w którym funkcja (20) osiąga minimum. Dokładność przybliżenia (20) oceniamy najczęściej przez podanie błędu średniego  $M$  aproksymacji, gdzie (patrz wzór (21))

$$(23) \quad M^2 = \frac{1}{m+1} \Phi(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Równania (22) można zapisać w wygodnej dla rachunków postaci. Mamy mianowicie dla  $i=0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} &= -2[(y_0 - a_0 - a_1 x_0 - \dots - a_n x_0^n) x_0^i + \\ &\quad + (y_1 - a_0 - a_1 x_1 - \dots - a_n x_1^n) x_1^i + \dots + (y_m - a_0 - a_1 x_m - \dots - a_n x_m^n) x_m^i] = \\ &= -2 \sum_{j=0}^m (y_j - a_0 - a_1 x_j - \dots - a_n x_j^n) x_j^i = 0, \end{aligned}$$

skąd na niewiadome  $a_0, a_1, \dots, a_n$  otrzymujemy równania

$$(24) \quad a_0 \sum_{i=0}^m x_j^i + a_1 \sum_{i=0}^m x_j^{i+1} + \dots + a_n \sum_{i=0}^m x_j^{i+n} = \sum_{i=0}^m x_j^i y_j.$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$S_i = \sum_{j=0}^m x_j^i \quad \text{oraz} \quad T_i = \sum_{j=0}^m x_j^i y_j.$$

Wtedy układ równań normalnych (24) można zapisać następująco:

$$(25) \quad \begin{array}{rcl} S_0 a_0 + S_1 a_1 + \dots + S_n a_n & = & T_0, \\ S_1 a_0 + S_2 a_1 + \dots + S_{n+1} a_n & = & T_1, \\ \dots & & \dots \\ S_n a_0 + S_{n+1} a_1 + \dots + S_{2n} a_n & = & T_n. \end{array}$$

<sup>1)</sup> Dowód można znaleźć w książce: W. E. Milne, *Numerical Calculus*, Princeton 1949, str. 250-255.



Współczynniki  $S_0, S_1, \dots, S_{2n}, T_0, T_1, \dots, T_n$  wygodnie jest obliczać według następującego schematu:

$$S_0 = m + 1.$$

(26)

$x$	$x^2$	$x^3$	$\dots$	$x^{2n}$	$y$	$xy$	$x^2y$	$\dots$	$x^ny$
$x_0$	$x_0^2$	$x_0^3$	$\dots$	$x_0^{2n}$	$y_0$	$x_0y_0$	$x_0^2y_0$	$\dots$	$x_0^ny_0$
$x_1$	$x_1^2$	$x_1^3$	$\dots$	$x_1^{2n}$	$y_1$	$x_1y_1$	$x_1^2y_1$	$\dots$	$x_1^ny_1$
$x_2$	$x_2^2$	$x_2^3$	$\dots$	$x_2^{2n}$	$y_2$	$x_2y_2$	$x_2^2y_2$	$\dots$	$x_2^ny_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$x_m^2$	$x_m^3$	$\dots$	$x_m^{2n}$	$y_m$	$x_my_m$	$x_m^2y_m$	$\dots$	$x_m^ny_m$
$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\dots$	$S_{2n}$	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$\dots$	$T_n$

PRZYKŁAD 5. Dana jest funkcja  $y = F(x)$ , która w punktach  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  przybiera wartości  $0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1$  (a więc może być np.  $F(x) = \sin x$ ). Znaleźć metodą najmniejszych kwadratów przybliżenie funkcji  $F(x)$  wielomianem  $f(x)$  co najwyżej drugiego stopnia.

Mamy

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad n=2, \quad m=4.$$

Sporządzamy tabelę (26).

$$S_0 = 5.$$

$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$y$	$xy$	$x^2y$
0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi^2}{36}$	$\frac{\pi^3}{216}$	$\frac{\pi^4}{1296}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi^2}{72}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi^2}{16}$	$\frac{\pi^3}{64}$	$\frac{\pi^4}{256}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{9}$	$\frac{\pi^3}{27}$	$\frac{\pi^4}{81}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi^3}{8}$	$\frac{\pi^4}{16}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2}{4}$
$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$T_0$	$T_1$	$T_2$

gdzie

$$S_0=5, \quad S_1=\frac{5}{4}\pi, \quad S_2=\frac{65}{144}\pi^2, \quad S_3=\frac{35}{192}\pi^3, \quad S_4=\frac{1649}{20736}\pi^4, \\ T_0=\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}, \quad T_1=\frac{\pi}{24}(14+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}), \quad T_2=\frac{\pi^2}{288}(76+9\sqrt{2}+16\sqrt{3}).$$

Dostajemy stąd układ równań normalnych (25)

$$5a_0 + \frac{5}{4}\pi a_1 + \frac{65}{144}\pi^2 a_2 = \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{5}{4}\pi a_0 + \frac{65}{144}\pi^2 a_1 + \frac{35}{192}\pi^3 a_2 = \frac{\pi}{24}(14+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}), \\ \frac{65}{144}\pi^2 a_0 + \frac{35}{192}\pi^3 a_1 + \frac{1649}{20736}\pi^4 a_2 = \frac{\pi^2}{288}(76+9\sqrt{2}+16\sqrt{3}).$$

Niech  $a_0=A_0$ ,  $\pi a_1=A_1$ ,  $\pi^2 a_2=A_2$ . Układ równań normalnych można wtedy zapisać tak:

$$720A_0 + 180A_1 + 65A_2 = 72(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}), \\ 720A_0 + 260A_1 + 105A_2 = 24(14+3\sqrt{2}+4\sqrt{3}), \\ 9360A_0 + 3780A_1 + 1649A_2 = 72(76+9\sqrt{2}+16\sqrt{3}).$$

Obliczamy stąd, że

$$A_0 = \frac{56-8\sqrt{2}-27\sqrt{3}}{420}, \quad A_1 = \frac{120\sqrt{2}+111\sqrt{3}-105}{70}, \quad A_2 = \frac{42-24\sqrt{2}-18\sqrt{3}}{7}.$$

Zatem

$$a_0 = \frac{56-8\sqrt{2}-27\sqrt{3}}{420}, \quad a_1 = \frac{120\sqrt{2}+111\sqrt{3}-105}{70\pi}, \quad a_2 = \frac{42-24\sqrt{2}-18\sqrt{3}}{7\pi^2},$$

skąd

$$f(x) = \frac{56-8\sqrt{2}-27\sqrt{3}}{420} + \frac{120\sqrt{2}+111\sqrt{3}-105}{70} \cdot \frac{x}{\pi} + \\ + \frac{42-24\sqrt{2}-18\sqrt{3}}{7} \left(\frac{x}{\pi}\right)^2,$$

czyli, przechodząc do przybliżeń dziesiętnych,

$$f(x) \approx -0,004950 + 3,670904 \frac{x}{\pi} - 3,302577 \left(\frac{x}{\pi}\right)^2.$$



