

Błąd względny pola P na podstawie wzorów (27) i (15) wyrazić można wzorem

$$\varepsilon P \approx \varepsilon a + \varepsilon b + \varepsilon \sin \varphi \approx \varepsilon a + \varepsilon b + \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right| \Delta \varphi = \varepsilon a + \varepsilon b + |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi.$$

Warunek, aby błąd wyniku εP nie przekraczał 1%, daje nierówność

$$\varepsilon a + \varepsilon b + |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi < 0,01,$$

którą muszą spełniać błędy pomiarów a, b i φ . Wartość 0,01 stojącą po prawej stronie należy rozdzielić na każdy ze składników strony lewej. Jeżeli nie mamy żadnych wiadomości o łatwości uzyskania odpowiednich dokładności poszczególnych argumentów, to każdemu składnikowi strony lewej przyporządkowujemy równą część strony prawej. Otrzymamy

$$\varepsilon a \leq 0,0033, \quad \varepsilon b \leq 0,0033, \quad |\operatorname{ctg} \varphi| \Delta \varphi \leq 0,0033.$$

Jeżeli kąt φ zawiera się w przedziale $45^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$, to $|\operatorname{ctg} \varphi| \leq 1$ i można przyjąć

$$\Delta \varphi \leq 0,0033 \approx 11'.$$

Jeżeli więc zmierzmy dwa boki trójkąta z błędem względnym 0,33% i kąt między nimi zawarty (spełniający nierówność $45^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$) z błędem bezwzględnym 11', to ze wzoru (32) obliczymy pole trójkąta z błędem względnym rzędu 1%.

Jeżeli z powodu trudności technicznych nie możemy zmierzyć kąta z taką dokładnością, to kosztem zwiększenia dokładności pomiarów boków możemy zwiększyć dopuszczalny błąd kąta. Możemy np. przyjąć

$$\varepsilon a = \varepsilon b = 0,001, \quad \Delta \varphi = 0,008 \approx 27'.$$

B. Statystyczna teoria błędów

§ 6. Elementarne wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.

Gdy powtarzamy n -krotnie pomiar pewnej wielkości fizycznej, uzyskujemy ciąg wartości przybliżonych x_1, x_2, \dots, x_n , które — o ile nie popełniamy błędu systematycznego — są w pewien sposób skupione dokoła dokładnej wartości X . Na podstawie uzyskanych wyników chcemy znaleźć możliwie najlepsze przybliżenie nieznaney wartości dokładnej X i ocenić dokładność pomiarów. Zagadnienie to wymaga stosowania aparatu pojęciowego i twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa oraz przyjęcia dodatkowych założeń dotyczących mierzonej wielkości i pomiaru.

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A jest miarą jego możliwości. Niech np. zdarzenie A polega na tym, że wynik pomiaru pewnej

wielkości zawiera się w ustalonym przedziale (a, b) . W wyniku pojedynczego pomiaru zdarzenie A może nastąpić lub nie i przed dokonaniem pomiaru nie możemy przewidzieć jego wyniku. Przypuśćmy jednak, że w tych samych warunkach powtarzamy wielokrotnie pomiar tej samej wielkości. Zauważymy wtedy, że *częstość zdarzenia A* , czyli stosunek m/n ilości m tych pomiarów, w których wynik zawierał się w przedziale (a, b) do ilości n wszystkich dokonanych pomiarów, przy n rosnącym nieograniczenie będzie się wahała około pewnej liczby p . Tę liczbę nazwiemy *prawdopodobieństwem*¹⁾ zdarzenia A , co zapiszemy w postaci

$$p = P(A).$$

Jeżeli zdarzenie A jest pewne, tzn. zachodzi w każdym doświadczeniu, to $m=n$ i $P(A)=1$. Jeżeli zdarzenie A jest niemożliwe, to $m=0$ i $P(A)=0$. Dla dowolnego zdarzenia A jest zawsze $0 \leq m \leq n$ oraz

$$(33) \quad 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Zdarzenie A nazywamy *tym bardziej prawdopodobnym*, im bliższe jedności jest jego prawdopodobieństwo, tzn. im częściej będzie się pojawiało zdarzenie A w dużej serii doświadczeń.

Jeżeli $P(A)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia A , to zdarzenie \bar{A} polegające na tym, że nie zachodzi zdarzenie A , ma prawdopodobieństwo

$$(34) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Istotnie, jeżeli zdarzenie A w serii n doświadczeń zaszło m razy, to zdarzenie \bar{A} zaszło $n-m$ razy i jego częstość jest

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Jeśli więc częstość m/n zdarzenia A przy n dążącym do nieskończoności zbliża się do $P(A)$, to częstość zdarzenia \bar{A} zbliża się do $1 - P(A)$.

