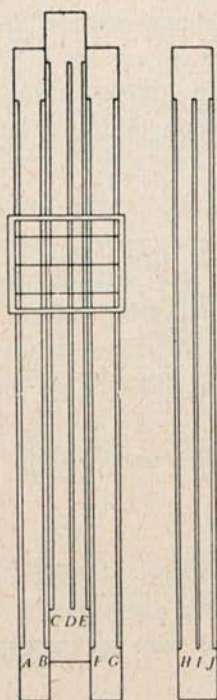


## ROZDZIAŁ IX

### SUWAK LOGARYTMICZNY

**§ 76. Opis suwaka logarytmicznego.** *Suwak logarytmiczny* jest najprostszym przyrządem rachunkowym opartym bezpośrednio na zasadach rachunku graficznego. Jest on nieocenioną pomocą dla każdego, kto ma do czynienia z jakimikolwiek bądź obliczeniami. Dzięki swej prostocie suwak jest stosunkowo łatwo dostępny i może być używany niemal wszędzie.

Od warsztatu technicznego czy kancelarii agronoma do kabiny nawigatora lotniczego i biura konstrukcyjnego wszędzie używa się coraz częściej suwaka logarytmicznego czy też innych suwaków specjalnych. Dlatego pomijając w naszej książce omówienie innych przyrządów i maszyn matematycznych poświęcamy cały rozdział suwakowi logarytmicznemu. Z wielu różnych typów suwaka omówimy tutaj najczęściej spotykany suwak logarytmiczny *systemu Rietz*. Suwaki innych typów mniej lub więcej od niego się różnią, ale opierają się na tej samej zasadzie i po zidentyfikowaniu skal bez trudności będziemy się mogli nimi posługiwać. Suwak logarytmiczny składa się z nieruchomego *lineału* ze skalami na górnej stronie, z ruchomej części, którą będziemy nazywali *wysuwką*, ze skalami po obu stronach oraz z przesuwanego *okienka* z poprzecznymi kreskami. Na rysunku 38 pokazany jest suwak logarytmiczny systemu Rietz oraz odwrotna strona wysuwki tego suwaka. Skale suwaka logarytmicznego oznaczone na rysunku 38 literami *A, B, ..., J* mają



Rys. 38

następujące nazwy, równania i zakresy:

*A* — skala sześciannów,  $\xi_1 = \frac{\mu}{3} \log x_1$  ( $1 \leq x_1 \leq 1000$ ),

*B* — stała skala kwadratów,  $\xi_2 = \frac{\mu}{2} \log x_2$  ( $1 \leq x_2 \leq 100$ ),



*C* — ruchoma skala kwadratów,  $\xi_3 = \frac{\mu}{2} \log x_3$  ( $1 \leq x_3 \leq 100$ ),

*D* — skala odwrotności<sup>1)</sup>,  $\xi_4 = \mu(1 - \log x_4)$  ( $1 \leq x_4 \leq 10$ ),

*E* — ruchoma skala podstawowa,  $\xi_5 = \mu \log x_5$  ( $1 \leq x_5 \leq 10$ ),

*F* — stała skala podstawowa,  $\xi_6 = \mu \log x_6$  ( $1 \leq x_6 \leq 10$ ),

*G* — skala logarytmów,  $\xi_7 = \frac{\mu}{10} x_7$  ( $0 \leq x_7 \leq 10$ ),

*H* — skala sinusów,  $\xi_8 = \mu(1 + \log \sin x_8)$  ( $5^\circ 44' \leq x_8 \leq 90^\circ$ ),

*I* — skala sinusów i tangensów,  $\xi_9 = \mu \left( 2 + \log \frac{\pi x_9}{180^\circ} \right) \approx$   
 $\approx \mu(2 + \log \sin x_9) \approx \mu(2 + \log \operatorname{tg} x_9)$  ( $34' 23'' \leq x_9 \leq 5^\circ 44'$ ),

*J* — skala tangensów,  $\xi_{10} = \mu(1 + \log \operatorname{tg} x_{10})$  ( $5^\circ 44' \leq x_{10} \leq 45^\circ$ ),

gdzie moduł  $\mu$  jest najczęściej równy 25 cm. Używa się także kieszonkowych suwaków o module  $\mu = 12,5$  cm, a niekiedy także dokładniejszych suwaków o module  $\mu = 50$  cm.

**§ 77. Skale podwójne na suwaku.** Kreska okienka pozwala nam traktować dowolne dwie skale umieszczone na jednej stronie suwaka jako skalę podwójną. Jeżeli obie skale są stałe (np. *B* i *F*) albo obie ruchome (np. *D* i *E*), to punkty tych dwóch skal leżące na jednej kresce okienka mają te same współrzędne. Jeżeli jedna skala jest ruchoma, a druga — stała (np. *D* i *A*), to leżące na jednej kresce poprzecznej punkty obu tych skal będą miały także te same współrzędne, o ile tylko początki tych skal się pokrywają, tj. wysuwka nie jest wysunięta.

Tak np. stała skala podstawowa *F* i stała skala kwadratów *B* dadzą nam skalę podwójną różniącą się tylko modulem od skali podwójnej przedstawionej na rysunku 24. Jeżeli z punktu o kocie  $x_6$  na stałej skali podstawowej *F* przejdziemy z pomocą kreski okienka na stałą skalę kwadratów *B*, to otrzymamy punkt o kocie  $x_2$  spełniający równość

$$x_2 = x_6^2.$$

Na odwrót, przechodząc ze skali kwadratowej na skalę podstawową znajdujemy punkt o kocie

$$x_6 = \sqrt{x_2}.$$

Tak więc skale *B* i *F* (lub identyczne skale ruchome *C* i *E*) dają nam skalę podwójną do znajdowania kwadratów i pierwiastków kwadratowych.

<sup>1)</sup> Skali odwrotności na suwaku nie należy mylić z omawianą w § 73 skalą funkcji  $y = 1/x$ , którą także nazywaliśmy skalą odwrotności.



Mając pięć różnych skal na części stałej suwaka i wierzchniej stronie wysuwki możemy w ten sposób uzyskać 10 różnych skal podwójnych pozwalających odczytać wartości następujących funkcji:

$x_2 = x_6^2$	albo	$x_6 = \sqrt{x_2}$	przy użyciu skal	$B$ i $F$ ,
$x_1 = x_6^3$	albo	$x_6 = \sqrt[3]{x_1}$	„ „ „	$A$ i $F$ ,
$x_1 = \sqrt{x_2^3}$	albo	$x_2 = \sqrt[3]{x_1^2}$	„ „ „	$A$ i $B$ ,
$x_4 = \frac{10}{x_5}$	albo	$x_5 = \frac{10}{x_4}$	„ „ „	$D$ i $E$ ,
$x_3 = \frac{100}{x_4^2}$	albo	$x_4 = \frac{10}{\sqrt{x_3}}$	„ „ „	$C$ i $D$ ,
$x_1 = \frac{1000}{x_4^3}$	albo	$x_4 = \frac{10}{\sqrt[3]{x_1}}$	„ „ „	$A$ i $D$ ,
$x_7 = 10 \log x_6$	albo	$x_6 = 10^{x_7/10}$	„ „ „	$F$ i $G$ ,
$x_7 = 5 \log x_2 =$ $= 10 \log \sqrt{x_2}$	albo	$x_2 = 10^{x_7/5}$	„ „ „	$B$ i $G$ ,
$x_7 = \frac{10}{3} \log x_1 =$ $= 10 \log \sqrt[3]{x_1}$	albo	$x_1 = 10^{3x_7/10}$	„ „ „	$A$ i $G$ ,
$x_7 = 10 (1 - \log x_4) =$ $= 10 \log \frac{10}{x_4}$	albo	$x_4 = 10^{1-x_7/10}$	„ „ „	$D$ i $G$ .

Bez przesuwania wysuwki możemy więc, posługując się tylko kreską okienka, odczytać np. następujące wielkości:

$$1,96^2 \approx 3,84, \quad \sqrt{46,5} \approx 6,82,$$

$$5,47^3 \approx 163, \quad \sqrt[3]{9,4} \approx 2,11,$$

$$16,8^{3,2} = \sqrt[3]{16,8^3} \approx 68,5, \quad 335^{2,3} = \sqrt[3]{335^2} \approx 48,3,$$

$$2,85^{-1} = \frac{1}{2,85} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{2,85} \approx 0,351,$$

$$1,42^{-2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{1,42^2} \approx 0,497, \quad 31,8^{-1/2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt{31,8}} \approx 0,174,$$

$$3,28^{-3} = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1000}{3,28^3} \approx 0,0284, \quad 62,5^{-1/3} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{62,5}} \approx 0,252,$$

$$\log 5,13 \approx 0,710, \quad 10^{0,843} \approx 6,97.$$



W podanych przykładach obliczeń na suwaku przybliżone wyniki mają wszystkie cyfry znaczące dokładne.