Mamy dalej

$$F(0) = 0,00000, \quad f(0) \approx -0,00495,$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,50000, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0,51513,$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,70711, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,70636,$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,86603, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0,85173,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,00000, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1,00486.$$

Obliczamy błąd średni  $M$  aproksymacji według wzorów (23) i (21):

$$M^2 = \frac{1}{5} (0,00495^2 + 0,01513^2 + 0,00075^2 + 0,01430^2 + 0,00486^2) \approx 0,00009642,$$

$$M \approx 0,00982.$$

Aproksymacja jest w tym przypadku obarczona dość dużym błędem. Można go zmniejszyć dwoma sposobami: albo przybliżyć funkcję  $F(x)$  wielomianem stopnia wyższego niż drugi, np. wielomianem stopnia czwartego, albo też aproksymować funkcję  $F(x)$  oddzielnie w kilku przedziałach, np. przybliżyć ją wielomianami stopnia drugiego w przedziałach  $0 \leq x \leq \pi/4$  i  $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$ . W obu przypadkach dobrze jest mieć więcej punktów, w których wartości funkcji  $F(x)$  są znane, niż to miało miejsce w ostatnim przykładzie.

**PRZYKŁAD 6.** Niech funkcja  $y = F(x)$  z przykładu (5) przybiera w punktach  $0, 1/36\pi, 2/36\pi, \dots, 17/36\pi, 18/36\pi = \pi/2$  wartości

0,0000000,	0,0871557,	0,1736482,	0,2588190,	0,3420201,
0,4226183,	0,5000000,	0,5735764,	0,6427876,	0,7071068,
0,7660444,	0,8191520,	0,8660254,	0,9063078,	0,9396926,
0,9659258,	0,9848078,	0,9661947,	1,0000000.	

Znaleźć metodą najmniejszych kwadratów przybliżenie funkcji  $F(x)$  wielomianem  $f(x)$  stopnia co najwyżej czwartego.

Mamy

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Sporządzamy tabelę (26) dla  $S_0 = 19$ .



$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,0872665	0,0076154	0,0006646	0,0000580	0,0000051	0,0000004	0,0000000
0,1745329	0,0304617	0,0053166	0,0009279	0,0001620	0,0000283	0,0000049
0,2617994	0,0685389	0,0179434	0,0046976	0,0012298	0,0003220	0,0000843
0,3490659	0,1218470	0,0425326	0,0148467	0,0051825	0,0018090	0,0006315
0,4363323	0,1903859	0,0830715	0,0362468	0,0158156	0,0069009	0,0030111
0,5235988	0,2741557	0,1435476	0,0751613	0,0393544	0,0206059	0,0107892
0,6108652	0,3731563	0,2279482	0,1392456	0,0850603	0,0519604	0,0317408
0,6981317	0,4873879	0,3402609	0,2375469	0,1658390	0,1157775	0,0808279
0,7853982	0,6168503	0,4844731	0,3805043	0,2988474	0,2347142	0,1843441
0,8726646	0,7615435	0,6645721	0,5799485	0,5061005	0,4416560	0,3854176
0,9599311	0,9214677	0,8845455	0,8491027	0,8150801	0,7824208	0,7510700
1,0471976	1,0966228	1,1483808	1,2025816	1,2593406	1,3187784	1,3810216
1,1344640	1,2870086	1,4600649	1,6563911	1,8791160	2,1317895	2,4184384
1,2217305	1,4926254	1,8235860	2,2279306	2,7219308	3,3254659	4,0628231
1,3089969	1,7134729	2,2429307	2,9359893	3,8432009	5,0307381	6,5852206
1,3962634	1,9495515	2,7220874	3,8007510	5,3068495	7,4097597	10,3459763
1,4835299	2,2008610	3,2650430	4,8437890	7,1859058	10,6605061	15,8151795
1,5707963	2,4674010	3,8757844	6,0880678	9,5631143	15,0217046	23,5960380
14,9225652	16,0609535	19,4327533	25,0737867	33,6921346	46,5549377	65,6526189
$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$

$x^8$	$y$	$xy$	$x^2y$	$x^3y$	$x^4y$
0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,0000000	0,0871557	0,0076058	0,0006637	0,0000579	0,0000051
0,0000009	0,1736482	0,0303073	0,0052896	0,0009232	0,0001611
0,0000221	0,2588190	0,0677587	0,0177392	0,0046441	0,0012158
0,0002204	0,3420201	0,1193876	0,0416741	0,0145470	0,0050779
0,0013138	0,4226183	0,1844020	0,0804606	0,0351075	0,0153186
0,0056492	0,5000000	0,2617994	0,1370778	0,0717738	0,0375807
0,0193893	0,5735764	0,3503779	0,2140336	0,1307457	0,0798680
0,0564285	0,6427876	0,4487504	0,3132869	0,2187155	0,1526922
0,1447835	0,7071068	0,5553604	0,4361790	0,3425742	0,2690572
0,3363403	0,7660444	0,6684998	0,5833761	0,5090917	0,4442663
0,7209755	0,8191520	0,7863295	0,7548221	0,7245772	0,6955442
1,4462025	0,8660254	0,9068997	0,9497032	0,9945269	1,0414662
2,7436313	0,9063078	1,0281736	1,1664259	1,3232682	1,5012002
4,9636749	0,9396926	1,1480511	1,4026090	1,7136103	2,0935699
8,6200333	0,9659258	1,2643939	1,6550877	2,1665046	2,8359478
14,4457080	0,9848078	1,3750511	1,9199335	2,6807329	3,7430092
23,4622917	0,9961947	1,4778846	2,1924861	3,2526185	4,8253569
37,0645692	1,0000000	1,5707963	2,4674010	3,8757844	6,0880678
94,0312344	11,9518826	12,2518291	14,3382491	18,0598036	23,8294051
$S_8$	$T_0$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$



Dostajemy stąd układ równań normalnych

$$\begin{aligned}
 19,000000a_0 + 14,922565a_1 + 16,060953a_2 + 19,432753a_3 + 25,073787a_4 &\approx 11,951883, \\
 14,922565a_0 + 16,060953a_1 + 19,432753a_2 + 25,073787a_3 + 33,692135a_4 &\approx 12,251829, \\
 16,060953a_0 + 19,432753a_1 + 25,073787a_2 + 33,692135a_3 + 46,554938a_4 &\approx 14,338249, \\
 19,432753a_0 + 25,073787a_1 + 33,692135a_2 + 46,554938a_3 + 65,652619a_4 &\approx 18,059804, \\
 25,073787a_0 + 33,692135a_1 + 46,554938a_2 + 65,652619a_3 + 94,031234a_4 &\approx 23,829405.
 \end{aligned}$$

Oto rozwiązanie tego układu (por. także rozdz. VII, str. 00)

$$a_0 \approx 0,000122, \quad a_1 \approx 0,996146, \quad a_2 \approx 0,019752,$$

$$a_3 \approx -0,203190, \quad a_4 \approx 0,028549.$$

Zatem  $f(x) \approx 0,000122 + 0,996146x + 0,019752x^2 + 0,203190x^3 + 0,028549x^4$ .

