

Postępując dalej analogicznie uzyskujemy układy równań o coraz to mniejszej liczbie równań i niewiadomych, aż dochodzimy wreszcie do jednego tylko równania z jedną niewiadomą x_n

$$k_{nn}x_n + k_{n,n+1} = 0.$$

Biorąc z każdego z układów (25), (26), (28), (30) i następnych tylko pierwsze równania, podzielone stronami przez pierwszy ze współczynników w każdym równaniu, otrzymujemy układ

$$(32) \quad \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} &= 0, \\ x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}x_3 + \dots + \frac{b_{2n}}{b_{22}}x_n + \frac{b_{2,n+1}}{b_{22}} &= 0, \\ x_3 + \dots + \frac{c_{3n}}{c_{33}}x_n + \frac{c_{3,n+1}}{c_{33}} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n + \frac{k_{n,n+1}}{k_{nn}} &= 0, \end{aligned}$$

z którego już można z łatwością obliczyć kolejno niewiadome x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 .

Metoda schematyczna polega właśnie na konstrukcji układu (32) na podstawie układu (25) według dogodnego schematu. Mianowicie współczynniki układu (32) z zachowaniem ich kolejności figurują powyżej głównej przekątnej w tablicy

$$(33) \quad \begin{array}{cccccccc} A_{11} = a_{11} & A_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}} & A_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}} & A_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}} & \dots A_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}} & A_{1,n+1} = \frac{a_{1,n+1}}{a_{11}} \\ A_{21} = a_{21} & A_{22} = b_{22} & A_{23} = \frac{b_{23}}{b_{22}} & A_{24} = \frac{b_{24}}{b_{22}} & \dots A_{2n} = \frac{b_{2n}}{b_{22}} & A_{2,n+1} = \frac{b_{2,n+1}}{b_{22}} \\ A_{31} = a_{31} & A_{32} = b_{32} & A_{33} = c_{33} & A_{34} = \frac{c_{34}}{c_{33}} & \dots A_{3n} = \frac{c_{3n}}{c_{33}} & A_{3,n+1} = \frac{c_{3,n+1}}{c_{33}} \\ A_{41} = a_{41} & A_{42} = b_{42} & A_{43} = c_{43} & A_{44} = d_{44} & \dots A_{4n} = \frac{d_{4n}}{d_{44}} & A_{4,n+1} = \frac{d_{4,n+1}}{d_{44}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} = a_{n1} & A_{n2} = b_{n2} & A_{n3} = c_{n3} & A_{n4} = d_{n4} & \dots A_{nn} = k_{nn} & A_{n,n+1} = \frac{k_{n,n+1}}{k_{nn}}, \end{array}$$

której elementy dają się łatwo kolejno obliczać. Mianowicie elementy pierwszej kolumny tej tabeli są identyczne z elementami stojącymi w pierwszej kolumnie w tabeli współczynników układu (25), pozostałe elementy

pierwszego wiersza otrzymujemy dzieląc odpowiadające im elementy tabeli współczynników układu (25) przez a_{11} , wreszcie wszystkie pozostałe elementy obliczamy ze wzoru rekurencyjnego

$$(34) \quad A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum_{v=1}^{j-1} A_{iv} A_{vj} & \text{dla } i \geq j, \\ \frac{a_{ij} - \sum_{v=1}^{i-1} A_{iv} A_{vj}}{A_{ii}} & \text{dla } i < j. \end{cases}$$

Istotnie dla $j=2$ oraz $i=2, 3, \dots, n$ mamy ze wzoru (27)

$$b_{i2} = a_{i2} - a_{i1} \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \text{czyli} \quad A_{i2} = a_{i2} - A_{i1} A_{12}$$

zgodnie z (34).

Dla $i=2$ oraz $j=3, 4, \dots, n+1$ mamy ze wzoru (27)

$$b_{2j} = a_{2j} - a_{21} \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad \text{czyli} \quad A_{2j} = \frac{a_{2j} - A_{21} A_{1j}}{A_{22}}$$

zgodnie z (34).

Dla $j=3$ oraz $i=3, 4, \dots, n$ mamy na mocy (29)

$$c_{i3} = a_{i3} - a_{i1} \frac{a_{13}}{a_{11}} - b_{i2} \frac{b_{23}}{b_{22}}, \quad \text{czyli} \quad A_{i3} = a_{i3} - A_{i1} A_{13} - A_{i2} A_{23}$$

znowu zgodnie z (34).