Przypuśćmy teraz, że interesują nas dwa zdarzenia A i B o znanych prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Możemy zapytać o prawdopodobieństwo zdarzenia A lub B , polegającego na tym, że zajdzie zdarzenie A

¹⁾ Pojęcie prawdopodobieństwa wprowadza się na ogół inaczej. Patrz np. W. Gliwienko, *Rachunek prawdopodobieństwa*, Warszawa-Wrocław 1953. W naszej książce, nie pretendując do kompletnej ścisłości, woleliśmy jednak wprowadzić frekwencyjną definicję prawdopodobieństwa, która pozwala łatwiej przejść do zastosowań. Takie wprowadzenie prawdopodobieństwa znajdzie czytelnik np. w książeczce B. Gniedenki i A. Chinczyna, *Elementy rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa 1954, którą bardzo polecamy czytelnikowi nie znającemu wcale tego rachunku.

lub B , tzn. że zajdzie przynajmniej jedno ze zdarzeń A i B . Rozwiązanie jest proste, gdy zdarzenia A i B wyłączają się wzajemnie, tzn. gdy w jednym doświadczeniu nie mogą wystąpić oba. Jest wtedy

$$(35) \quad P(A \text{ lub } B) = P(A) + P(B).$$

Istotnie jeżeli w serii n doświadczeń zdarzenie A zaszło m_1 razy, a zdarzenie B zaszło m_2 razy, to z uwagi na wzajemne wyłączanie się tych zdarzeń zdarzenie A lub B zaszło $m_1 + m_2$ razy i jego częstość jest równa sumie częstości zdarzeń A i B

$$\frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

Z równości tej i przyjętej przez nas definicji prawdopodobieństwa wynika równość (35).

Niech np. zdarzenie A polega na tym, że w określonej miejscowości średnia temperatura t w dniu 1 kwietnia spełnia nierówność $0^\circ\text{C} \leq t \leq 5^\circ\text{C}$, a zdarzenie B polega na tym, że $t > 5^\circ\text{C}$. Zdarzenie A lub B polega wtedy na tym, że $t \geq 0^\circ\text{C}$ i jeśli np. $P(0^\circ\text{C} \leq t \leq 5^\circ\text{C}) = 0,3$, a $P(t > 5^\circ\text{C}) = 0,4$, to $P(t \geq 0^\circ\text{C}) = 0,7$.

W szczególności gdy $B = \bar{A}$ z równości (35) otrzymujemy równość (34). Zdarzenia A i \bar{A} są oczywiście rozłączne, a ich alternatywa, tj. zdarzenie A lub \bar{A} , jest zdarzeniem pewnym.

Jeżeli zdarzenia A i B nie wyłączają się wzajemnie, to możliwe jest zdarzenie A i B polegające na tym, że zachodzi jednocześnie zdarzenie A i zdarzenie B . Szczególnie ważny jest przypadek, gdy zdarzenia A i B są *niezależne*, tj. gdy prawdopodobieństwo jednego z nich nie zależy od tego, czy drugie zdarzenie zaszło, czy nie. Jest wtedy (dowód pomijamy)

$$(36) \quad P(A \text{ i } B) = P(A)P(B).$$

Przypuśćmy np., że z pewnej ilości żarówek bierzemy dwie żarówki do próby na długość czasu świecenia. Niech A i B oznaczają zdarzenia, że odpowiednio pierwsza i druga żarówka będą świeciły dłużej niż 2000 godzin. Jeżeli każde z tych zdarzeń ma prawdopodobieństwo $p = 0,8$ i można przyjąć, że zdarzenia A i B są niezależne, to zdarzenie A i B , czyli zdarzenie polegające na tym, że obie żarówki będą świeciły dłużej niż 2000 godzin, ma prawdopodobieństwo $p^2 = 0,64$.

Nie zamierzamy tutaj podawać pełnego wykładu rachunku prawdopodobieństwa, ograniczając się tylko do podanych wyżej definicji i najelementarniejszych własności prawdopodobieństwa. W dalszych rozważaniach w teorii błędów będziemy korzystali ze znacznie mocniejszych

środków rachunku prawdopodobieństwa. Podany wstęp powinien jednak wystarczyć czytelnikowi do poprawnej interpretacji uzyskanych dalej wyników i właściwego ich stosowania w najprostszych zagadnieniach praktycznych.