Otrzymaliśmy wielomian o współczynnikach niewiele się różniących od współczynników optymalnego przybliżenia interpolacyjnego (19). Obliczymy teraz błąd średni aproksymacji. Mamy

$x$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x) - f(x)$	$[F(x) - f(x)]^2$
0,0000000	0,000000	0,000122	-0,000122	$14884 \cdot 10^{-12}$
0,0872665	0,087156	0,087069	0,000087	$7569 \cdot 10^{-12}$
0,1745329	0,173648	0,173530	0,000118	$13924 \cdot 10^{-12}$
0,2617994	0,258819	0,258754	0,000065	$4225 \cdot 10^{-12}$
0,3490659	0,342020	0,342031	-0,000011	$121 \cdot 10^{-12}$
0,4363323	0,422618	0,422689	-0,000071	$5041 \cdot 10^{-12}$
0,5235988	0,500000	0,500096	-0,000096	$9216 \cdot 10^{-12}$
0,6108652	0,573576	0,573662	-0,000086	$7396 \cdot 10^{-12}$
0,6981317	0,642788	0,642834	-0,000046	$2116 \cdot 10^{-12}$
0,7853982	0,707107	0,707100	0,000007	$49 \cdot 10^{-12}$
0,8726646	0,766044	0,765988	0,000056	$3136 \cdot 10^{-12}$
0,9599311	0,819152	0,819065	0,000087	$7569 \cdot 10^{-12}$
1,0471976	0,866025	0,865937	0,000088	$7744 \cdot 10^{-12}$
1,1344640	0,906308	0,906252	0,000056	$3136 \cdot 10^{-12}$
1,2217305	0,939693	0,939697	-0,000004	$16 \cdot 10^{-12}$
1,3089969	0,965926	0,965997	-0,000071	$5041 \cdot 10^{-12}$
1,3962634	0,984808	0,984918	-0,000110	$12100 \cdot 10^{-12}$
1,4835299	0,996195	0,996267	-0,000072	$5184 \cdot 10^{-12}$
1,5707963	1,000000	0,999888	0,000112	$12544 \cdot 10^{-12}$
			Suma:	$121011 \cdot 10^{-12}$

$$M^2 = \frac{1}{19} \cdot 121011 \cdot 10^{-12} \approx 6369 \cdot 10^{-12}, \quad M \approx 0,0000798 \approx 0,00008.$$



PRZYKŁAD 7. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć przybliżenie funkcji  $F(x)$  z przykładu 6 wielomianami stopnia co najwyżej drugiego, oddzielnie w przedziałach  $0 \leq x \leq \pi/4$  i  $\pi/4 < x \leq \pi/2$ .

Niech

$$f(x) = \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 & \text{dla } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Sporządzamy tabelę dla  $0 \leq x \leq \pi/4$ .

$$S_0 = 10.$$

$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$y$	$xy$	$x^2y$
0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,0872665	0,0076154	0,0006646	0,0000580	0,0871557	0,0076058	0,0006637
0,1745329	0,0304617	0,0053166	0,0009279	0,1736482	0,0303073	0,0052896
0,2617994	0,0685389	0,0179434	0,0046976	0,2588190	0,0677587	0,0177392
0,3490659	0,1218470	0,0425326	0,0148467	0,3420201	0,1193876	0,0416741
0,4363323	0,1903859	0,0830715	0,0362468	0,4226183	0,1844020	0,0804606
0,5235988	0,2741557	0,1435476	0,0751613	0,5000000	0,2617994	0,1370778
0,6108652	0,3731563	0,2279482	0,1392456	0,5735764	0,3503779	0,2140336
0,6981317	0,4873879	0,3402609	0,2375469	0,6427876	0,4487504	0,3132869
0,7853982	0,6168503	0,4844731	0,3805043	0,7071068	0,5553604	0,4361790
3,9269909	2,1703991	1,3457585	0,8892351	3,7077321	2,0257495	1,2464045

oraz tabelę dla  $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$S_0 = 9.$$

$x$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$y$	$xy$	$x^2y$
0,8726646	0,7615435	0,6645721	0,5799485	0,7660444	0,6684998	0,5833761
0,9599311	0,9214677	0,8845455	0,8491027	0,8191520	0,7863295	0,7548221
1,0471976	1,0966228	1,1483808	1,2025816	0,8660254	0,9068997	0,9497032
1,1344640	1,2870086	1,4600649	1,6563911	0,9063078	1,0281736	1,1664259
1,2217305	1,4926254	1,8235860	2,2279306	0,9396926	1,1480511	1,4026090
1,3089969	1,7134729	2,2429307	2,9359893	0,9659258	1,2643939	1,6550877
1,3962634	1,9495515	2,7220874	3,8007510	0,9848078	1,3750511	1,9199335
1,4835299	2,2008610	3,2650430	4,8437890	0,9961947	1,4778846	2,1924861
1,5707963	2,4674010	3,8757844	6,0880678	1,0000000	1,5707963	2,4674010
10,9955743	13,8905544	18,0869948	24,1845516	8,2441505	10,2260796	13,0918446



Otrzymujemy stąd układ równań:

$$10,000000a_0 + 3,926991a_1 + 2,170399a_2 \approx 3,707732,$$

$$3,926991a_0 + 2,170399a_1 + 1,345759a_2 \approx 2,025750,$$

$$2,170399a_0 + 1,345759a_1 + 0,889235a_2 \approx 1,246405,$$

$$9,000000b_0 + 10,995574b_1 + 13,890554b_2 \approx 8,244151,$$

$$10,995574b_0 + 13,890554b_1 + 18,086995b_2 \approx 10,226080,$$

$$13,890554b_0 + 18,086995b_1 + 24,184552b_2 \approx 13,091845.$$

Oto rozwiązanie tego układu:

$$a_0 \approx -0,002594, \quad a_1 \approx 1,055170, \quad a_2 \approx -0,188892,$$

$$b_0 \approx -0,166127, \quad b_1 \approx 1,473219, \quad b_2 \approx -0,465035.$$