Liczby, na których wykonaliśmy poszczególne działania, mieściły się zawsze w przedziałach zmienności odpowiednich skal na suwaku. Jednakże wszystkie te działania można wykonać na suwaku dla dowolnych liczb sprowadzając je przez przesunięcie przecinka do przedziałów uwzględnionych na skalach. Mamy np.

$$19,6^2 = (10 \cdot 1,96)^2 = 100 \cdot 1,96^2 \approx 384,$$

$$\sqrt{0,465} = \sqrt{\frac{46,5}{100}} = \frac{1}{10} \sqrt{46,5} \approx 0,682,$$

$$\sqrt[3]{0,0465} = \sqrt[3]{\frac{4,65}{100}} = \frac{1}{10} \sqrt[3]{4,65} \approx 0,238.$$

Przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego przesuwamy przecinek w liczbie podpierwiastkowej w celu sprowadzenia jej do przedziału skali kwadratowej  $1 \leq x_2 \leq 100$  zawsze o parzystą ilość miejsc, aby można było odpowiednią potęgę liczby 10 wyciągnąć przed pierwiastek. Podobnie otrzymujemy

$$0,0547^3 = \left(\frac{5,47}{100}\right)^3 = 5,47^3 \cdot 10^{-6} \approx 163 \cdot 10^{-6} = 0,000163,$$

$$\sqrt[3]{9400} = \sqrt[3]{9,4 \cdot 10^3} = 10 \cdot \sqrt[3]{9,4} \approx 10 \cdot 2,11 = 21,1,$$

$$\sqrt[3]{0,094} = \sqrt[3]{94 \cdot 10^{-3}} = 10^{-1} \cdot \sqrt[3]{94} \approx 10^{-1} \cdot 4,55 = 0,455,$$

$$\sqrt[3]{0,00094} = \sqrt[3]{940 \cdot 10^{-6}} = 10^{-2} \cdot \sqrt[3]{940} \approx 10^{-2} \cdot 9,80 = 0,0980.$$

Przy wyciąganiu pierwiastka sześciennego przesuwamy przecinek w liczbie podpierwiastkowej w celu sprowadzenia jej do przedziału skali sześciennnej  $1 \leq x_1 \leq 1000$  zawsze o ilość miejsc podzielną przez 3, aby można było odpowiednią potęgę liczby 10 wyciągnąć przed pierwiastek. Wszystkie przekształcenia z tym związane, które w powyższych przykładach szczegółowo zapisywaliśmy, przy odrobinie wprawy i uwagi wykonuje się zwykle w pamięci. Analogicznie znajdujemy odwrotności oraz odwrotności drugich i trzecich potęg i pierwiastków dowolnych liczb. Mamy np.

$$2850^{-1} = (10^3 \cdot 2,85)^{-1} = 10^{-3} \cdot 2,85^{-1} \approx 0,000351,$$

$$0,0142^{-2} = (10^{-2} \cdot 1,42)^{-2} = 10^4 \cdot 1,42^{-2} \approx 4970,$$

$$0,318^{-1/2} = (10^{-2} \cdot 31,8)^{-1/2} = 10 \cdot 31,8^{-1/2} \approx 1,74,$$

$$6250^{-1/3} = (10^3 \cdot 6,25)^{-1/3} = 10^{-1} \cdot 6,25^{-1/3} \approx 0,0543.$$

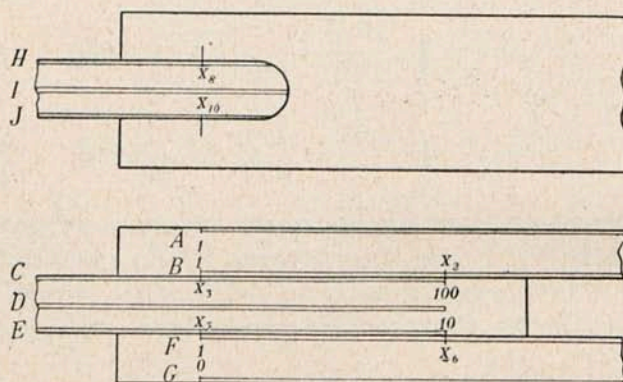


Logarytmy dziesiętne dowolnych liczb dodatnich i dowolne potęgi liczby 10 obliczamy na suwaku podobnie jak w tablicach logarytmicznych, odczytując jedynie mantysę logarytmu. Mamy np.

$$\log 0,0175 \approx 2,243 = -1,757,$$

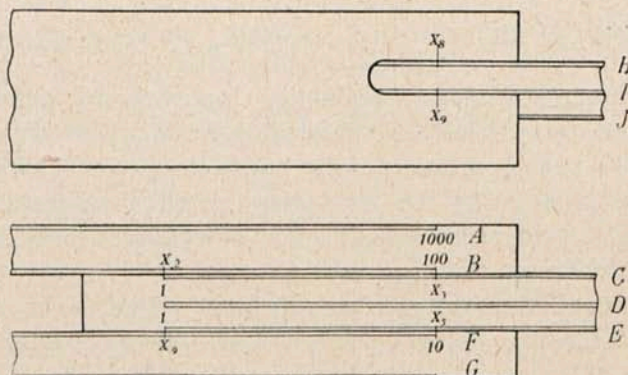
$$10^{-2,635} = 10^{-3} \cdot 10^{0,365} \approx 10^{-3} \cdot 2,32 = 0,00232.$$

Nowy zasób podwójnych skal otrzymamy przełożywszy wysuwkę od-



Rys. 39

wrotną stroną na wierzch. Pozwoli to nam odczytywać na suwaku wartości funkcji trygonometrycznych (przechodząc z odpowiednich skal trygonometrycznych  $H, I, J$  na skalę podstawową  $F$ ), ich kwadraty i sześciany



Rys. 40

(przechodząc odpowiednio na skalę  $B$  i  $A$ ), logarytmy funkcji trygonometrycznych (przechodząc na skalę  $G$ ) i odpowiednie funkcje odwrotne do wszystkich wyżej wymienionych.



Niektóre z tych wielkości można otrzymać bez przekładania wysuwki. Służą do tego wycięcia na odwrotnej stronie suwaka i zaznaczone w nich kreski odpowiadające końcom skal na wierzchniej stronie. Pozwalają one przechodzić ze skal  $H$ ,  $I$ ,  $J$  na skalę  $C$  i  $E$  bez przekładania wysuwki. Pokazane to jest na rysunkach 39 i 40. Na rysunku 39 pokazany jest lewy koniec suwaka od strony odwrotnej i strony wierzchniej. Wysuwając wysuwkę w lewo, tak by na odwrotnej stronie interesująca nas kota  $x_8$  skali sinusów  $H$  pokryła się z kreską w wycięciu, możemy przejść na skalę  $C$  i  $E$  na stronie wierzchniej suwaka. Na ruchomej skali podstawowej  $E$  odczytujemy kątę  $x_5$  punktu znajdującego się nad jedynką stałej skali podstawowej  $F$ . W ten sposób przechodząc ze skali  $H$  na  $E$  lub na odwrót ze skali  $E$  na  $H$  możemy odczytać wartości funkcyj

$$x_5 = 10 \sin x_8, \quad x_8 = \arcsin(x_5/10).$$

Przy tym nastawieniu suwaka możemy przejść ze skali  $H$  na ruchomą skalę kwadratową  $C$  odczytując pod jedynką na stałej skali kwadratowej  $B$  kątę  $x_3$  spełniającą równość

$$x_3 = 100 \cdot \sin^2 x_8 \quad \text{albo} \quad x_8 = \arcsin(\sqrt{x_3}/10).$$

Zupełnie podobnie odczytujemy tangensy kątów posługując się skalą  $J$ . Na rysunku 39 punkt o kocie  $x_{10}$  na skali tangensów pokrywa się z kreską w wycięciu suwaka. Zachodzą więc równości

$$x_5 = 10 \cdot \operatorname{tg} x_{10}, \quad x_{10} = \operatorname{arctg}(x_5/10),$$

$$x_3 = 100 \cdot \operatorname{tg}^2 x_{10}, \quad x_{10} = \operatorname{arctg}(\sqrt{x_3}/10).$$

Przy nastawieniu suwaka pokazanym na rysunku 39 koniec ruchomej skali podstawowej  $E$  wyznacza na stałej skali podstawowej punkt o współrzędnej  $\xi_6$  spełniający równość

$$\xi_6 = \mu - \xi_5,$$

gdzie  $\xi_5$  jest współrzędną punktu o kocie  $x_5$  na skali  $E$ . Uwzględniając równania skal znajdujemy, że koty tych punktów związane są zależnościami

$$x_6 = 10/x_5.$$

Możemy więc odczytać na suwaku odwrotności funkcji trygonometrycznych

$$x_6 = \frac{1}{\sin x_8} = \operatorname{cosec} x_8, \quad x_6 = \frac{1}{\operatorname{tg} x_{10}} = \operatorname{ctg} x_{10},$$



a także na stałej skali kwadratów  $B$  kwadraty tych funkcji

$$x_2 = \frac{1}{\sin^2 x_8} = \operatorname{cosec}^2 x_8, \quad x_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x_{10}} = \operatorname{ctg}^2 x_{10}$$

oraz odpowiednie funkcje odwrotne

$$x_8 = \arcsin \frac{1}{x_6} = \operatorname{arccosec} x_6, \quad x_{10} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_6} = \operatorname{arccotg} x_6,$$

$$x_8 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \operatorname{arccosec} \sqrt{x_2}, \quad x_{10} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \operatorname{arccotg} \sqrt{x_2}.$$