Można ogólnie udowodnić metodą indukcji zupełnej prawdziwość wzoru (34). Dowód pomijamy.

Rozwiązanie układu równań (25) metodą schematyczną polega na:

1° Skonstruowaniu tabeli (33) przez: a) wypisanie pierwszej kolumny jako kolumny współczynników przy x_1 w układzie (25), b) wypisanie pozostałych elementów pierwszego wiersza według wzoru $A_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ ($j=2, 3, \dots, n+1$), c) wypisanie kolejno pozostałych elementów posługując się wzorem rekurencyjnym (34).

2° Wypisaniu układu równań (32), których współczynniki (poza pierwszymi równymi 1) z zachowaniem ich porządku figurują w tabeli (33) ponad główną przekątną. (Przy odpowiednim zapisie tabeli można tego układu nie wypisywać osobno, por. przykład 3).

3° Obliczeniu kolejno niewiadomych x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 z układu (32).

PRZYKŁAD 3. Rozwiążemy metodą schematyczną układ równań (8) z przykładu 2. Nie będziemy tu jednak przeprowadzać dyskusji błędów, co można zrobić analogicznie, jak w przykładzie 2.

Konstruujemy stopniowo tabelę (33). Oto poszczególne fazy powstawania tej tabeli:

1)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043				
2)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965	2,2602615	3,2250358	-0,6599805
3)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615	3,2250358	-0,6599805
4)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615 2,3561945	3,2250358 4,2831390	-0,6599805 0,3367245
5)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615 2,3561945 0,1325609 0,3227582	3,2250358 4,2831390	-0,6599805 0,3367245
6)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615 2,3561945 0,1325609 0,3227582	3,2250358 4,2831390 3,1415832	-0,6599805 0,3367245 0,1135018
7)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615 2,3561945 0,1325609 0,3227582	3,2250358 4,2831390 3,1415832 0,0171405	-0,6599805 0,3367245 0,1135018
8)	5,5268756 8,0662519 9,5928474 10,6081043	1,5707965 0,9307291 1,8124720 2,5535056	2,2602615 2,3561945 0,1325609 0,3227582	3,2250358 4,2831390 3,1415832 0,0171405	-0,6599805 0,3367245 0,1135018 -0,0285495

Przy obliczaniu wyrazów tabeli wygodnie jest posłużyć się następującą regułą „pozycyjną”, wynikającą ze wzorów (34):

Aby obliczyć liczbę, stojącą w tej tabeli w i -tym wierszu i j -tej kolumnie, należy od liczby, która stoi na tym samym miejscu w macierzy współczynników danego układu równań (z wyrazami wolnymi przeniesionymi na lewą stronę znaku równości), odjąć iloczyn obliczonych już wyrazów tabeli z tegoż i -tego wiersza i tejże j -tej kolumny, z tym, że pierwszy wyraz i -tego wiersza mnożymy przez pierwszy wyraz j -tej kolumny, drugi wyraz wiersza przez drugi wyraz kolumny itd., aż zabrak-

nie obliczonych wyrazów w wierszu lub kolumnie. Ponadto, jeśli obliczamy liczbę stojącą w tabeli powyżej głównej przekątnej, to trzeba jeszcze otrzymany wynik podzielić przez wyraz tabeli leżący w tymże i -tym wierszu na głównej przekątnej. Obliczmy dla przykładu wyraz leżący w trzecim wierszu i w piątej kolumnie w tabeli 6). Ponieważ w macierzy współczynników rozwiązywanego układu równań, w którym wyrazy wolne przeniesiono na lewą stronę znaku równości, w trzecim wierszu i w piątej kolumnie figuruje liczba $-5,7057426$, więc odejmujemy od niej iloczyn obliczonych już wyrazów z trzeciego wiersza i piątej kolumny. Mamy

$$\begin{aligned} -5,7057426 - 9,5928474 \cdot (-0,6599805) - 1,8124720 \cdot 0,3367245 \approx \\ \approx 0,0150459. \end{aligned}$$

Liczbę tę dzielimy jeszcze przez wyraz leżący w trzecim wierszu na głównej przekątnej, tzn. przez $0,1325609$, ponieważ wyraz szukany leży powyżej głównej przekątnej. Otrzymujemy ostatecznie $0,1135018$.