Zatem

$$f(x) \approx -0,002594 + 1,055170x - 0,188892x^2 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}\pi,$$

$$f(x) \approx -0,166127 + 1,473219x - 0,465035x^2 \quad \text{dla} \quad \frac{1}{4}\pi < x \leq \frac{1}{2}\pi.$$

Obliczymy teraz błąd średni  $M$  aproksymacji. Mamy

$x$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x) - f(x)$	$[F(x) - f(x)]^2$
0,0000000	0,000000	-0,002594	0,002594	67288 · 10 <sup>-10</sup>
0,0872665	0,087156	0,088049	-0,000893	7974 · 10 <sup>-10</sup>
0,1745329	0,173648	0,175814	-0,002166	46916 · 10 <sup>-10</sup>
0,2617994	0,258819	0,260702	-0,001883	35457 · 10 <sup>-10</sup>
0,3490659	0,342020	0,342714	-0,000694	4816 · 10 <sup>-10</sup>
0,4363323	0,422618	0,421848	0,000770	5929 · 10 <sup>-10</sup>
0,5235988	0,500000	0,498106	0,001894	35872 · 10 <sup>-10</sup>
0,6108652	0,573576	0,571486	0,002090	43681 · 10 <sup>-10</sup>
0,6981317	0,642788	0,641990	0,000798	6368 · 10 <sup>-10</sup>
0,7853982	0,707107	0,709617	-0,002510	63001 · 10 <sup>-10</sup>
0,8726646	0,766044	0,765355	0,000689	4747 · 10 <sup>-10</sup>
0,9599311	0,819152	0,819547	-0,000395	1560 · 10 <sup>-10</sup>
1,0471976	0,866025	0,866656	-0,000631	3982 · 10 <sup>-10</sup>
1,1344640	0,906308	0,906683	-0,000375	1406 · 10 <sup>-10</sup>
1,2217305	0,939693	0,939627	0,000066	44 · 10 <sup>-10</sup>
1,3089969	0,965926	0,965487	0,000439	1927 · 10 <sup>-10</sup>
1,3962634	0,984808	0,984265	0,000543	2948 · 10 <sup>-10</sup>
1,4835299	0,996195	0,995960	0,000235	552 · 10 <sup>-10</sup>
1,5707963	1,000000	1,000572	-0,000572	3272 · 10 <sup>-10</sup>
Suma:				337740 · 10 <sup>-10</sup>

$$M^2 = \frac{1}{19} \cdot 337740 \cdot 10^{-10} \approx 17776 \cdot 10^{-10}, \quad M \approx 0,00133.$$



Widzimy, że błąd średni aproksymacji jest znacznie większy niż w przypadku rozpatrywanym w przykładzie 6.

Wielką zaletą metody najmniejszych kwadratów jest to, że pozwala ona znajdować aproksymacje nie tylko funkcyj, ale także i *zależności stochastycznych*, tj. zależności między zmiennymi losowymi. Nie precyzując tego zagadnienia ograniczymy się do następującego przykładu.

**PRZYKŁAD 8.** Znaleźć metodą najmniejszych kwadratów wielomian stopnia pierwszego najlepiej aproksymujący (najlepiej w sensie metody najmniejszych kwadratów, tzn. tak, aby funkcja (20) osiągała minimum) zależność stochastyczną wielkości  $y$  od wielkości  $x$ , jeżeli otrzymano z doświadczenia następujące dane:

$x$	1,1	0,7	0,8	1,0	0,5	0,9	0,5	0,8	0,6	0,7
$y$	2,6	1,4	1,4	2,8	1,0	2,3	0,5	1,8	1,0	1,5

$x$	0,7	1,2	0,8	0,9	1,1	1,0	0,5	0,6	1,0	0,8	0,9
$y$	2,1	2,7	0,7	2,0	3,0	2,4	0,7	1,2	2,5	1,7	2,2

Obliczamy współczynniki  $S_0, S_1, S_2, T_0, T_1$  według schematu (26).

$$S_0 = 21.$$

$x$	$x^2$	$y$	$xy$
1,1	1,21	2,6	2,86
0,7	0,49	1,4	0,98
0,8	0,64	1,4	1,12
1,0	1,00	2,8	2,80
0,5	0,25	1,0	0,50
0,9	0,81	2,3	2,07
0,5	0,25	0,5	0,25
0,8	0,64	1,8	1,44
0,6	0,36	1,0	0,60
0,7	0,49	1,5	1,05
0,7	0,49	2,1	1,47
1,2	1,44	2,7	3,24
0,8	0,64	0,7	0,56
0,9	0,81	2,0	1,80
1,1	1,21	3,0	3,30
1,0	1,00	2,4	2,40
0,5	0,25	0,7	0,35
0,6	0,36	1,2	0,72
1,0	1,00	2,5	2,50
0,8	0,64	1,7	1,36
0,9	0,81	2,2	1,98
17,1	14,79	37,5	33,35
$S_1$	$S_2$	$T_0$	$T_1$



Szukany wielomian

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

ma zatem współczynniki będące pierwiastkami układu równań normalnych (25)

$$21a_0 + 17,1a_1 = 37,5,$$

$$17,1a_0 + 14,79a_1 = 33,35.$$

Mamy stąd

$$a_0 \approx -0,8614, \quad a_1 \approx 3,251,$$

a następnie

$$f(x) \approx -0,8614 + 3,251x.$$

Obliczmy jeszcze błąd średni  $M$  uzyskanego przybliżenia według wzoru (23).

W tym celu sporządzamy następującą tabelkę:

$3,251x$	$\Delta y = y - 3,251x + 0,8614$	$(\Delta y)^2$
3,5761	-0,1147	0,0132
2,2757	-0,0143	0,0002
2,6008	-0,3394	0,1152
3,2510	0,4104	0,1684
1,6255	0,2359	0,0556
2,9259	0,2355	0,0555
1,6255	-0,2641	0,0697
2,6008	0,0606	0,0037
1,9506	-0,0892	0,0080
2,2757	0,0857	0,0073
2,2757	0,6857	0,4702
3,9012	-0,3398	0,1155
2,6008	-1,0394	1,0804
2,9259	-0,0645	0,0042
3,5761	0,2853	0,0814
3,2510	0,0104	0,0001
1,6255	-0,0641	0,0041
1,9506	0,1108	0,0123
3,2510	0,1104	0,0122
2,6008	-0,0394	0,0016
2,9259	0,1355	0,0184
Suma:		2,2972

$$M^2 = \frac{1}{21} \cdot 2,2972 \approx 0,1094, \quad M \approx 0,331.$$



Sporządźmy wykres, na którym oznaczmy punktami dane z doświadczeń i prostą aproksymującą zależność  $y$  od  $x$  (rys. 4).