W ten sposób możemy np. odczytać na suwaku

$$\sin 42^\circ 30' \approx 0,647, \quad \operatorname{arcsin} 0,75 \approx 48^\circ 40',$$

$$\operatorname{tg} 21^\circ 40' \approx 0,397, \quad \operatorname{arctg} 0,163 \approx 9^\circ 16',$$

$$\sin^2 14^\circ 20' \approx 0,061, \quad \operatorname{arctg} \sqrt{0,66} \approx 39^\circ 10',$$

$$\operatorname{cosec} 32^\circ 30' \approx 1,86, \quad \operatorname{ctg}^2 18^\circ 50' \approx 8,62,$$

$$\operatorname{arccosec} 6,25 \approx 9^\circ 13', \quad \operatorname{arccotg} 4,12 \approx 13^\circ 40'.$$

Posługując się skalami  $H$  i  $J$  możemy odczytać  $\sin a$  dla kątów  $5^\circ 44' \leq a \leq 90^\circ$  i  $\operatorname{tg} \beta$  dla  $5^\circ 44' \leq \beta \leq 45^\circ$ . Dla tych przedziałów wartości sinusa i tangensa zmieniają się w przedziale  $(0,1,1)$ . Dla kątów mniejszych niż  $5^\circ 44'$  wartości sinusa i tangensa odczytujemy posługując się skalą sinusów i tangensów  $I$ . Skala ta obejmuje przedział  $34' 23'' \leq a \leq 5^\circ 44'$ , w którym sinus i tangens z dokładnością odczytu suwaka są równe kątowi w mierze łukowej i przebiegają wartości od 0,01 do 0,1. Do odczytu sinusa lub tangensa służy wycięcie w prawym końcu suwaka. Wysuwając wysuwkę w prawo tak, by punkt o kocie  $x_9$  na skali  $I$  znalazł się nad kreską w wycięciu (rys. 40) możemy na wierzchniej stronie suwaka odczytać na odpowiednich skalach wartości

$$x_5 = 100 \frac{\pi x_9}{180^\circ} \approx 100 \sin x_9 \approx 100 \operatorname{tg} x_9,$$

$$x_3 = \left( 100 \frac{\pi x_9}{180^\circ} \right)^2 \approx 10000 \sin^2 x_9 \approx 10000 \operatorname{tg}^2 x_9,$$

$$x_6 = \frac{180^\circ}{10 \pi x_9} \approx \frac{1}{10 \sin x_9} = \frac{1}{10} \operatorname{cosec} x_9 \approx \frac{1}{10 \operatorname{tg} x_9} = \frac{1}{10} \operatorname{ctg} x_9,$$

$$x_2 = \left( \frac{180^\circ}{10 \pi x_9} \right)^2 \approx \frac{1}{100 \sin^2 x_9} = \frac{1}{100} \operatorname{cosec}^2 x_9 \approx \frac{1}{100 \operatorname{tg}^2 x_9} = \frac{1}{100} \operatorname{ctg}^2 x_9.$$



Przechodząc w analogiczny sposób z wierzchniej strony suwaka na odwrotną stronę wysuwki możemy odczytywać wartości odpowiednich funkcji odwrotnych. Odczytajmy np. następujące wartości:

$$\begin{aligned}\sin 3^{\circ} 47' &\approx 0,066, & \operatorname{ctg} 2^{\circ} 19' &\approx 24,7, \\ \operatorname{tg} 2^{\circ} 19' &\approx 0,000715, & \operatorname{cosec} 2^{\circ} 19' &\approx 0,00194, \\ \operatorname{arcsin} 0,0451 &\approx 2^{\circ} 35', & \operatorname{arctg} 38,9 &\approx 1^{\circ} 28' 20''.\end{aligned}$$

Wycięcie w prawym końcu suwaka pozwala również przechodzić ze skali sinusów  $H$  na wierzchnią stronę suwaka, podobnie jak to robimy korzystając z wycięcia w lewym końcu.

Dla kątów mniejszych niż  $34^{\circ} 23''$  przyjmujemy jako przybliżoną wartość sinusa i tangensa wartość kąta w mierze łukowej. O przeliczaniu kątów na miarę łukową będziemy mówili później. Wartości dowolnych funkcji trygonometrycznych dla dowolnych wartości kąta i dowolne wartości odwrotnych funkcji trygonometrycznych możemy odczytać na suwaku przez sprowadzenie za pomocą wzorów redukcyjnych do uwzględnionych na suwaku przedziałów sinusa i tangensa. Odczytajmy np. wartości

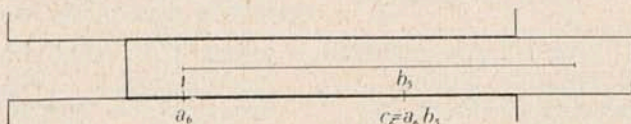
$$\begin{aligned}\cos 71^{\circ} 54' &= \sin 18^{\circ} 6' \approx 0,310, \\ \sin 227^{\circ} 15' &= -\sin 47^{\circ} 15' \approx -0,733, \\ \operatorname{tg} (-80^{\circ} 48') &= -\operatorname{tg} 80^{\circ} 48' = -\operatorname{ctg} 9^{\circ} 12' \approx -6,18, \\ \operatorname{arccos} 0,812 &= 90^{\circ} - \operatorname{arcsin} 0,812 \approx 35^{\circ} 30', \\ \operatorname{arctg} (-1,47) &= -\operatorname{arctg} 1,47 = -(90^{\circ} - \operatorname{arctg} 1,47) \approx -55^{\circ} 45'.\end{aligned}$$

**§ 78. Działania na suwaku.** Dotychczas omawialiśmy tylko skale podwójne, które można uzyskać na suwaku logarytmicznym i funkcje, których wartości można przy pomocy tych skal odczytać. Najważniejszym jednak zastosowaniem suwaka jest wykonywanie przy jego pomocy mnożenia i dzielenia na zasadzie przesuwanych skal podwójnych omówionych w § 73. Służą do tego dwie skale podstawowe  $E$  i  $F$ . Przesunemy wysuwkę tak, by jedynka ruchomej skali podstawowej  $E$  pokryła się z punktem o kocie  $a_6$  stałej skali podstawowej  $F$ . Jeżeli przy takim położeniu wysuwki punkt o kocie  $b_5$  na ruchomej skali podstawowej pokrywa się z punktem o kocie  $c_6$  na stałej skali podstawowej, to współrzędna punktu o kocie  $c_6$  jest sumą współrzędnych punktów o kotach  $a_6$  i  $b_5$ . Zatem koty  $a_6$ ,  $b_5$  i  $c_6$  spełniają równość

$$\mu \log c_6 = \mu \log a_6 + \mu \log b_5, \quad \text{czyli} \quad c_6 = a_6 b_5.$$



Tak więc aby odczytać na suwaku wartość iloczynu dwu liczb, należy ustawić jedynkę ruchomej skali podstawowej nad tym punktem stałej skali podstawowej, którego kota jest równa pierwszemu czynnikowi i odczytać na skali stałej wartość iloczynu pod tym punktem skali ru-

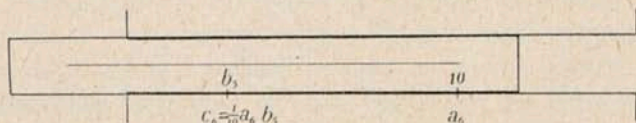


Rys. 41

chomej, którego kota jest równa drugiemu czynnikowi (rys. 41). W ten sposób odczytujemy na suwaku np. przybliżone wartości iloczynów

$$1,72 \cdot 3,43 \approx 5,90, \quad 4,67 \cdot 1,49 \approx 6,96.$$

Zwróćmy jednak uwagę, że nie każde dwie liczby mieszczące się na skalach podstawowych  $1 \leq x_5 \leq 10$ ,  $1 \leq x_6 \leq 10$  możemy w ten sposób pomnożyć przez siebie. Jeżeli iloczyn  $a_6 b_5$  jest większy niż 10, to przy nastawianiu takim, jak na rysunku 41, punkt o kocie  $b_5$  na skali ruchomej znajdzie się poza końcem skali stałej. Aby odczytać wartości iloczynu, należałoby przedłużyć skalę stałą. To łatwo jest zrobić pamiętając, że następny odcinek skali logarytmicznej ( $10 \leq x_6 \leq 100$ ) nie różni się niczym od odcinka podstawowego ( $1 \leq x_6 \leq 10$ ), w którym należy tylko wszystkie koty zwiększyć dziesięciokrotnie. Przedłużenie stałej skali podstawowej możemy więc uzyskać przesuwając wysuwkę o pełną długość skali na lewo



Rys. 42

(rys. 42). W ten sposób nad punktem odpowiadającym pierwszemu czynnikowi  $a_6$  na skali stałej znajduje się teraz punkt o kocie 10 na skali ruchomej, a iloczyn otrzymamy mnożąc przez 10 kotę punktu skali stałej znajdującego się pod punktem odpowiadającym drugiemu czynnikowi  $b_5$  na skali ruchomej. W ten sposób możemy odczytać na suwaku przybliżone wartości iloczynów

$$4,61 \cdot 3,95 \approx 18,4, \quad 8,15 \cdot 6,37 \approx 51,9.$$

Interpolację między zaznaczonymi kreskami skal ułatwia nam kreska okienka.