§ 7. Rozkład normalny pomiarów fizycznych. Wynik X pomiaru danej wielkości fizycznej będziemy traktowali jako *zmienną losową*. Oznacza to, że określony jest rozkład wyników pomiaru, tj. dla każdej liczby rzeczywistej x określone jest prawdopodobieństwo $P(X < x)$, że wynik X pomiaru jest mniejszy niż x . Innymi słowy, istnieje funkcja rzeczywista $F(x)$ — zwana *dystrybuantą* zmiennej losowej X — taka, że

$$P(X < x) = F(x).$$

Znajomość dystrybuanty $F(x)$ pozwala obliczyć prawdopodobieństwo, że wynik X pomiaru znajdzie się w dowolnym przedziale $a \leq X < b$. Ponieważ zdarzenie $(X < b)$ jest równoważne ze zdarzeniem $(X < a)$ lub $a \leq X < b$, a zdarzenia $X < a$ i $a \leq X < b$ są rozłączne, więc z równości (35) otrzymujemy

$$(37) \quad P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).$$

Jeżeli dystrybuanta $F(x)$ ma ciągłą pochodną $f(x)$

$$f(x) = F'(x),$$

to funkcję $f(x)$ nazywamy *gęstością prawdopodobieństwa* i wzór (37) możemy zapisać w postaci

$$(38) \quad P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Ponieważ $P(X = a) = 0$, więc jest również

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Dla $a = -\infty$, $b = +\infty$ zdarzenie $(-\infty < X < +\infty)$ jest zdarzeniem pewnym i mamy oczywiście

$$(39) \quad P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Będziemy dalej zakładali, że nieobciążone błędami systematycznymi¹⁾

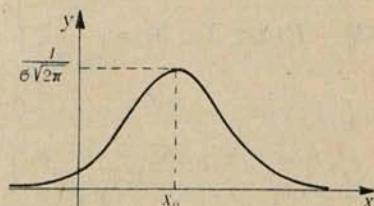
¹⁾ Błędem systematycznym pomiaru nazywamy błąd, który się powtarza w każdym pomiarze. Znaczenie tego założenia omówimy na końcu rozdziału.

pomiary wielkości fizycznych mają *rozkład normalny*, tj. rozkład o gęstości prawdopodobieństwa określonej wzorem

$$(40) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x-x_0)^2\right],$$

gdzie σ jest pewnym parametrem dodatnim, a x_0 jest dokładną wartością danej wielkości fizycznej. Doświadczenie wskazuje, że wyniki pomiarów większości wielkości fizycznych mają istotnie rozkłady normalne, co może być także wyjaśnione teoretycznie.

Funkcja (40), której wykres przedstawia rys. 1, osiąga maksimum w punkcie $x=x_0$ i po obu stronach tego punktu ma symetryczny przebieg. Na podstawie wzoru (38) wynika stąd, że w otoczeniu wartości dokładnej wyniki pomiarów występują najczęściej i jednakowo co do wartości bezwzględnej błędy *in plus* i *in minus* są równoprawdopodobne.



Rys. 1

Dokładna wartość x_0 spełniająca równość

$$(41) \quad x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x-x_0)^2\right] dx$$

nazywana jest także *wartością średnią*, *wartością przeciętną* lub *wartością oczekiwaną* wyniku X pomiaru.

Na początku rozdziału mówiliśmy o nieokreśloności pojęcia dokładnej wartości wielkości fizycznej. Równość (41) można by teraz przyjąć jako definicję *wartości dokładnej*. Jednakże pojęcie wartości średniej nieobciążonego błędem systematycznym pomiaru wielkości fizycznej jest ogólniejsze od pojęcia wartości dokładnej, bo ma sens także w tych przypadkach, gdy z pewnych względów, np. wskutek istniejących fluktuacji, nie można mówić o wartości dokładnej.

Drugi parametr we wzorze (40) σ spełnia równość

$$(42) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^2 \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x-x_0)^2\right] dx.$$