Metoda najmniejszych kwadratów wymaga bardzo żmudnych rachunków, gdy liczba punktów, w których podane są wartości funkcji aproksymowanej  $F(x)$ , jest duża. Można jednak w pewnych przypadkach szczególnych bardzo uprościć rachunki.

Załóżmy na przykład, że dane są wartości  $y_{-m}, y_{-m+1}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m$  funkcji  $F(x)$  w punktach  $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m$  (tzn. ogółem w  $2m+1$  punktach), które następują po sobie w równych odstępach, tzn.

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad j = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m,$$

gdzie  $\Delta x$  jest stałą różną od zera. Szukamy metodą najmniejszych kwadratów wielomianu

$$(27) \quad f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (n \leq 2m),$$

aproksymującego daną funkcję  $F(x)$ . W tym celu wprowadzamy nową zmienną

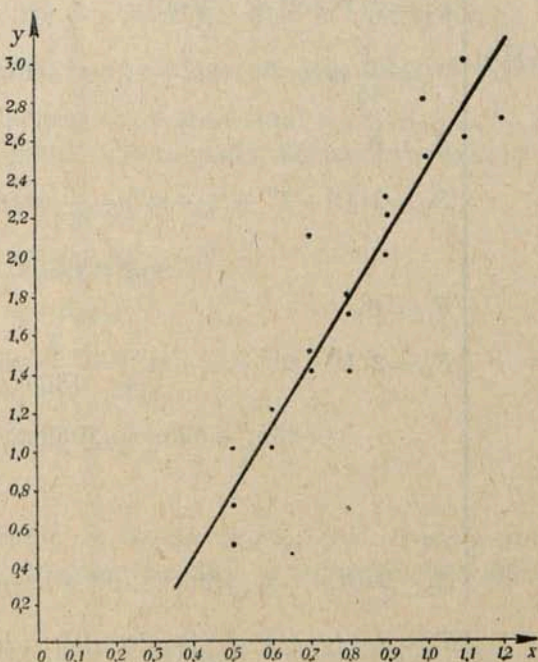
$$(28) \quad \xi = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

i w miejsce wielomianu (27) poszukujemy wielomianu

$$(29) \quad \varphi(\xi) = a_0 + a_1\xi + \dots + a_n\xi^n,$$

a wielomian  $f(x)$  znajdujemy ze wzoru

$$(30) \quad f(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\Delta x}\right).$$



Rys. 4

Gdy zmienna  $x$  przybiera wartości  $x_{-m}, x_{-m+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m$ , to zmienna  $\xi$  przybiera na mocy (28) wartości  $-m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m$ . Zatem na współczynniki układu równań normalnych (25) otrzymujemy następujące wzory<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> Wzory na  $S_j$  dla  $j$  parzystych można wyprowadzić za pomocą wielomianów czynnиковych, stosując metodę pokazaną w przykładzie 4 z rozdziału II.



$$\begin{aligned}
 (31a) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 S_0 &= 2m+1, & S_1 &= 0, \\
 S_2 &= 2(1^2+2^2+\dots+m^2) = \frac{1}{3} m(m+1)(2m+1), \\
 S_3 &= 0, \\
 S_4 &= 2(1^4+2^4+\dots+m^4) = \frac{1}{15} m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1), \\
 S_5 &= 0, \\
 S_6 &= 2(1^6+2^6+\dots+m^6) = \\
 &= \frac{1}{21} m(m+1)(2m+1)(3m^4+6m^3-3m+1), \\
 S_7 &= 0, \\
 S_8 &= 2(1^8+2^8+\dots+m^8) = \\
 &= \frac{1}{45} m(m+1)(2m+1)(5m^6+15m^5+5m^4-15m^3-m^2+9m-3), \\
 S_9 &= 0, \\
 S_{10} &= 2(1^{10}+2^{10}+\dots+m^{10}) = \frac{1}{33} m(m+1)(2m+1)(3m^8+12m^7+ \\
 &\quad + 8m^6-18m^5-10m^4+24m^3+2m^2-15m+5), \\
 S_{11} &= 0, \\
 S_{12} &= 2(1^{12}+2^{12}+\dots+m^{12}) = \frac{1}{1365} m(m+1)(2m+1)(105m^{10}+ \\
 &\quad + 525m^9+525m^8-1050m^7-1190m^6+2310m^5+1420m^4- \\
 &\quad - 3285m^3-287m^2+2073m-691), \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 S_{2n-1} &= 0, & S_{2n} &= 2(1^{2n}+2^{2n}+\dots+m^{2n}),
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31b) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 T_0 &= y_0 + (y_1+y_{-1}) + (y_2+y_{-2}) + \dots + (y_m+y_{-m}), \\
 T_1 &= (y_1-y_{-1}) + 2(y_2-y_{-2}) + 3(y_3-y_{-3}) + \dots + m(y_m-y_{-m}), \\
 T_2 &= (y_1+y_{-1}) + 2^2(y_2+y_{-2}) + 3^2(y_3+y_{-3}) + \dots + m^2(y_m+y_{-m}), \\
 T_3 &= (y_1-y_{-1}) + 2^3(y_2-y_{-2}) + 3^3(y_3-y_{-3}) + \dots + m^3(y_m-y_{-m}), \\
 &\quad \dots \dots \dots \\
 T_n &= [y_1 + (-1)^n y_{-1}] + 2^n[y_2 + (-1)^n y_{-2}] + \\
 &\quad + 3^n[y_3 + (-1)^n y_{-3}] + \dots + m^n[y_m + (-1)^n y_{-m}].
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$



Wprowadzamy oznaczenia

$$(32) \quad \begin{aligned} y_1^+ &= y_1 + y_{-1}, & y_2^+ &= y_2 + y_{-2}, & \dots, & y_m^+ &= y_m + y_{-m}, \\ y_1^- &= y_1 - y_{-1}, & y_2^- &= y_2 - y_{-2}, & \dots, & y_m^- &= y_m - y_{-m}. \end{aligned}$$