Oczywiście będziemy mnożyli na suwaku nie tylko liczby z przedziału  $[1,10]$ . Mając dwa dowolne czynniki możemy przez odpowiednie



przesunięcia przecinków sprowadzić je do zakresu skal podstawowych i po wykonaniu mnożenia odpowiednio przesunąć przecinek w iloczynie. Mamy np.

$$0,172 \cdot 343 = 10^{-1} \cdot 1,72 \cdot 10^2 \cdot 3,43 \approx 10 \cdot 5,90 = 59,0.$$

W praktyce omija się wykonywanie wypisanych powyżej przekształceń i nastawia czynniki na skalach podstawowych nie zwracając uwagi na położenie przecinka. Położenie przecinka w odczytanym na suwaku iloczynie określamy według prostej reguły, którą zaraz wyprowadzimy. Niech  $N(a)$  będzie liczbą całkowitą przyporządkowaną liczbie  $a > 0$  w sposób następujący:

dla  $a \geq 1$   $N(a)$  jest liczbą stojących przed przecinkiem cyfr liczby  $a$ ,

dla  $a < 1$   $N(a) = -k$ , gdzie  $k$  jest liczbą zer w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $a$  stojących między przecinkiem a pierwszą cyfrą znaczącą. Używając symbolu  $[x]$  ( $[x] \leftarrow$  „entier  $x$ ” — oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż  $x$ ) możemy napisać

$$N(a) = [\log a] + 1.$$

Niech  $a_6$  i  $b_5$  będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Możemy je zapisać w postaci

$$a_6 = 10^{N(a_6)-1} a'_6, \quad b_5 = 10^{N(b_5)-1} b'_5,$$

gdzie  $a'_6$  i  $b'_5$  są liczbami z przedziału  $[1, 10)$  uzyskanymi z liczb  $a_6$  i  $b_5$  przez odpowiednie przesunięcie przecinka. Mamy

$$a_6 b_5 = 10^{N(a_6)-1} a'_6 10^{N(b_5)-1} b'_5 = 10^{N(a_6)+N(b_5)-2} a'_6 b'_5,$$

a zatem

$$N(a_6 b_5) = \begin{cases} N(a_6) + N(b_5) - 1, & \text{gdy } a'_6 b'_5 < 10, \\ N(a_6) + N(b_5), & \text{gdy } a'_6 b'_5 \geq 10. \end{cases}$$

Ten wzór pozwoli sformułować regułę mnożenia na suwaku dowolnych dwu liczb dodatnich  $a_6$  i  $b_5$ .

W celu odczytania na suwaku iloczynu dwu dowolnych liczb dodatnich  $a_6 b_5$  należy bez zwracania uwagi na położenie przecinka w liczbach  $a_6$ ,  $b_5$ , tzn. traktując je jak liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem, odczytać — według schematu przedstawionego na rysunku 41 lub 42 — liczbę  $c_6$ . Jest to zredukowana do liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem wartość szukanego iloczynu  $a_6 b_5$  lub też liczba 10, gdy  $a_6 b_5 = 10^m$  (gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą), a  $c_6$  odczytujemy według schematu 42.

Ilość stojących przed przecinkiem cyfr znaczących iloczynu  $a_6 b_5$ , czyli  $N(a_6 b_5)$ , jest równa  $N(a_6) + N(b_5) - 1$ , gdy odczytujemy  $c_6 < 10$  według schematu przedstawionego na rysunku 41 (wysuwka jest wtedy wysu-



nięta w prawo,  $a'_6 b'_5 < 10$ ) albo jest równa  $N(a_6) + N(b_5)$ , gdy odczytujemy  $c_6$  według schematu na rysunku 42 (wysuwka wysunięta w lewo,  $a'_6 b'_5 \geq 10$ ). Przepis ten nie jest prawdziwy, gdy  $c_6 = 10$  (wynik taki odczytujemy z wysuwką wysuniętą na prawo, lecz mimo to jest  $N(a_6 b_5) = N(a_6) + N(b_5)$ ). Gdy  $a_6 = 10^m$  (gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą), wtedy nie trzeba wcale wysuwać wysuwki. Zwykle jednak nie używamy wtedy suwaka, gdyż jest  $a'_6 = 1$ ,  $c_6 = b'_5$ ,  $N(a_6 b_5) = N(a_6) + N(b_5) - 1$  i całe mnożenie z łatwością wykonujemy w pamięci. Niech np.  $a_6 = 1815$ ,  $b_5 = 37,9$ . Ponieważ  $N(1815) = 4$ ,  $N(37,9) = 2$ , a iloczyn  $1,815 \cdot 3,79 \approx 6,88$  odczytujemy z wysuwką wysuniętą na prawo, więc  $N(1815 \cdot 37,9) = 5$  i mamy

$$1815 \cdot 37,9 \approx 688 \cdot 10^2.$$

Podobnie odczytujemy na suwaku przybliżone wartości iloczynów  $0,000487 \cdot 0,533 \approx 0,000260$ ,  $0,00706 \cdot 1,77 \approx 1,25$ . Zwróćmy uwagę na to, że po nastawieniu suwaka według schematu 41 lub 42 możemy już bez przesuwania wysuwki mnożyć dowolne liczby przez stały czynnik  $a_6$ . Tak więc, za jednym nastawieniem suwaka możemy całą kolumnę liczb pomnożyć przez stały współczynnik.

Równość  $c_6 = a_6 b_5$ , jaką spełniają koty odpowiednich punktów skal podstawowych przy pokazanym na rysunku 41 nastawieniu suwaka (wysuwka wysunięta w prawo), można przepisać w postaci

$$a_6 = \frac{c_6}{b_5}.$$

Analogicznie przy nastawieniu suwaka jak na rysunku 42 (wysuwka wysunięta w lewo) jest

$$\frac{1}{10} a_6 = \frac{c_6}{b_5}.$$

Schematy mnożenia na suwaku pokazane na rysunkach 41 i 42 są więc jednocześnie schematami dzielenia. Ilość miejsc znaczących przed przecinkiem ilorazu dowolnych liczb dodatnich  $c_6$  i  $b_5$  wyraża się wzorem

$$N\left(\frac{c_6}{b_5}\right) = \begin{cases} N(c_6) - N(b_5) + 1, & \text{gdy } \left(\frac{c_6}{b_5}\right)' b'_5 < 10, \\ N(c_6) - N(b_5), & \text{gdy } \left(\frac{c_6}{b_5}\right)' b'_5 \geq 10, \end{cases}$$

gdzie — jak poprzednio —  $(c_6/b_5)'$  i  $b'_5$  są zredukowanymi do liczb o jednej cyfrze znaczącej przed przecinkiem wartościami ilorazu  $c_6/b_5$  i dzielnika  $b_5$ . Możemy więc w następujący sposób sformułować regułę dzielenia na suwaku.



W celu odczytania na suwaku ilorazu  $c_6/b_5$  dowolnych liczb dodatnich  $c_6$  i  $b_5$  należy bez zwracania uwagi na położenie przecinka w tych liczbach (tzn. traktując je jak liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem) ustawić punkt o kocie  $b_5$  na ruchomej skali podstawowej nad punktem o kocie  $c_6$  na stałej skali podstawowej<sup>1)</sup>. Pod tym końcem (1 lub 10) ruchomej skali podstawowej, który znajduje się w granicach skal stałych suwaka, odczytujemy na skali stałej liczbę  $a_6$ . Jest to zredukowana do liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem wartość szukanego ilorazu  $c_6/b_5$ . Ilość stojących przed przecinkiem cyfr znaczących ilorazu  $c_6/b_5$ , czyli  $N(c_6/b_5)$ , jest równa  $N(c_6) - N(b_5) + 1$ , gdy odczytujemy  $a_6$  pod jedynką (wysuwka wysunięta w prawo, rys. 41), albo jest równa  $N(c_6) - N(b_5)$ , gdy odczytujemy  $a_6$  pod dziesiątką (wysuwka wysunięta w lewo, rys. 42). Gdy iloraz  $c_6/b_5 = 10^m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą, to można go odczytać zarówno pod jedynką, jak i pod dziesiątką. Aby utrzymać podaną regułę, należałoby odczytywać go pod jedynką. Przykładu tego nie spotykamy jednak w praktyce, gdyż taki iloraz obliczamy z łatwością w pamięci.

W sposób opisany odczytujemy na suwaku przybliżone wartości ilorazów

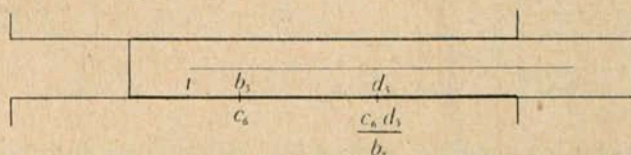
$$657:11,8 \approx 55,7,$$

$$0,0369:0,000487 \approx 75,8,$$

$$0,00119:40,6 \approx 0,0000293,$$

$$76,1:0,000263 \approx 289 \cdot 10^3.$$

Wykonując na suwaku dzielenie odczytujemy iloraz na stałej skali podstawowej pod jedynką lub dziesiątką skali ruchomej. Suwak jest więc tak nastawiony, jak gdybyśmy chcieli mnożyć uzyskany iloraz przez jakiś czynnik. W ten sposób można więc za jednym nastawieniem suwaka wykonać dwa działania: dzielenie i mnożenie, to jest obliczyć wyrażenie



Rys. 43

$c_6 d_5 / b_5$ . Należy w tym celu nad punktem o kocie  $c_6$  na stałej skali podstawowej nastawić punkt o kocie  $b_5$  na skali ruchomej i odczytać  $c_6 d_5 / b_5$  na skali stałej pod punktem o kocie  $d_5$  na skali ruchomej (rys. 43).