σ^2 jest więc wartością średnią kwadratu odchylenia $X-x_0$ wyniku X pomiaru od wartości średniej x_0 . Tak więc σ zwane *błędem średnim* lub *średnim kwadratowym odchyleniem* jest miarą rozrzutu wyników pomiaru dookoła wartości średniej. Im mniejszy jest błąd średni σ , tym większa

jest gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$ w punkcie $x=x_0$ i tym szybciej maleje gęstość w miarę oddalania się od wartości średniej x_0 . Dwa parametry x_0 i σ charakteryzują wielkość fizyczną i jej pomiar (rozumiany w najogólniejszym sensie jako zespół metody, przyrządu i osoby wykonującej pomiar). Znając te parametry możemy obliczyć prawdopodobieństwo $P(a < X < b)$ tego, że uzyskamy wynik pomiaru zawarty w przedziale (a, b) , ze wzoru

$$(43) \quad P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x_0)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-x_0}{\sigma}}^{\frac{b-x_0}{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right),$$

gdzie wartości funkcji

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

dla argumentów dodatnich podane są w tabelicy Ia na końcu książki. Wartości funkcji $\Phi(x)$ dla argumentów ujemnych obliczamy korzystając z zależności

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Najczęściej interesuje nas prawdopodobieństwo $P(|x_0 - X| < \varepsilon)$ popełnienia błędu $x_0 - X$ o wartości bezwzględnej mniejszej niż $\varepsilon > 0$. Prawdopodobieństwo to jest równe

$$(44) \quad P(|x_0 - X| < \varepsilon) = P(x_0 - \varepsilon < X < x_0 + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 = \Psi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Wartości funkcji $\Psi(x)$ podane są również w tabelicy Ia.

Zwróćmy uwagę na to, że dzięki symetrii nierówności $|x_0 - X| < \varepsilon$ względem x_0 i X wzór (44) można także interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że wartość średnia x_0 będzie się różniła od wyniku X pomiaru o mniej niż ε . Jeżeli we wzorze (44) położymy $\varepsilon = k\sigma$, to otrzymamy wzór

$$(45) \quad P(|x_0 - X| < k\sigma) = \Psi(k).$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo tego, iż wynik X pomiaru będzie się

odchyłał od wartości średniej nie więcej niż o $k\sigma$, zależy tylko od liczby k . Dla $k=1$ odczytujemy z tablicy Ia

$$P(|x_0 - X| < \sigma) = \Psi(1) \approx 0,68268.$$

Widzimy, że bezwzględna wartość odchylenia wyniku X pomiaru od wartości średniej x_0 nie przekracza błędu średniego σ z prawdopodobieństwem $0,68268 \approx 2/3$. Zatem w dużej serii pomiarów w przybliżeniu trzecia część wyników będzie się różniła od wartości średniej x_0 więcej niż o błąd średni σ . Dla $k=3$ odczytujemy z tablicy Ia

$$P(|x_0 - X| < 3\sigma) = \Psi(3) \approx 0,99730.$$

Możemy zatem oczekiwać, że w dużej serii pomiarów 99,7% wyników będzie się różniło od wartości średniej mniej niż o 3σ . W praktyce tak wysokie prawdopodobieństwo uznaje się zwykle jako praktyczną pewność i każdą uzyskaną z pomiaru wartość x zmiennej losowej X przyjmuje się jako przybliżenie wartości średniej x_0 z błędem bezwzględnym $\Delta x = 3\sigma$. Oczywiście w niektórych przypadkach, np. gdy chodzi o bezpieczeństwo życia ludzkiego, prawdopodobieństwo $P = 0,997$ nie wystarczy i musimy zażądać większej pewności.

§ 8. Powtarzanie pomiarów. Średnia arytmetyczna. Przyjmijmy teraz, że pomiar danej wielkości fizycznej powtarzamy n -krotnie. Uzyskane wyniki x_1, x_2, \dots, x_n będziemy traktowali jako wartości n niezależnych¹⁾ zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n , z których każda ma ten sam rozkład normalny określony wzorem (40). Można udowodnić, że średnia arytmetyczna \bar{X} zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

ma także rozkład normalny o tej samej wartości średniej x_0 i błędzie średnim \sqrt{n} razy mniejszym. Dla średniej \bar{X} z n pomiarów zachodzi więc wzór

$$(46) \quad P(|x_0 - \bar{X}| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = \Psi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right),$$

lub, po podstawieniu $\varepsilon = k\sigma/\sqrt{n}$, wzór

$$(47) \quad P\left(|x_0 - \bar{X}| < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Psi(k).$$

¹⁾ Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne, jeżeli wartości przyjęte przez niektóre z nich nie mają wpływu na wartości, jakie przybierają pozostałe zmienne. W naszym przypadku oznacza to, że błędy jednych pomiarów nie wpływają na błędy drugich.