Na podstawie tabeli 8) wypisujemy układ (32):

$$\begin{aligned} a_1 + 1,57080 a_2 + 2,26026 a_3 + 3,22504 a_4 - 0,65998 &= 0, \\ a_2 + 2,35619 a_3 + 4,28314 a_4 + 0,33672 &= 0, \\ a_3 + 3,14158 a_4 + 0,11350 &= 0, \\ a_4 - 0,02855 &= 0. \end{aligned}$$

Obliczamy stąd kolejno

$$a_4 \approx 0,02855, \quad a_3 \approx -0,20319, \quad a_2 \approx 0,01975, \quad a_1 \approx 0,99614.$$

Wygodnie jest przy zapisie równań układu (25) umieścić symbole niewiadomych x_1, x_2, \dots, x_n w nagłówkach kolumn, a układ zapisać tylko tabelą współczynników. Wtedy można nie zapisywać oddzielnie układu (32), gdyż będzie on już zapisany ponad główną przekątną tabeli (33), której elementy umieszczamy bezpośrednio pod danym układem równań (25). Obliczane kolejno niewiadome piszemy pod tabelą (33), a w kolumnie wyrazów wolnych piszemy dla symetrii w nagłówku i w wierszu, w którym wstawiamy obliczane kolejno wartości niewiadomych, liczbę 1. Sposób wypełniania tabeli (33) wynika ze wzorów (34), a ostatni wiersz wypełniamy rozwiązując układ (32) zapisany nad główną przekątną w tabeli (33).

Łatwo zauważyć, że na mocy (32) obliczymy niewiadomą x_i , gdy znane są już wartości x_{i+1}, \dots, x_n , sumując iloczyny odpowiadających sobie wyrazów wierszy i -tego i ostatniego i zmieniając w wyniku znak na przeciwny. W ostatnim przykładzie np. obliczono x_2 ze znanych już wartości x_3 i x_4 sumując iloczyny

$$2,3561945 \cdot (-0,20319) + 4,2831390 \cdot 0,02855 + 0,3367245 \cdot 1 \approx -0,01975$$

i zmieniając w wyniku znak na przeciwny.

Rozwiązanie zadania z przykładu 3 może być w ten sposób następująco zapisane:

a_1	a_2	a_3	a_4	1
5,5268756	8,6815968	12,4921844	17,8243719	-3,6476303
8,0662519	13,6011694	20,4248174	30,0003933	-5,0101697
9,5928474	16,8808831	26,0854411	39,1167969	-5,7057426
10,6081043	19,2166787	30,3164038	46,1796478	-6,1051698
5,5268756	1,5707965	2,2602615	3,2250358	-0,6599805
8,0662519	0,9307291	2,3561945	4,2831390	0,3367245
9,5928474	1,8124720	0,1325609	3,1415832	0,1135018
10,6081043	2,5535056	0,3227582	0,0171405	-0,0285495
0,99614	0,01975	-0,20319	0,02855	1

Metodę schematyczną można uprościć, gdy układ równań (25) jest symetryczny, tzn. gdy $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Jak wynika ze wzorów (27), (29), (31) jest wtedy $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$, $d_{ij} = d_{ji}$ itd., co ułatwia w dużym stopniu obliczanie współczynników tabeli (33). Elementy bowiem tej tabeli leżące ponad główną przekątną oblicza się z elementów leżących poniżej przekątnej, dzieląc je przez odpowiednie elementy leżące na przekątnej tabeli. W tym celu elementy tabeli (33) w przypadku układu symetrycznego wygodniej jest układać podług następującego schematu:

A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{41}	...	A_{n1}
1	A_{12}	A_{13}	A_{14}	...	A_{1n}
	A_{22}	A_{32}	A_{42}	...	A_{n2}
	1	A_{23}	A_{24}	...	A_{2n}
		A_{33}	A_{43}	...	A_{n3}
		1	A_{34}	...	A_{3n}
		
					A_{nn}
					1

Można to ująć inaczej: w przypadku symetrycznego układu równań wygodniej jest zamiast tabeli (33) konstruować tabelę

	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	...	B_{1n}	$B_{1,n+1}$
	-1	C_{12}	C_{13}	C_{14}	...	C_{1n}	$C_{1,n+1}$
(35)		B_{22}	B_{23}	B_{24}	...	B_{2n}	$B_{2,n+1}$
		-1	C_{23}	C_{24}	...	C_{2n}	$C_{2,n+1}$
			B_{33}	B_{34}	...	B_{3n}	$B_{3,n+1}$
			-1	C_{34}	...	C_{3n}	$C_{3,n+1}$
			
						B_{nn}	$B_{n,n+1}$
						-1	$C_{n,n+1}$

gdzie

$$(36) \quad B_{ij} = a_{ij} + \sum_{v=1}^{i-1} B_{vi} C_{vj} \quad (j=1, 2, \dots, n+1; \quad i=1, 2, \dots, j)$$