Używając tych oznaczeń wzory (316) piszemy w postaci

$$(33) \quad \begin{aligned} T_0 &= y_0 + y_1^+ + y_2^+ + \dots + y_m^+, \\ T_1 &= y_1^- + 2y_2^- + 3y_3^- + \dots + my_m^-, \\ T_2 &= y_1^+ + 2^2 y_2^+ + 3^2 y_3^+ + \dots + m^2 y_m^+, \\ T_3 &= y_1^- + 2^3 y_2^- + 3^3 y_3^- + \dots + m^3 y_m^-, \\ &\dots \dots \dots \\ T_n &= \begin{cases} y_1^+ + 2^n y_2^+ + 3^n y_3^+ + \dots + m^n y_m^+ & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ y_1^- + 2^n y_2^- + 3^n y_3^- + \dots + m^n y_m^- & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ponieważ współczynniki z nieparzystymi indeksami  $S_1, S_3, S_5, \dots, S_{2n-1}$  są wszystkie równe zero, więc układ (25) rozpada się na dwa układy

$$(34) \quad \begin{aligned} S_0 a_0 + S_2 a_2 + S_4 a_4 + \dots &= T_0, \\ S_2 a_0 + S_4 a_2 + S_6 a_4 + \dots &= T_2, \\ S_4 a_0 + S_6 a_2 + S_8 a_4 + \dots &= T_4, \\ &\dots \dots \dots \\ S_2 a_1 + S_4 a_3 + \dots &= T_1, \\ S_4 a_1 + S_6 a_3 + \dots &= T_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Zarówno obliczenie współczynników  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{2n}$ , jak i rozwiązanie układów (34) jest — dzięki podstawieniu (28) — znacznie łatwiejsze niż w przypadku ogólnym (25).

PRZYKŁAD 9. Rozwiązać przykład 6 stosując podstawienie (28).

Ponieważ wartość funkcji  $F(x)$  podana jest w 19 punktach, więc  $m = (19 - 1)/2 = 9$ .

Ze wzoru (32) obliczamy

$$\begin{aligned} y_1^+ &= 1,4088320, & y_2^+ &= 1,3927284, & y_3^+ &= 1,3660254, & y_4^+ &= 1,3289261, \\ y_5^+ &= 1,2817127, & y_6^+ &= 1,2247448, & y_7^+ &= 1,1584560, & y_8^+ &= 1,0833504, \\ y_9^+ &= 1,0000000, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= 0,1232568, & \bar{y}_2 &= 0,2455756, & \bar{y}_3 &= 0,3660254, & \bar{y}_4 &= 0,4836895, \\ \bar{y}_5 &= 0,5976725, & \bar{y}_6 &= 0,7071068, & \bar{y}_7 &= 0,8111596, & \bar{y}_8 &= 0,9090390, \\ \bar{y}_9 &= 1,0000000.\end{aligned}$$

Ze wzorów (31a) i (33) dostajemy

$$\begin{aligned}S_0 &= 19, & S_2 &= 570, & S_4 &= 30666, & S_6 &= 1956810, & S_8 &= 135462666, \\ T_0 &= 11,9518826, & T_1 &= 32,8286747, & T_2 &= 323,7691917, \\ T_3 &= 1743,0265175, & T_4 &= 16642,7414181.\end{aligned}$$

Układ równań (34) przybiera zatem postać

$$\begin{aligned}19a_0 + 570a_2 + 30666a_4 &= 11,9518826, \\ 570a_0 + 30666a_2 + 1956810a_4 &= 323,7691917, \\ 30666a_0 + 1956810a_2 + 135462666a_4 &= 16642,7414181, \\ 570a_1 + 30666a_3 &= 32,8286747, \\ 30666a_1 + 1956810a_3 &= 1743,0265175.\end{aligned}$$

Dostajemy stąd

$$\begin{aligned}a_0 &\approx 0,7071006, & a_1 &\approx 0,06165243, & a_2 &\approx -0,002690979, \\ a_3 &\approx -0,00007543241, & a_4 &\approx 0,000001657494.\end{aligned}$$

Wielomian (29) ma zatem postać

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &\approx 0,7071006 + 0,06165243\xi - 0,002690979\xi^2 - \\ &\quad - 0,00007543241\xi^3 + 0,000001657494\xi^4.\end{aligned}$$

Podstawiając, zgodnie ze wzorem (28),

$$\xi = \frac{x - \pi/4}{\pi/36} = 36 \frac{x}{\pi} - 9$$

otrzymujemy szukany wielomian w postaci

$$\begin{aligned}f(x) &= \varphi\left(36 \frac{x}{\pi} - 9\right) \approx 0,707101 + 0,554872\left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right) - \\ &\quad - 0,217969\left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right)^2 - 0,0549902\left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right)^3 + 0,0108748\left(4 \frac{x}{\pi} - 1\right)^4,\end{aligned}$$

a po rozwinięciu i redukcji — w postaci otrzymanej w przykładzie 6. Błąd średni jest oczywiście taki, jak w przykładzie 6, i obliczamy go tak samo.







PRZYKŁAD 10. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć przybliżenie funkcji  $y = \sin x$  w przedziale  $[0, \pi/2]$  wielomianem  $f(x)$  stopnia co najwyżej czwartego. Niech  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ . Mamy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \pi - 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx = \frac{3}{4} \pi^2 - 6, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin x dx = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24.$$

Układ równań normalnych (35) przybiera postać

$$\frac{\pi}{2} a_0 + \frac{\pi^2}{8} a_1 + \frac{\pi^3}{24} a_2 + \frac{\pi^4}{64} a_3 + \frac{\pi^5}{160} a_4 = 1,$$

$$\frac{\pi^2}{8} a_0 + \frac{\pi^3}{24} a_1 + \frac{\pi^4}{64} a_2 + \frac{\pi^5}{160} a_3 + \frac{\pi^6}{384} a_4 = 1,$$

$$\frac{\pi^3}{24} a_0 + \frac{\pi^4}{64} a_1 + \frac{\pi^5}{160} a_2 + \frac{\pi^6}{384} a_3 + \frac{\pi^7}{896} a_4 = \pi - 2,$$

$$\frac{\pi^4}{64} a_0 + \frac{\pi^5}{160} a_1 + \frac{\pi^6}{384} a_2 + \frac{\pi^7}{896} a_3 + \frac{\pi^8}{2048} a_4 = \frac{3}{4} \pi^2 - 6,$$

$$\frac{\pi^5}{160} a_0 + \frac{\pi^6}{384} a_1 + \frac{\pi^7}{896} a_2 + \frac{\pi^8}{2048} a_3 + \frac{\pi^9}{4608} a_4 = \frac{\pi^3}{2} - 12\pi + 24.$$