Jeżeli więc uznamy prawdopodobieństwo $\Psi(3) \approx 0,9973$ jako praktyczną pewność, to wartość \bar{x} zmiennej losowej \bar{X} , czyli średnią arytmetyczną n wyników pomiarów x_1, x_2, \dots, x_n

$$(48) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

możemy przyjąć za przybliżenie wartości średniej x_0 z błędem bezwzględnym $\Delta \bar{x} = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$. Widzimy stąd, że np. aby dwukrotnie zmniejszyć błąd

przybliżenia, należy czterokrotnie zwiększyć liczbę obserwacji. Przez zwiększanie liczby pomiarów możemy w ten sposób szacować coraz dokładniej wartość średnią. Jeżeli, jak założyliśmy, pomiar nie jest obciążony błędem systematycznym, to szacujemy tym samym coraz lepiej wartość dokładną.

Zachodzi pytanie, dlaczego za przybliżenie wartości średniej x_0 obraliśmy średnią arytmetyczną (48), a nie jakąś inną funkcję wyników pomiarów x_1, x_2, \dots, x_n , np. średnią geometryczną lub tzw. medianę, tj. taką liczbę a , od której połowa wielkości x_1, x_2, \dots, x_n jest mniejsza, a połowa większa. Wybór nasz uzasadniają następujące ważne własności średniej arytmetycznej. Dowód tych własności pomijamy.

a) Suma odchyleń poszczególnych pomiarów x_i od średniej arytmetycznej \bar{x} jest zerem

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0.$$

b) Suma kwadratów odchyleń poszczególnych pomiarów x_i od stałej c

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2$$

osiąga minimum, gdy $c = \bar{x}$.¹⁾

c) Średnia arytmetyczna \bar{x} jest wartością zmiennej losowej \bar{X} mającej znany i prosty do rachunków rozkład normalny.

d) Średnią wartością zmiennej losowej \bar{X} jest szacowana wartość średnia x_0 .

Aby podać błąd średni $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ przybliżenia wartości średniej x_0 przez śred-

nią arytmetyczną wyników pomiaru \bar{x} musimy znać teoretyczny błąd średni σ pojedynczego pomiaru. Wielkość ta jest na ogół nieznana i musimy ją również oszacować na podstawie wyników pomiarów. Przypomnijmy sobie w tym celu, że kwadrat błędu średniego, czyli tzw. *wariancja* σ^2 ,

jest wartością średnią kwadratu odchylenia pomiaru X od wartości średniej x_0 . Za przybliżoną wartość σ^2 można więc przyjąć wartość

$$(49) \quad s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2.$$

Jest to wartość zmiennej losowej

$$(49a) \quad S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - x_0)^2.$$

Średnią wartością zmiennej losowej S_1^2 jest wariancja σ^2 . Jeżeli we wzorze (49) zastąpimy nieznaną wartość średnią x_0 jej przybliżeniem \bar{x} , to można wykazać, że, aby w dalszym ciągu wartością średnią przybliżeń (49) było σ^2 , musimy współczynnik $1/n$ zastąpić przez $1/(n-1)$. Uzyskamy w ten sposób nowe przybliżenie s^2 wariancji σ^2 .

$$(50) \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

które możemy obliczyć już tylko na podstawie pomiarów x_i . Jest to wartość nowej zmiennej losowej

$$(50a) \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Liczba $f=n-1$ w (50) i (50a) nazywana jest *liczbą stopni swobody*.

Warto jeszcze zauważyć, że wzór (50) można sprowadzić do postaci wygodniejszej do rachowania. Mamy

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right). \end{aligned}$$

Jako przybliżenie średniego błędu σ pomiaru przyjmiemy wielkość

$$(51) \quad s = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Jest to wartość zmiennej losowej

$$(51a) \quad S = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

Trzeba tu zaznaczyć, że o ile wartością średnią zmiennej losowej S^2 była prawdziwa wariancja σ^2 , to wartość średnia zmiennej losowej S jest od błędu średniego σ różna.

Tak więc na podstawie wyników n pomiarów x_1, x_2, \dots, x_n obliczamy przybliżoną wartość wielkości średniej

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

a błąd średni tego przybliżenia jest w przybliżeniu równy

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) \right]^{1/2}.$$

PRZYKŁAD 10. Dla obliczenia średniej prędkości kuli karabinowej wykonano 30 pomiarów uzyskując następujące wyniki (w metrach na sekundę):

734	728	720	773	709	738
754	725	738	747	733	759
730	695	733	715	768	718
704	736	682	728	762	732
749	711	723	743	722	714

Aby obliczyć średnią uzyskanych pomiarów \bar{x} i przybliżenie s błędu średniego, uporządkujemy pomiary według wielkości i odejmiemy od każdego prowizoryczną średnią $x' = 730$ m/sek, otrzymując w ten sposób liczby $x'_i = x_i - x'$.