<sup>1)</sup> Najłatwiej w tym celu nastawić kreskę okienka na punkt o kocie  $c_6$  na skali stałej i tak przesunąć wysuwkę, by kreska przecięła skalę ruchomą w punkcie o kocie  $b_5$ .



W ten sposób możemy np. obliczyć przybliżone wartości wyrażeń

$$\frac{3,14 \cdot 4,37}{1,68} \approx 8,17, \quad \frac{5,42 \cdot 1,83}{7,19} \approx 1,38.$$

Chcąc w ten sam sposób obliczyć przybliżone wartości wyrażeń

$$\alpha = \frac{3,14 \cdot 8,45}{1,68} \quad \text{oraz} \quad \beta = \frac{5,42 \cdot 1,14}{7,19}$$

przekonamy się, że w obu przypadkach po wykonaniu dzielenia, tj. po nastawieniu punktu o kocie  $b_5$  na skali ruchomej nad punktem o kocie  $c_6$  na skali stałej, punkt skali ruchomej o kocie  $d_5$  znajdzie się na zewnątrz suwaka. Jest  $\alpha > 10$  i  $\beta < 1$ , więc obie te wartości leżą poza zakresem skali podstawowej. Aby móc je odczytać, musimy po wykonaniu dzielenia przedłużyć skalę podstawową. Należy w tym celu przerzucić wysuwkę o pełną długość skali podstawowej z prawej strony na lewą<sup>1)</sup> przy obliczaniu  $\alpha$  i z lewej na prawą przy obliczaniu  $\beta$ . W ten sposób otrzymujemy

$$\frac{3,14 \cdot 8,45}{1,68} \approx 15,8, \quad \frac{5,42 \cdot 1,14}{7,19} \approx 0,859.$$

Jeżeli liczby  $c_6$ ,  $d_5$  i  $b_5$  nie należą do zakresu skal podstawowych [1,10], to na suwaku odczytujemy tylko zredukowaną do liczby o jednej cyfrze znaczącej przed przecinkiem wartość  $c_6 d_5 / b_5$  lub też liczbę 10 (ten przypadek występuje wtedy, gdy  $c_6 d_5 / b_5 = 10^m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą,  $b_5 < d_5$ , wysuwka wysunięta na prawo). Jeżeli nie musieliśmy przy tym przerzucać wysuwki, to: albo dzieliliśmy i mnożyliśmy z wysuwką wysuniętą na prawo, a wtedy

$$\begin{aligned} N\left(\frac{c_6 d_5}{b_5}\right) &= N\left(\frac{c_6}{b_5}\right) + N(d_5) - 1 = N(c_6) - N(b_5) + 1 + N(d_5) - 1 = \\ &= N(c_6) + N(d_5) - N(b_5) \end{aligned}$$

(jedynie w tym przypadku, gdy odczytaliśmy na suwaku liczbę 10, liczba  $N(c_6 d_5 / b_5)$  jest o jedność większa), albo też dzieliliśmy i mnożyliśmy z wysuwką wysuniętą na lewo, a wtedy jest także

$$N\left(\frac{c_6 d_5}{b_5}\right) = N\left(\frac{c_6}{b_5}\right) + N(d_5) = N(c_6) + N(d_5) - N(b_5).$$

<sup>1)</sup> Wykonujemy to zaznaczając kreską okienka położenie jedynki skali ruchomej i przesuwając wysuwkę na lewo tak, by dziesiątka skali ruchomej pokryła się z kreską okienka.



Jeżeli przy obliczaniu musieliśmy przerzucić wysuwkę z prawej strony na lewą, to dzielenie było wykonane z wysuwką wysuniętą na prawo, a mnożenie — z wysuwką wysuniętą na lewo. W tym więc przypadku jest

$$N\left(\frac{c_6 d_5}{b_5}\right) = N\left(\frac{c_6}{b_5}\right) + N(d_5) = N(c_6) + N(d_5) - N(b_5) + 1.$$

Jeżeli wreszcie przerzucaliśmy wysuwkę z lewej strony na prawą, to dzielenie było wykonane z wysuwką wysuniętą na lewo, a mnożenie — z wysuwką wysuniętą na prawo.

W tym przypadku jest

$$N\left(\frac{c_6 d_5}{b_5}\right) = N\left(\frac{c_6}{b_5}\right) + N(d_5) - 1 = N(c_6) + N(d_5) - N(b_5) - 1.$$

Jest zatem

$$N\left(\frac{c_6 d_5}{b_5}\right) = \begin{cases} N(c_6) + N(d_5) - N(b_5), & \text{gdy nie przerzucamy wysuwki} \\ & \text{i odczytujemy wynik różny od 10,} \\ N(c_6) + N(d_5) - N(b_5) + 1, & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z pra-} \\ & \text{wa na lewo lub gdy odczytujemy} \\ & \text{wynik 10,} \\ N(c_6) + N(d_5) - N(b_5) - 1, & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z le-} \\ & \text{wa na prawo.} \end{cases}$$

Posługując się tą regułą możemy np. odczytać na suwaku przybliżone wyniki działań

$$\begin{aligned} \frac{0,00648 \cdot 7,93}{0,551} &\approx 0,0933, & \frac{2620 \cdot 30,7}{517} &\approx 155,5, \\ \frac{0,0822 \cdot 0,532}{0,00121} &\approx 36,2, & \frac{1,89 \cdot 0,0388}{937} &\approx 0,0000782. \end{aligned}$$

Obliczone według schematu podanego na rysunku 43 wyrażenie

$$a_6 = \frac{c_6 d_5}{b_5}$$

jest rozwiązaniem proporcji

$$\frac{a_6}{d_5} = \frac{c_6}{b_5}.$$

Ponieważ przy obliczaniu tym ustawiamy wysuwkę suwaka tak, by  $b_5$  na ruchomej skali podstawowej znalazło się nad  $c_6$  na stałej skali podsta-



wowej, więc przy jednym nastawieniu suwaka możemy odczytać ciąg wartości  $a_6^{(1)}, a_6^{(2)}, \dots, a_6^{(n)}$  związanych proporcją

$$\frac{a_6^{(1)}}{d_5^{(1)}} = \frac{a_6^{(2)}}{d_5^{(2)}} = \dots = \frac{a_6^{(n)}}{d_5^{(n)}} = \frac{c_6}{b_5} = \text{const},$$

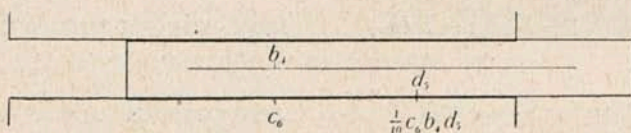
gdy dane są wartości

$$c_6, b_5, d_5^{(1)}, \dots, d_5^{(n)}.$$

Podobnie jak wyrażenie  $c_6 d_5 / b_5$  możemy za jednym nastawieniem suwaka odczytać przybliżone wyniki działań.

$$c_6 b_4 d_5 \quad \text{oraz} \quad \frac{c_6}{b_5 d_4}.$$

Posługujemy się w tym celu skalą odwrotności  $D$ . Ponieważ przejściu ze skali odwrotności  $D$  na ruchomą skalę podstawową  $E$  odpowiada

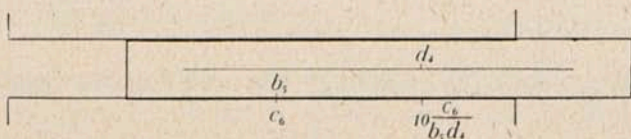


Rys. 44

przekształcenie  $x_5 = 10/x_4$ , więc po przepisaniu tych wyrażen w postaci

$$c_6 b_4 d_5 = 10 \frac{c_6 d_5}{10} \cdot \frac{1}{b_4}, \quad \frac{c_6}{b_5 d_4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{c_6}{b_5} \cdot \frac{10}{d_4}$$

możemy obliczyć wartość  $c_6 b_4 d_5$  według schematu przedstawionego na rysunku 44, a wartość  $c_6 / b_5 d_4$  według schematu na rysunku 45. W ten



Rys. 45

sposób możemy np. odczytać na suwaku przybliżone wyniki działań

$$3,79 \cdot 6,22 \cdot 1,87 \approx 44,0, \quad 2,33 \cdot 2,09 \cdot 8,61 \approx 41,9,$$

$$\frac{5,95}{4,30 \cdot 3,14} \approx 0,440, \quad \frac{3,53}{6,75 \cdot 2,69} \approx 0,177.$$



Może się zdarzyć, że — podobnie jak poprzednio — zajdzie potrzeba przerzucenia wysuwki z prawej strony na lewą, np. przy obliczaniu przybliżonych wyników działań

$$6,09 \cdot 4,42 \cdot 9,28 \approx 250, \quad \frac{3,14}{1,22 \cdot 2,05} \approx 1,26,$$

lub ze strony lewej na prawą, np. przy obliczeniach

$$3,14 \cdot 1,22 \cdot 2,05 \approx 7,85, \quad \frac{6,09}{4,42 \cdot 9,28} \approx 0,138.$$