Oto rozwiązanie tego układu:

$$a_0 = \frac{50}{\pi} + \frac{480}{\pi^2} - \frac{16800}{\pi^3} - \frac{107520}{\pi^4} + \frac{483840}{\pi^5} \approx 0,000233,$$

$$a_1 = -\frac{1200}{\pi^2} - \frac{22080}{\pi^3} + \frac{604800}{\pi^4} + \frac{4515840}{\pi^5} - \frac{19353600}{\pi^6} \approx 0,995447,$$

$$a_2 = \frac{8400}{\pi^3} + \frac{221760}{\pi^4} - \frac{5080320}{\pi^5} - \frac{41932800}{\pi^6} + \frac{174182400}{\pi^7} \approx 0,020933,$$

$$a_3 = -\frac{22400}{\pi^4} - \frac{752640}{\pi^5} + \frac{15052800}{\pi^6} + \frac{133324800}{\pi^7} - \frac{541900800}{\pi^8} \approx$$

$$\approx -0,203864,$$

$$a_4 = \frac{20160}{\pi^5} + \frac{806400}{\pi^6} - \frac{14515200}{\pi^7} - \frac{135475200}{\pi^8} + \frac{541900800}{\pi^9} \approx$$

$$\approx 0,028646.$$



Zatem

$$f(x) \approx 0,000233 + 0,995447x + 0,020933x^2 - 0,203864x^3 + 0,028646x^4.$$

Obliczymy błąd średni  $M$  aproksymacji ze wzoru (36). Mamy

$$\begin{aligned} \Phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4)^2 dx = \\ &= (-2a_0 - 2a_1 + 4a_2 + 12a_3 - 48a_4) + \left(\frac{1}{4} - 2a_2 + 24a_4 + \frac{1}{2}a_0^2\right)\pi + \\ &+ \left(-\frac{3}{2}a_3 + \frac{1}{4}a_0a_1\right)\pi^2 + \left(-a_4 + \frac{1}{24}a_1^2 + \frac{1}{12}a_0a_2\right)\pi^3 + \\ &+ (a_0a_3 + a_1a_2)\frac{\pi^4}{32} + (a_2^2 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3)\frac{\pi^5}{160} + (a_1a_4 + a_2a_3)\frac{\pi^6}{192} + \\ &+ (a_3^2 + 2a_2a_4)\frac{\pi^7}{896} + a_3a_4\frac{\pi^8}{1024} + a_4^2\frac{\pi^9}{4608} \approx 0,00000002, \end{aligned}$$

$$M^2 = \frac{2}{\pi} \Phi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \approx 0,000000012, \quad M \approx 0,0001.$$

W przypadku gdy funkcja  $F(x)$  aproksymowana w pewnym przedziale  $[\alpha, \beta]$  jest w tym przedziale całkowalna wraz z kwadratem, wygodniej jest, zamiast szukać bezpośrednio współczynników  $a_0, a_1, \dots, a_n$  przybliżenia  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , podstawić

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2} \xi + \frac{\beta + \alpha}{2} \quad \left( \text{wtedy} \quad -1 < \xi < 1 \quad \text{i} \quad \xi = \frac{2x - \alpha - \beta}{\beta - \alpha} \right)$$

i obliczyć współczynniki  $c_0, c_1, \dots, c_n$  wyrażenia

$$(37) \quad \varphi(\xi) = f\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \xi + \frac{\beta + \alpha}{2}\right) = c_0P_0(\xi) + c_1P_1(\xi) + \dots + c_nP_n(\xi),$$

gdzie  $P_i(x)$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) oznacza pewien wielomian stopnia  $i$ . Wielomiany  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  dobieramy tak, aby

$$(38) \quad \int_{-1}^{+1} P_j(x)P_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \lambda_j \neq 0 & \text{dla } j = k \quad (\lambda_j = \text{const}). \end{cases}$$

Wielomiany  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  spełniające warunek (38) nazywamy *wielomianami ortogonalnymi*. Zanim omówimy metodę aproksymowania funkcji  $F(x)$  wielomianami postaci (37), zapoznamy się z elementami teorii układów funkcji ortogonalnych.



**§ 35. Układy ortogonalne funkcji.** Ciąg funkcji  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  określonych i całkowalnych wraz z kwadratem w przedziale  $[a, \beta]$  nazywamy *układem ortogonalnym funkcji* w tym przedziale z wagą  $p(x)$ , gdzie  $p(x)$  jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale  $[a, \beta]$ , jeżeli

$$\int_a^\beta p(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \lambda_j \neq 0 & \text{dla } j = k \text{ } (\lambda_j \text{ stała}). \end{cases}$$

Przykłady układów ortogonalnych funkcji.

I. Układ wielomianów określonych wzorem

$$(39) \quad P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \cdot \frac{d^j (x^2 - 1)^j}{dx^j} \quad \left( j = 0, 1, 2, \dots; \frac{d^0 (x^2 - 1)^0}{dx^0} = 1 \right)$$

jest układem ortogonalnym w przedziale  $[-1, +1]$  z wagą  $p(x) = 1$ . Istotnie, gdy  $k = 1, 2, \dots, j$ ,  $l = 1, 2, \dots, j-1$ , to

$$(40) \quad \int_{-1}^{+1} x^l \frac{d^k (x^2 - 1)^j}{dx^k} dx = x^l \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{k-1}} \Big|_{-1}^{+1} - \\ - l \int_{-1}^{+1} x^{l-1} \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{k-1}} dx = -l \int_{-1}^{+1} x^{l-1} \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{k-1}} dx,$$

ponieważ  $-1$  i  $+1$  są miejscami zerowymi wielomianu

$$\frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{k-1}} \quad \text{dla } k \leq j.$$

Stosując wielokrotnie wzór (40) otrzymujemy

$$\int_{-1}^{+1} x^l \frac{d^j (x^2 - 1)^j}{dx^j} dx = -l \int_{-1}^{+1} x^{l-1} \frac{d^{j-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{j-1}} dx = \\ = l(l-1) \int_{-1}^{+1} x^{l-2} \frac{d^{j-2} (x^2 - 1)^j}{dx^{j-2}} dx = \dots = \\ = (-1)^l l! \int_{-1}^{+1} \frac{d^{j-l} (x^2 - 1)^j}{dx^{j-l}} dx = \\ = (-1)^l l! \frac{d^{j-l-1} (x^2 - 1)^j}{dx^{j-l-1}} \Big|_{-1}^{+1} = 0.$$