Ze wzorów (48) i (51) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x'_i + x') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i + x' = \bar{x}' + x', \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x'_i + x')^2 - n(\bar{x}' + x')^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i'^2 - n\bar{x}'^2 \right) = s'^2, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{x}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i$ jest wartością średnią zredukowanych pomiarów x'_i , a s'^2 przybliżeniem wariancji tych zredukowanych pomiarów. Widzimy, że znając łatwiejsze do obliczenia wartości \bar{x}' i s'^2 znamy także potrzebne nam wartości \bar{x} i s^2 . Rachowanie zredukowanymi wartościami pomiarów

pozwała uniknąć żmudnego sumowania dużych liczb x_i i podnoszenia ich do kwadratu. Te same działania na liczbach zredukowanych x'_i można wykonać w pamięci.

A oto pełne obliczenie potrzebnych nam wartości zestawione w następujących tabelkach:

x_i	$x'_i = x_i - 730$	$x_i'^2$
682	-48	2304
695	-35	1225
704	-26	676
700	-21	441
711	-19	361
714	-16	256
715	-15	225
718	-12	144
720	-10	100
723	-7	49
725	-5	25
728	-2	4
728	-2	4
730	0	0
732	2	4
	-216	5818

x_i	$x'_i = x_i - 730$	$x_i'^2$
733	3	9
733	3	9
733	3	9
734	4	16
736	6	36
738	8	64
738	8	64
743	13	169
747	17	289
749	19	361
754	24	576
759	29	841
762	32	1024
768	38	1444
773	43	1849
	250	6760
	-216	5818

$$\sum_{i=1}^{30} x'_i = 34, \quad \sum_{i=1}^{30} x_i'^2 = 12578$$

$$\bar{x} = 730 + \frac{1}{30} \cdot 34 \approx 731,1,$$

$$s^2 = \frac{1}{29} (12578 - 30 \cdot 1,1^2) \approx 433,$$

$$s \approx \sqrt{433} \approx 20,8.$$

Błąd średni średniej \bar{x} jest równy

$$\frac{s}{\sqrt{30}} \approx 3,8.$$

Jeżeli będziemy uważali za praktycznie pewne zdarzenie o prawdopodobieństwie $p=0,997$, a więc takie zdarzenie, które — z grubsza mówiąc — zachodzi 997 razy na tysiąc, to na podstawie wzoru (46), w którym zamiast nieznannej wielkości σ kładziemy jej przybliżenie s , mamy

$$|x_0 - 731,1 \text{ m/sec}| < 3 \cdot 3,8 \text{ m/sec},$$

czyli

$$719,7 \text{ m/sec} < x_0 < 742,5 \text{ m/sec},$$

gdzie x_0 jest nieznaną wartością średnią prędkości kuli. Dokładniejsze oszacowanie liczby x_0 wymagałoby zrezygnowania z tak silnej gwarancji (prawdopodobieństwa 0,997) albo odpowiedniego zwiększenia liczby pomiarów.

Przyjmując $x_0 \approx \bar{x} = 731,1 \text{ m/sec}$, $\sigma \approx s = 20,8 \text{ m/sec}$ możemy ze wzoru (43) obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że prędkość kuli będzie się zawierała w dowolnym przedziale (a, b) . Obliczmy np., jak często będą się zdarzały strzały o prędkości mniejszej niż 700 m/sec. Z wzoru (43), w którym przyjmiemy $x_0 = \bar{x}$ oraz $\sigma = s$ mamy

$$P(X < 700 \text{ m/sec}) = P(-\infty < X < 700 \text{ m/sec}) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{700 - 731,1}{20,8}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - 731,1}{20,8}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(-1,5) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) \approx 0,06681.$$

Znaczy to, że średnio na 100 strzałów możemy oczekiwać 7 strzałów z prędkością kuli x mniejszą niż 700 m/sec.

§ 9. Rozkład t -Studenta. W poprzednich rozważaniach przyjmowaliśmy obliczoną z pomiarów wartość s zamiast nieznannej wartości błędu średniego σ . Określona ze wzoru (51a) wielkość S jest funkcją n wyników pomiarów X_1, X_2, \dots, X_n i podobnie jak one jest zmienną losową. Gdy liczba pomiarów n jest duża, wartości zmiennej losowej S z dużym prawdopodobieństwem mało się różnią od błędu średniego σ , co usprawiedliwia nasze dotychczasowe postępowanie. Jednakże przy małej liczbie doświadczeń zastąpienie σ obliczoną z pomiarów wartością s nie byłoby usprawiedliwione i mogłoby prowadzić do błędnych wniosków.