Jeżeli chcemy wykonywać analogiczne rachunki na liczbach nie należących do przedziału  $[1,10]$ , tj. do zakresu skal podstawowych i skali odwrotności, to nastawiając na odpowiednich skalach zredukowane wartości odczytujemy na suwaku wynik zredukowany do liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem lub liczbę 10. Położenie przecinka ustalamy według łatwych do uzyskania wzorów

$$N(c_6 b_4 d_5) = \begin{cases} N(c_6) + N(b_4) + N(d_5) - 1, & \text{gdy nie przerzucamy wysuwki} \\ & \text{i odczytujemy wynik różny od 10,} \\ N(c_6) + N(b_4) + N(d_5), & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z pra-} \\ & \text{wa na lewo lub gdy odczytujemy} \\ & \text{wynik 10,} \\ N(c_6) + N(b_4) + N(d_5) - 2, & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z lewa} \\ & \text{na prawo} \end{cases}$$

oraz

$$N\left(\frac{c_6}{b_5 d_4}\right) = \begin{cases} N(c_6) - N(b_5) - N(d_4) + 1, & \text{gdy nie przerzucamy wysuwki} \\ & \text{i odczytujemy wynik różny od 10,} \\ N(c_6) - N(b_5) - N(d_4) + 2, & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z pra-} \\ & \text{wa na lewo lub gdy odczytujemy} \\ & \text{wynik 10,} \\ N(c_6) - N(b_5) - N(d_4), & \text{gdy przerzucamy wysuwkę z lewa} \\ & \text{na prawo.} \end{cases}$$

W ten sposób obliczamy np. przybliżone wyniki działań

$$0,397 \cdot 71,5 \cdot 14,8 \approx 375, \quad 0,00016 \cdot 6,52 \cdot 0,291 \approx 0,000303,$$

$$\frac{47500}{60,8 \cdot 12,7} \approx 61,5, \quad \frac{0,0437}{0,008 \cdot 236,8} \approx 0,0224.$$



Przy umieszczaniu przecinka w wyniku można, zamiast rachowania ilości znaczących cyfr przed przecinkiem, posługiwać się prowizorycznym obliczeniem wyniku w pamięci (oczywiście tylko z taką dokładnością, która jest potrzebna do poprawnego umieszczenia przecinka). Na przykład w ostatnim przykładzie łatwo obliczyć w pamięci, że

$$\frac{0,0437}{0,008 \cdot 236,8} \approx \frac{0,05}{0,01 \cdot 250} = 0,02.$$

Gdy więc na suwaku odczytamy liczbę 2,24, to jako przybliżony wynik obliczenia przyjmiemy liczbę 0,0224. Ta metoda nie wymaga pamiętania odpowiednich wzorów, jest w pewnym stopniu kontrolą odczytu, a przy odrobinie wprawy nie zajmuje więcej czasu i jest pewniejsza.

Przez kolejne stosowanie schematu przedstawionego na rysunku 43 lub następnych schematów możemy obliczyć na suwaku przybliżone wartości ułamka, którego licznik i mianownik są iloczynami dowolnej ilości czynników. Każde nastawienie suwaka pozwala wykonać dwa działania (dzielenie i mnożenie według schematu 43, dwa mnożenia według schematu 44, lub dwa dzielenia według schematu 45). Wyniki kolejnych działań zaznaczamy na skali kreską okienka bez odczytywania ich wartości (chyba że są nam potrzebne do innych celów). Położenie przecinka ustalamy za pomocą prowizorycznego szacowania wyniku w pamięci lub przez stosowanie odpowiednich wzorów na ilość cyfr znaczących przed przecinkiem.

W ten sposób możemy np. odczytać na suwaku przybliżone wyniki następujących działań:

$$\frac{0,0721 \cdot 4,96}{3,54 \cdot 0,0029 \cdot 41,8} = \left( \frac{0,0721}{3,54 \cdot 0,0029} \right) \frac{4,96}{41,8} \approx 0,833,$$

$$\frac{10,8 \cdot 697 \cdot 4,65 \cdot 0,981}{33,7 \cdot 0,00058} = \left[ \left( \frac{10,8 \cdot 697}{33,7} \right) \frac{4,65}{0,00058} \right] \cdot 0,981 \approx 1,76 \cdot 10^7,$$

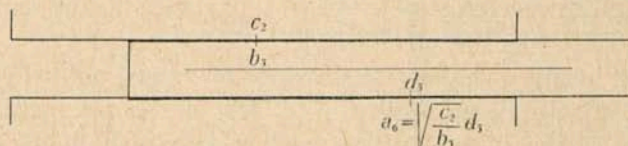
$$\frac{0,0264 \cdot 1,67 \cdot 0,822}{53,8 \cdot 298} = \left( \frac{0,0264 \cdot 1,67}{53,8} \right) \frac{0,822}{298} \approx 0,000226.$$

W ostatnim obliczeniu musieliśmy dwa razy przerzucać wysuwkę raz z lewej strony na prawą, drugi raz — z prawej na lewą. Można tego uniknąć zmieniając kolejność czynników np. w liczniku, tj. rachując

$$\frac{0,0264 \cdot 1,67 \cdot 0,822}{53,8 \cdot 298} = \left( \frac{0,0264 \cdot 0,822}{53,8} \right) \frac{1,67}{298} \approx 0,000226.$$



Schematy 44 i 45 pozwalające za jednym nastawieniem suwaka odczytać przybliżone wyniki działań  $c_6 b_4 d_5$  i  $c_6/b_5 d_4$  otrzymaliśmy z podstawowego schematu 43 do odczytywania wyniku działania  $c_6 d_5/b_5$  przez odczytywanie odpowiednich czynników na skali odwrotności za-



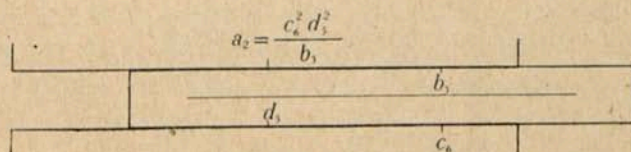
Rys. 46

miast na skali podstawowej. Nowe możliwości rachunkowe uzyskamy wykorzystując także inne skale suwaka. Tak np. wprowadzając do rachunku skale kwadratowe możemy obliczyć na suwaku następujące przybliżone wartości:

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{\sqrt{c_2 d_5}}{b_5}, & a_6 &= \frac{c_6 d_5}{\sqrt{b_3}}, \\ a_6 &= \frac{\sqrt{c_2 d_3}}{b_5}, & a_6 &= \sqrt{\frac{c_2}{b_3} d_5}, \\ a_6 &= \sqrt{\frac{c_2 d_3}{b_3}}, & a_2 &= \frac{c_6^2 d_3}{b_3}, \\ a_2 &= \frac{c_2 d_3}{b_5^2}, & a_2 &= \frac{c_6^2 d_5^2}{b_3}, \\ a_2 &= \frac{c_6^2 d_3}{b_5^2}, & a_2 &= \frac{c_6^2 d_5^2}{b_3^2}, \end{aligned}$$

gdzie — jak poprzednio — indeksy przy poszczególnych wielkościach wskazują skalę, na której dane wielkości należy nastawiać lub odczytywać. Tak np. wartość  $a_6 = \sqrt{\frac{c_2}{b_3} d_5}$  odczytujemy na suwaku według schematu na rysunku 46, a wartość  $a_2 = c_6^2 d_5^2/b_3$  według schematu na rysunku 47.

Jeżeli liczby  $b, c, d$ , na których chcemy wykonać któreś z wypisanych powyżej działań, wykraczają poza przedziały uwzględnione na odpo-



Rys. 47



wiednich skalach suwaka, to nastawiamy na suwaku ich wartości zredukowane  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  i odczytujemy zredukowaną wartość szukanego wyrażenia. Musimy przy tym pamiętać, że skale kwadratowe obejmują przedziały  $1 \leq x \leq 100$  i przy sprowadzeniu dowolnej liczby do tego przedziału wolno nam przesuwac przecinek tylko o parzystą liczbę miejsc w prawo lub w lewo. Tak więc jeżeli  $N(a)$  jest liczbą nieparzystą, to  $N(a')=1$  i zredukowaną liczbę  $a'$  należy nastawić w pierwszej połowie skali kwadratowej ( $1 \leq a < 10$ ). Jeżeli natomiast  $N(a)$  jest liczbą parzystą, to  $N(a')=2$  i zredukowaną liczbę  $a'$  należy nastawić w drugiej połowie skali kwadratowej ( $10 \leq a < 100$ ). Położenie przecinka w odczytanym na suwaku wyniku najłatwiej jest określić przez prowizoryczne obliczenie w pamięci. Można także wyprowadzać odpowiednie wzory na ilość cyfr znaczących przed przecinkiem w poszukiwanym wyniku. Nie będziemy się tutaj szczegółowo zatrzymywać nad tym zagadnieniem i obliczymy tylko dla przykładu następujące przybliżenia

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{147 \cdot 0,631}}{20,9} &\approx 0,366, & \frac{\sqrt{0,475 \cdot 0,095}}{18,6} &\approx 0,0114, \\ \sqrt{\frac{452 \cdot 8,27}{63,4}} &\approx 7,67, & \frac{2,62 \cdot 0,00991}{16,9^2} &\approx 0,000091, \\ \frac{48,9^2 \cdot 3,01}{715^2} &\approx 0,0141, & \left( \frac{10,7 \cdot 2,32}{0,616} \right)^2 &\approx 162. \end{aligned}$$

W drugim, trzecim i szóstym spośród powyższych przykładów musieliśmy przy obliczeniu przerzucać wysuwkę suwaka. W przykładzie trzecim możemy tego uniknąć, jeśli na stałej skali kwadratowej nastawimy niewłaściwie liczbę 452 w drugiej części tej skali, a pod nią na skali ruchomej ustawimy niewłaściwie liczbę 63,4 na pierwszej części skali. Każde z tych nastawień wprowadza do rachunku niepotrzebny czynnik  $\sqrt{10}$ , ale ponieważ wprowadziliśmy go dwukrotnie, więc nie zmienia się przez to cyfry znaczące wyniku.