Wynika stąd, że dla  $l < j$

$$(41) \quad \int_{-1}^{+1} x^l P_j(x) dx = \frac{1}{2^j j!} \int_{-1}^{+1} x^l \frac{d^j (x^2 - 1)^j}{dx^j} dx = 0.$$

Ponieważ  $P_j(x)$  jest wielomianem stopnia  $j$ , więc z (41) wynika, że

$$\int_{-1}^{+1} P_j(x) P_k(x) dx = 0 \quad \text{dla } j \neq k.$$

Gdy  $j = k$ , mamy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_k(x) P_k(x) dx &= \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} \cdot \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} dx = \\ &= \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{d^k (x^2 - 1)^k}{dx^k} \cdot \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-1}} \Big|_{-1}^{+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{k+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-1}} dx = \\ &= - \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{k+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{k-1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-1}} dx = \\ &= - \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \cdot \frac{d^{k+1} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+1}} \cdot \frac{d^{k-2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-2}} \Big|_{-1}^{+1} + \\ &\quad + \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{k+2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+2}} \cdot \frac{d^{k-2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-2}} dx = \\ &= \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{k+2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k+2}} \cdot \frac{d^{k-2} (x^2 - 1)^k}{dx^{k-2}} dx = \dots = \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2k} (x^2 - 1)^k}{dx^{2k}} (x^2 - 1)^k dx. \end{aligned}$$

Ale ponieważ

$$\frac{d^{2k} (x^2 - 1)^k}{dx^{2k}} = (2k)!,$$

więc

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) P_k(x) dx = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^k dx.$$



Podstawiamy  $t = \frac{1-x}{2}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^k dx &= \frac{(2k)!}{(k!)^2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \left(\frac{1+x}{2}\right)^k dx = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{(k!)^2} \int_0^1 t^k (1-t)^k dt = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left( -t^k \frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} \Big|_0^1 + k \int_0^1 t^{k-1} \frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} dt \right) = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{k+1} dt = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} \left( -t^{k-1} \frac{(1-t)^{k+2}}{k+2} \Big|_0^1 + (k-1) \int_0^1 t^{k-2} \frac{(1-t)^{k+2}}{k+2} dt \right) = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{(k-2)!(k+2)!} \int_0^1 t^{k-2} (1-t)^{k+2} dt = \dots = \\
 &= 2 \frac{(2k)!}{0!(2k)!} \int_0^1 (1-t)^{2k} dt = -2 \frac{(1-t)^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{2k+1}.
 \end{aligned}$$

Ostatecznie więc będzie

$$(42) \quad \int_{-1}^{+1} P_j(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \frac{2}{2k+1} & \text{dla } j = k. \end{cases}$$

Wielomiany (39) noszą nazwę *wielomianów Legendre'a*. Wielomiany te najłatwiej obliczać ze wzoru rekurencyjnego

$$(43) \quad (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x) \quad (k \geq 1),$$

przy czym, zgodnie ze wzorem (39),  $P_0(x) = 1$ , a  $P_1(x) = x$ . Uzasadnienie wzoru (43) pomijamy<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Uzasadnienie wzoru (43) znajdzie czytelnik np. w książce S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne t. VI, Warszawa-Lwów 1935, str. 108.



Oto kilka pierwszych wielomianów Legendre'a:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1, \\
 P_1(x) &= x, \\
 P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\
 P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\
 P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \\
 P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x, \\
 P_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Udowodnimy jeszcze następujące twierdzenie:

**TWIERDZENIE 1.** *Wielomian Legendre'a stopnia  $n$  ma  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych zawartych w przedziale  $(-1, +1)$ .*

**Dowód.** Wielomian  $(x^2 - 1)^n$  ma 2 pierwiastki  $n$ -krotne  $-1$  i  $+1$ . Wielomian  $\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n$  ma zatem 2 pierwiastki  $(n-1)$ -krotne  $-1$  i  $+1$  i ponadto na mocy twierdzenia Rolle'a jeden pierwiastek  $x_1$  wewnątrz przedziału  $(-1, +1)$ , a więc razem  $2n-1$  pierwiastków (z uwzględnieniem ich krotności). Wielomian  $\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^n$  ma zatem 2 pierwiastki  $(n-2)$ -krotne  $-1$  i  $+1$  i ponadto na mocy twierdzenia Rolle'a 2 pierwiastki wewnątrz przedziału  $(-1, +1)$ : jeden między  $-1$  a  $x_1$ , drugi między  $x_1$  a  $+1$ . Stosując  $n$ -krotnie twierdzenia Rolle'a dochodzimy do wniosku, że wielomian  $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$  ma  $n$  różnych pierwiastków rzeczywistych w przedziale  $(-1, +1)$ , skąd na mocy wzoru (39) wynika teza niniejszego twierdzenia.

## II. Ciąg funkeyj

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots
 \tag{45}$$

jest układem ortogonalnym w przedziale  $[0, 2\pi]$  z wagą  $p(x) = 1$ .



Mamy bowiem dla naturalnych  $j$  i  $k$

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} 1 \cos kx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} 1 \sin kx dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(j-k)x + \cos(j+k)x] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \pi & \text{dla } j = k, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(k-j)x + \sin(k+j)x] dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(k-j)x - \cos(k+j)x] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \pi & \text{dla } j = k. \end{cases}$$

III. Ciąg wielomianów Czebyszewa (9) tworzy układ ortogonalny w przedziale  $[-1, +1]$  z wagą  $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ .

Mamy bowiem dla naturalnych  $j$  i  $k$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [T_0(x)]^2 dx &= 4 \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \arcsin x \Big|_{-1}^{+1} = 4\pi, \\ \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) T_j(x) dx &= -\frac{2^{2-j}}{j} \int_{-1}^{+1} \cos(j \arccos x) d(j \arccos x) = \\ &= -\frac{2^{2-j}}{j} \sin(j \arccos x) \Big|_{-1}^{+1} = -\frac{2^{2-j}}{j} (\sin 0 - \sin j\pi) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x) T_k(x) dx &= \\ &= \frac{1}{2^{j+k-2}} \int_{-1}^{+1} \cos(j \arccos x) \cos(k \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Podstawiając tu  $\arccos x = u$  dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_j(x) T_k(x) dx &= \frac{1}{2^{j+k-2}} \int_0^\pi \cos ju \cos ku du = \\ &= \frac{1}{2^{j+k-1}} \int_0^\pi [\cos(j-k)u + \cos(j+k)u] du = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq k, \\ \frac{\pi}{2^{2k-1}} & \text{dla } j = k. \end{cases} \end{aligned}$$