Dla oszacowania nieznannej wartości średniej x_0 na podstawie małej liczby pomiarów będziemy rozważali wyrażenie

$$(52) \quad t = \frac{x_0 - \bar{x}}{s} \sqrt{n},$$

gdzie \bar{x} i s obliczamy, jak poprzednio, za pomocą wzorów (48) i (51) na podstawie n niezależnych pomiarów o rozkładzie normalnym. Liczba t określona wzorem (52) jest wartością zmiennej losowej

$$(52a) \quad T = \frac{x_0 - \bar{X}}{S} \sqrt{n},$$

o rozkładzie zależnym od liczby pomiarów n

$$(53) \quad P_n(T < t) = S_f(t) = \frac{1}{\sqrt{f\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \int_{-\infty}^t \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{f}\right)^{\frac{f+1}{2}}},$$

gdzie $f = n - 1$ jest liczbą stopni swobody, a funkcja $\Gamma(z)$ jest określona wzorem

$$\Gamma(z) = (z-1)! = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Rozkład (53) zmiennej losowej (52a) podany został przez matematyka angielskiego Gosseta i od pseudonimu używanego przez autora nazywany jest *rozkładem t-Studenta*.

Pokażemy teraz, jak można zastosować rozkład *t*-Studenta do szacowania nieznaney wartości średniej x_0 . Ze wzorów (52) i (53) wyprowadzimy wzór analogiczny do wzoru (46)

$$(54) \quad P(|x_0 - \bar{X}| < \varepsilon) = P\left(|T| < \frac{\varepsilon}{S} \sqrt{n}\right) = \\ = S_f\left(\frac{\varepsilon}{S} \sqrt{n}\right) - S_f\left(-\frac{\varepsilon}{S} \sqrt{n}\right) = 2S_f\left(\frac{\varepsilon}{S} \sqrt{n}\right) - 1.$$

Przyjmując $\varepsilon = \frac{kS}{\sqrt{n}}$ otrzymujemy

$$(54a) \quad P\left(|x_0 - \bar{X}| < k \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2S_f(k) - 1.$$

W tablicy Ib dla różnych ilości stopni swobody f i kilku różnych wartości p podane są liczby k spełniające równość

$$2S_f(k) - 1 = p.$$

Z tablicy tej możemy np. odczytać, że przy liczbie stopni swobody $f = 29$ i $p = 0,99$ jest $k = 2,756$. Znaczy to, że

$$(55) \quad P\left(|x_0 - \bar{X}| < 2,756 \frac{S}{\sqrt{30}}\right) = 0,99.$$

Ostatni wiersz tablicy Ib odpowiada rozkładowi normalnemu, do którego dąży zmienna losowa T przy $f \rightarrow \infty$. Dla $p=0,99$ odczytujemy w tym wierszu wartość 2,576. Jeżeli więc we wzorze (47) nieznany błąd średni σ zastąpimy wartością s zmiennej losowej S obliczoną z $n=f+1=30$ pomiarów przy pomocy wzoru (51), to zamiast poprawnej równości (55) dostajemy zbyt optymistyczne oszacowanie

$$(55a) \quad P\left(|x_0 - \bar{X}| < 2,576 \frac{S}{\sqrt{30}}\right) = 0,99.$$

W tym przypadku różnica między oszacowaniami (55) i (55a) nie jest zbyt jaskrawa i w większości zagadnień praktycznych można by ją pominąć. Zwykle przyjmuje się konwencję, że jeżeli nie zależy nam zbyttnio na finezji obliczeń, dla $n > 30$ stosujemy rozkład normalny. Przy małych n różnice są dużo większe i stosowanie rozkładu normalnego z błędem średnim s obliczonym z pomiarów jest niedopuszczalne.

§ 10. Błąd wartości funkcji. Zajmowaliśmy się dotychczas szacowaniem nieznanej wartości średniej x_0 pewnej wielkości fizycznej na podstawie powtarzanych pomiarów tej wielkości. Rozumowaliśmy przy tym w sposób następujący. Wzór (47) przy znanym σ lub wzór (54a), gdy błąd średni σ nie jest znany, wyznacza losowy przedział (końce tego przedziału zależą od zmiennych losowych \bar{X} i S), który z danym prawdopodobieństwem p zawiera stałą, lecz nieznaną wartość x_0 . Jeżeli to prawdopodobieństwo jest dostatecznie bliskie jedności, to możemy przyjąć zawieranie stałej x_0 przez losowy przedział za praktyczną pewność. Po dokonaniu pomiarów przyjmujemy wtedy, że wartość średnia x_0 leży w ustalonym już teraz przedziale. Postępując w ten sposób nie możemy mówić o prawdopodobieństwie tego, że nasze oszacowanie jest prawdziwe, bo nie mamy już do czynienia ze zdarzeniem losowym, gdyż zarówno przedział, jak i wartość średnia są ustalone. Wiemy natomiast, że postępując w ten sposób w wielu oszacowaniach częstość prawdziwych oszacowań będzie w przybliżeniu równa p . W ten sposób prawdopodobieństwu p przyporządkowujemy oszacowanie wartości średniej x_0 .