Użycie pozostałych skal wierzchniej strony suwaka pozwala odczytywać na nim przybliżone wartości innych jeszcze wyrażeń. Rezygnując z wyliczenia wszystkich możliwości ograniczymy się tutaj do kilku najciekawszych przykładów. Za pomocą skali sześciannów możemy np. odczytać za jednym nastawieniem suwaka przybliżone wartości

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{\sqrt[3]{c_1 d_5}}{b_5}, & a_6 &= \frac{\sqrt[3]{c_1 d_5}}{\sqrt[3]{b_3}}, \\ a_1 &= \left( \frac{c_6 d_5}{\sqrt[3]{b_3}} \right)^3, & a_2 &= \frac{\sqrt[3]{c_1^2 d_5^2}}{b_5}. \end{aligned}$$



Mamy np.

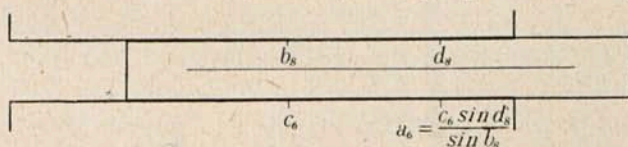
$$\frac{\sqrt[3]{4,71 \cdot 0,0814}}{36,8} \approx 0,00371, \quad \left( \frac{18,7 \cdot 3,38}{932} \right)^3 \approx 8,4.$$

Użycie skali logarytmów daje także możliwości obliczania nowych wyrażeń. Są to jednak wyrażenia rzadziej spotykane w praktyce rachunkowej i omawiać ich nie będziemy.

Pokażemy jeszcze jeden przykład wykorzystania do rachunku skal trygonometrycznych na odwrotnej stronie wysuwki. Przelóżmy w tym celu wysuwkę odwrotną stroną na wierzch. Możemy wtedy np. obliczać na suwaku przybliżone wartości

$$\begin{aligned} a_6 &= b_6 \sin c_8, & a_6 &= b_6 \operatorname{tg} c_{10}, & c_8 &= \operatorname{arc} \sin \frac{a_6}{b_6}, \\ c_{10} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_6}{b_6}, & a_6 &= \frac{c_6 \sin d_8}{\sin b_8}, & a_6 &= \frac{\sqrt{c_2 \operatorname{tg} d_{10}}}{\operatorname{tg} b_8}, \\ a_2 &= \frac{c_2 \sin^2 d_8}{\operatorname{tg}^2 b_{10}}, & a_1 &= \left( \frac{c_2 \sin^2 d_8}{\sin b_8} \right)^3, \end{aligned}$$

i wiele innych. Pierwsze cztery wzory służą np. do rozwiązywania trój-



Rys. 48

kąta prostokątnego. Dla przykładu podamy jedynie schemat obliczenia przybliżonej wartości  $a_6 = \frac{c_6 \sin d_8}{\sin b_8}$  (rys. 48). Odczytajmy np. przybliżenia

$$\begin{aligned} \frac{62,7 \sin 23^\circ 20'}{\operatorname{tg} 41^\circ 15'} &\approx 28,3, & \frac{\sqrt[3]{0,168 \operatorname{tg} 4^\circ 12'}}{\operatorname{tg} 33^\circ 30'} &\approx 0,0498, \\ \operatorname{arc} \sin \frac{2,96 \sin 24^\circ 40'}{1,59} &\approx 41^\circ. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie obliczaliśmy według schematu, w którym dane były  $a_6 = 1,59$ ,  $d_8 = 24^\circ 40'$ ,  $c_6 = 2,96$ , a odczytaliśmy poszukiwaną wartość  $b_8$ . Schemat 48 może więc służyć do rozwiązywania trójkątów według znanego z trygonometrii wzoru sinusów. Gdy nastawimy na skali sinusów kąt  $a$  nad liczbą  $a$  na skali podstawowej, to odpowiadające sobie przy takim nastawieniu suwaka wartości  $\beta$ ,  $b$ ,  $\gamma$ ,  $c$  itd. związane są proporcją

$$\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \dots$$



Niech np. dane będą dwa boki trójkąta  $a=92,5$  m,  $b=67,2$  m i kąt  $\alpha=46^{\circ}20'$  leżący naprzeciw boku  $a$ . Szukamy pozostałych elementów tego trójkąta.

Ustawiamy wysuwkę tak, aby punkt o kocie  $\alpha=46^{\circ}20'$  na skali sinusów leżał nad punktem o kocie  $\alpha'=9,25$  na skali podstawowej. Nad punktem o kocie  $b'=6,72$  odcytujemy  $\beta \approx 31^{\circ}45'$ . Z warunku  $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$  znajdujemy trzeci kąt trójkąta  $\gamma \approx 101^{\circ}55'$ . Ponieważ  $\sin 101^{\circ}55' = \sin 78^{\circ}05'$ , więc zredukowaną wartość  $c'$  odczytamy na skali podstawowej pod punktem o kocie  $78^{\circ}05'$  na skali sinusów (należy w tym celu przerzucić wysuwkę ze strony prawej na lewą). Mamy  $c' \approx 1,25$  i, jak łatwo sprawdzić prowizorycznym rachunkiem w pamięci,  $c \approx 125$  m.

**§ 79. Stałe suwaka logarytmicznego.** Omówiliśmy pokrótce najważniejsze działania, jakie można wykonać na suwaku logarytmicznym. W specjalnych pracach poświęconych suwakowi czytelnik może znaleźć jeszcze wiele innych zastosowań, np. rozwiązywanie na suwaku równań drugiego i trzeciego stopnia, rozwiązywanie trójkąta prostokątnego według twierdzenia Pitagorasa i inne. Nie będziemy się tutaj zajmowali tymi metodami i omówimy tylko znaczenie specjalnych stałych, które są oznaczone na skalach suwaka. Są to następujące stałe:

$\pi \approx 3,142$  — stosunek obwodu koła do średnicy. Stała ta jest oznaczona na skalach podstawowych, kwadratowych i na skali odwrotności,

$$M = \frac{100}{\pi} \approx 31,83 \text{ — stała oznaczona na skalach kwadratowych,}$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 1,128 \text{ — stała oznaczona na skali podstawowej oraz na}$$

okienku (odstęp między kreskami okienka jest równy  $\mu \log C$ , gdzie  $\mu$  jest modulem skali podstawowej),

$$C_1 = \sqrt{10} C = 2 \sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 3,568 \text{ — stała oznaczona na skali podstawowej,}$$

$$\varrho' = \frac{180 \cdot 60}{\pi} \cdot 10^{-3} \approx 3,438 \text{ — ilość minut w jednym radianie zredu-}$$

kowana do liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem. Stała ta jest oznaczona na skalach podstawowych,

$$\varrho'' = \frac{180 \cdot 60^2}{\pi} \cdot 10^{-5} \approx 2,062 \text{ — ilość sekund w jednym radianie zre-}$$

dukowana do liczby z jedną cyfrą znaczącą przed przecinkiem. Stała ta jest oznaczona na skalach podstawowych.



Znaczenia stałych  $\pi$  i  $M$  omawiać tutaj chyba nie trzeba. Stałą  $C$  posługujemy się przy obliczaniu pola  $P$  koła, gdy dana jest średnica  $d$ , lub przy obliczaniu średnicy, gdy dane jest pole. Mamy

$$P = \frac{\pi}{4} d^2 = \left( \frac{d}{C} \right)^2.$$

Dla obliczenia pola  $P$  należy więc na skalach podstawowych podzielić  $d$  przez  $C$  i odczytać kwadrat ilorazu na skali kwadratowej. Jeszcze wygodniej jest posłużyć się w tym celu liniami okienka. Jeżeli środkową linię okienka nastawimy na średnicę koła  $d$  na skali podstawowej, to lewa linia wskaże na skali kwadratowej pole  $P$ . Odwracając to postępowanie możemy bez przesuwania wysuwki (operując tylko okienkiem) odczytać średnicę  $d$  koła o danym polu  $P$ . Aby postępowanie to zawsze było wykonalne, skale podstawowe i kwadratowe suwaka (a także często skala odwrotności, na której możemy odczytywać odwrotności średnicy) są w obie strony przedłużone o potrzebny odcinek. W ten sposób możemy np. bez przesuwania wysuwki odczytać na suwaku, że koło o średnicy  $d = 2,57$  cm ma pole  $P \approx 5,2$  cm<sup>2</sup>, a koło o polu  $P = 96$  m<sup>2</sup> ma średnicę  $d \approx 11,05$  m. Otrzymane tak pole koła lub jego średnicę można bez odczytywania użyć do dalszych obliczeń na suwaku.