Przypuśćmy teraz, że chcemy oszacować wartość funkcji $Y=F(X)$, gdy znamy oszacowanie argumentu $a \leq X \leq b$, które odpowiada prawdopodobieństwu p . Jeżeli oszacowanie argumentu $a \leq X \leq b$ jest prawdziwe, to prawdziwe jest także oszacowanie wartości Y

$$(56) \quad F^- \leq Y \leq F^+,$$

$$\text{gdzie} \quad F^- = \min_{a \leq X \leq b} F(X), \quad \text{a} \quad F^+ = \max_{a \leq X \leq b} F(X).$$

Ponieważ nierówność (56) może być spełniona nie tylko wtedy, gdy $a \leq X \leq b$, więc oszacowanie to odpowiada prawdopodobieństwu $p' \geq p$.

Podobnie postępujemy z funkcją n niezależnych argumentów

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

gdy znane są oszacowania poszczególnych argumentów

$$a_1 \leq X_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq X_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq X_n \leq b_n,$$

odpowiadające prawdopodobieństwom p_1, p_2, \dots, p_n . Łączne oszacowanie wszystkich argumentów, tj. orzeczenie o jednoczesnym spełnieniu wszystkich n nierówności przy założeniu niezależności X_1, X_2, \dots, X_n odpowiada (na podstawie uogólnienia wzoru (36) na n zdarzeń niezależnych) prawdopodobieństwu $p = p_1 p_2 \dots p_n$.

Jeżeli prawdziwe jest łączne oszacowanie argumentów, to prawdziwe jest także oszacowanie wartości Y

$$F^- \leq Y \leq F^+,$$

gdzie F^- i F^+ są odpowiednio minimalną i maksymalną wartością funkcji $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ w kostce $a_i \leq X_i \leq b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). Powyższe oszacowanie wartości Y odpowiada więc prawdopodobieństwu $p' \geq p = p_1 p_2 \dots p_n$.

We wszystkich poprzednich rozważaniach zakładaliśmy, że wynik pomiaru X danej wielkości fizycznej nie jest obciążony błędem systematycznym. Jeżeli to założenie nie jest spełnione i niezależnie od błędów przypadkowych w każdym pomiarze powtarza się stały błąd Δx_0 , to wartością średnią wyniku pomiaru X nie jest już dokładna wartość średnia x_0 danej wielkości fizycznej, lecz wartość $x'_0 = x_0 + \Delta x_0$. Podobnie x'_0 jest wartością oczekiwaną średniej \bar{X} dowolnej liczby n wyników pomiarów X_i ($i=1, 2, \dots, n$). Tak więc wszystkie poprzednie rozważania odnoszą się również do pomiarów wielkości fizycznych obciążonych błędem systematycznym, które są wtedy nieobciążonymi pomiarami innej wielkości fizycznej o wartości średniej x'_0 . Przez obliczanie średniej arytmetycznej z dostatecznie dużej liczby pomiarów możemy dowolnie zmniejszyć błędy przypadkowe. Błędy systematyczne możemy wykryć i wyeliminować przez porównanie wyników pomiarów z wynikami uzyskanymi innym instrumentem, inną metodą lub przez innego eksperymentatora, a także przez badanie warunków pomiaru (np. rozszerzalności cieplnej skal pomiarowych itp.).

Przy opracowaniu wyników doświadczeń praktycy stosują często odrzucanie skrajnych pomiarów różniących się znacznie od pozostałych. Mówi się, że są to pomiary obciążone *grubymi błędami* pochodzącymi z omyłki przy przeprowadzaniu pomiaru, odczytywaniu lub zapisywaniu wyniku. Postępowanie takie nie jest na ogół uzasadnione i może prowadzić do błędnych wniosków. Duże odchylenia poszczególnych wyników wskazują na konieczność kontroli, ale pomiar może być pominięty dopiero po stwierdzeniu omyłki.