Stałą  $C_1$  używamy zamiast stałej  $C$  do obliczenia średnicy, gdy w wyniku poprzednich obliczeń mamy już pole koła  $P$  nastawione na skali kwadratowej niewłaściwie w nieodpowiedniej połowie skali kwadratowej lub gdy obliczając pole koła chcemy mieć je niewłaściwie nastawione na skali kwadratowej. Pozwala to w pewnych przypadkach uniknąć zbędnego przerzucania wysuwki.

Stałe  $\varrho'$  i  $\varrho''$  służą do przeliczania kątów wyrażonych w minutach i sekundach na miarę łukową i na odwrót — do przeliczania kątów w mierze łukowej na minuty i sekundy.

Tak więc gdy mamy na przykład wyrazić w sekundach kąt  $\varphi = 0,000609$ , to obliczamy

$$0,000609 \cdot \varrho'' \cdot 10^5 \approx 125,5'' = 2' 5,5''.$$

Podobnie gdy chcemy obliczyć  $\sin 28'$ , to przyjmujemy

$$\sin 28' \approx \frac{28}{\varrho'} \cdot 10^{-3} \approx 0,00815.$$

Kąt  $28'$  nie jest już uwzględniony na skalach trygonometrycznych suwaka.

Inne typy suwaków logarytmicznych, a także suwaki specjalne mają często zaznaczone na skalach także inne stałe np.  $e$ ,  $\log e$ , stałe techniczne lub fizyczne.



**§ 80. Dokładność suwaka logarytmicznego.** Płaski suwak logarytmiczny. Wykonując obliczenia na suwaku używaliśmy zawsze symbolu przybliżonej równości nie zastanawiając się jednak dotychczas nad dokładnością uzyskiwanych przybliżeń. Przypuśćmy, że błąd ustawienia punktu o danej kocie  $x$  na skali suwaka jest  $\Delta\xi = 0,1$  mm. Błędowi temu odpowiada błąd koty

$$\Delta x \approx \frac{\Delta\xi}{\mu f'(x)} = \frac{0,1 \text{ mm}}{\mu f'(x)}.$$

Dla normalnego suwaka ( $\mu = 250$  mm) i skali podstawowej ( $f(x) = \log x$ ) mamy

$$\Delta x \approx \frac{0,1 \text{ mm}}{250 \text{ mm} \cdot \log e \cdot \frac{1}{x}} \approx 0,00092 x.$$

Zatem błąd względny odczytu koty  $x$  na skali podstawowej jest

$$\varepsilon x \approx \frac{\Delta x}{x} \approx 0,00092.$$

Pojedynczy odczyt na skali podstawowej daje więc trzy miejsca dokładne. Odczyty na skalach kwadratów i sześciatów są odpowiednio dwa i trzy razy mniej dokładne.

Mnożenie i dzielenie na suwaku polega na dodawaniu i odejmowaniu odcinków. Błędy w nastawieniu czynników dodają się i dochodzi do nich jeszcze błąd odczytu wyniku. Maksymalny błąd wyniku iloczynu lub ilorazu przyjmujemy zatem trzykrotnie większy od błędu pojedynczego odczytu

$$\varepsilon(x_1 x_2) = \varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 0,00276.$$

Tak obliczony błąd jest błędem maksymalnym. Na to, by istotnie błąd wyniku osiągnął taką wartość, musimy w każdym z trzech nastawień uczynić maksymalny błąd i to w zgodnym kierunku. Taki przypadek jest oczywiście bardzo mało prawdopodobny.

Przyjęty przez nas błąd  $\Delta\xi = 0,1$  mm współrzędnej  $\xi$  nie daje absolutnej gwarancji, ale tylko praktyczną pewność (tj. dostatecznie duże prawdopodobieństwo), że realny błąd tej współrzędnej nie przekroczy  $\Delta\xi$ . Jak widzieliśmy w rozdziale I, suma trzech realnych błędów współrzędnych (przy założeniu, że są niezależne i mają rozkład normalny) z tak samo dużym prawdopodobieństwem, tj. z praktyczną pewnością, nie przekroczy wielkości

$$\sqrt{3} \Delta\xi \approx 0,173 \text{ mm}.$$



Tę wielkość możemy przyjąć jako błąd bezwzględny współrzędnej odczytanego na suwaku iloczynu lub ilorazu. Jako błąd względny tego wyniku możemy więc przyjąć

$$\varepsilon(x_1 x_2) = \varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \sqrt{3} \varepsilon(x) \approx 0,0016.$$

Podobnie jeżeli obliczamy na suwaku iloczyn lub iloraz większej liczby czynników posługując się tylko skalami podstawowymi (lub skalą odwrotności, która ma oczywiście taką samą dokładność), to błąd względny wyniku jest równy  $\sqrt{n} \cdot \varepsilon(x)$ , gdzie  $\varepsilon(x)$  — jak poprzednio — oznacza błąd względny pojedynczego odczytu, a  $n$  — ilość nastawień i odczytów podczas wykonywania obliczenia (przerzucanie wysuwki trzeba tu oczywiście liczyć jako jedno nastawienie).

Uwzględniając moduły poszczególnych skal możemy w podobny sposób obliczać błędy działań wykonywanych na różnych skalach suwaka.

Mówiąc o błędach odczytu skal suwaka przyjęliśmy na początku, że  $\Delta\xi = 0,1$  mm. Wielkość ta nie jest wcale stałą absolutną i może mieć tylko znaczenie orientacyjne. Zależy ona od dokładności wykonania skal suwaka i od wprawy rachującego. Każdy, kto dużo liczy na suwaku, powinien dla siebie i swego suwaka wyznaczyć dokładnie błąd  $\Delta\xi$ . Można to zrobić przez wykonanie na suwaku serii kontrolnych działań i porównanie uzyskanych wyników z dokładnymi.

Zwiększenie dokładności suwaka można uzyskać przez zwiększenie modułów skal. Najprościej by było wydłużyć odpowiednio cały suwak. Musimy się jednak liczyć z trudnościami technicznymi konstrukcji i eksploatacji długiego suwaka. Toteż w praktyce bardzo rzadko spotyka się suwaki dłuższe niż 25 cm. Jest jednak pewien sposób znacznego powiększenia modułu skali bez zwiększenia wymiarów suwaka, a nawet przy znacznym uproszczeniu jego konstrukcji. Sposób ten polega na pocięciu skali logarytmicznej na odpowiednią ilość części, które ułożymy równolegle na płaszczyźnie. W ten sposób na niedużym arkuszu papieru możemy zmieścić skalę o długości kilku, a nawet kilkudziesięciu metrów. Dodawanie odcinków będące zasadą działań wykonywanych na zwykłym suwaku trzeba teraz zastąpić dodawaniem wektorów na płaszczyźnie. Na końcu książki załączony jest najprostszy suwak tego typu. Składa się on ze skali logarytmicznej o module  $\mu = 11,2$  m i przezroczystej kalki, za pomocą której będziemy dodawali wektory. Suwak ten pozwala wykonywać mnożenie i dzielenie z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych.

Wartość iloczynu  $a = bc$  (dla prostoty założmy, że  $1 \leq b < 10$  i  $1 \leq c < 10$ ) odczytujemy na tym suwaku w sposób następujący:



1° Znajdujemy na skali punkt o kocie  $b$  i nakładamy kalkę tak, by punkt I kalki pokrył się ze znalezionym punktem skali, a dwie linie na kalce były równoległe z odcinkami skali.

2° Zaznaczamy na kalce ołówkiem położenie końca skali (tj. punktu o kocie 10).

3° Przesuwamy równoległe kalkę tak, by zaznaczony punkt na kalce pokrył się z punktem skali o kocie  $c$ .

4° Odczytujemy na skali kątę  $a'$  punktu leżącego pod tym spośród czterech punktów I, II, III, IV kalki, który znajduje się w granicach skali. Liczba  $a'$  jest zredukowaną do jednej cyfry znaczącej przed przecinkiem wartością iloczynu  $bc$ .

Uzasadnienie opisanego postępowania pozostawiamy czytelnikowi. Liczby wykraczające poza zakres skali (1,10) mnożymy uwzględniając tylko ich zredukowane wartości i odpowiednio umieszczając przecinek w uzyskanym wyniku.

Wartość ilorazu  $a = b/c$  odczytujemy w sposób następujący:

1° Nakładamy kalkę tak, by punkt I pokrył się z jedynką skali, a punkt IV — z dziesiątką skali.

2° Zaznaczamy na kalce ołówkiem położenie punktu o kocie  $c$ .

3° Przesuwamy równoległe kalkę tak, by zaznaczony punkt na kalce pokrył się z punktem skali o kocie  $b$ .

4° Odczytujemy na skali kątę  $a'$  punktu leżącego pod tym spośród czterech punktów I, II, III, IV kalki, który znajduje się w granicach skali. Liczba  $a'$  jest zredukowaną wartością ilorazu  $b/c$ .

W podobny sposób można oczywiście narysować inne skale suwaka. Umożliwiłoby to wykonywanie z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych także i innych działań możliwych do wykonania na zwyczajnym suwaku.