(symbol $\sum_{v=1}^0 B_{vi} C_{vj}$ uważamy tu za symbol liczby 0), oraz

$$(37) \quad C_{ij} = -\frac{B_{ij}}{B_{ii}} \quad (j=2, 3, \dots, n+1; \quad i=1, 2, \dots, j-1).$$

Wtedy

$$(38) \quad x_i = \sum_{v=i+1}^{n+1} C_{iv} x_v \quad (i=n, n-1, \dots, 1),$$

gdzie należy przyjąć $x_{n+1}=1$. Odpowiednio do tych zmian zmienia się reguła „pozycyjna” podana w przykładzie 3. Wynika ona w sposób oczywisty ze wzorów (36), (37) i (38).

PRZYKŁAD 4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 3,6534x_1 + 2,8315x_2 + 2,1033x_3 + 1,7769x_4 - 9,8901 &= 0, \\ 2,8315x_1 + 3,3372x_2 + 2,0013x_3 + 1,6440x_4 - 8,7637 &= 0, \\ 2,1033x_1 + 2,0013x_2 + 3,1515x_3 + 2,2131x_4 - 7,6512 &= 0, \\ 1,7769x_1 + 1,6440x_2 + 2,2131x_3 + 2,9873x_4 - 5,8321 &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ układ powyższy jest symetryczny, więc skonstruujemy tabelę (35), a następnie obliczymy pierwiastki układu ze wzorów (38). A oto prawidłowy zapis samego układu równań, tabeli (35) i otrzymanych pierwiastków układu:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
3,6534	2,8315 3,3372	2,1033 2,0013 3,1515	1,7769 1,6440 2,2131 2,9873	-9,8901 -8,7637 -7,6512 -5,8321
3,6534 -1	2,8315 -0,775031 1,142700 -1	2,1033 -0,575710 0,371177 -0,324825 1,820042 -1	1,7769 -0,486369 0,266846 -0,233522 1,103442 -0,606273 1,391769 -1	-9,8901 2,707095 -1,098561 0,961373 -1,600528 0,879391 0,205033 -0,147318
1,693167	0,681115	0,968706	-0,147318	1

Ostatecznie otrzymaliśmy następujące rozwiązanie:

Dyskusję błędów pomijamy.

Niech będzie teraz dany układ p równań z n niewiadomymi x_1, x_2, \dots, x_n

Zadanie nasze polega na znalezieniu wartości niewiadomych x_1, x_2, \dots, x_n , które by możliwie najlepiej w sensie metody najmniejszych kwadratów spełniały układ równań (39), tzn. takich wartości, dla których funkcja

otrzymujemy układ (40) w postaci (25), a wzór (41a) w postaci

$$(43) \quad \Phi_0 = \sum_{v=1}^p a_{v,n+1}^2 + a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \dots + a_{n,n+1}x_n.$$

Ale ze wzorów (36) mamy $a_{i,n+1} = B_{i,n+1} - \sum_{v=1}^{i-1} B_{vi} C_{v,n+1}$ ($i=1,2,\dots,n$).

Uwzględniając, że na mocy wzoru (37) jest $B_{vi} C_{vj} = B_{vj} C_{vi}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \dots + a_{n,n+1}x_n = \\ & = B_{1,n+1}x_1 + (B_{2,n+1} - B_{12}C_{1,n+1})x_2 + (B_{3,n+1} - B_{13}C_{1,n+1} - B_{23}C_{2,n+1})x_3 + \dots + \\ & \quad + (B_{n,n+1} - B_{1n}C_{1,n+1} - B_{2n}C_{2,n+1} - \dots - B_{n-1,n}C_{n-1,n+1})x_n = \\ & = B_{1,n+1}x_1 + (B_{2,n+1} - B_{1,n+1}C_{12})x_2 + (B_{3,n+1} - B_{1,n+1}C_{13} - B_{2,n+1}C_{23})x_3 + \dots + \\ & \quad + (B_{n,n+1} - B_{1,n+1}C_{1n} - B_{2,n+1}C_{2n} - \dots - B_{n-1,n+1}C_{n-1,n})x_n = \\ & = B_{1,n+1}(x_1 - C_{12}x_2 - C_{13}x_3 - \dots - C_{1n}x_n) + \\ & \quad + B_{2,n+1}(x_2 - C_{23}x_3 - \dots - C_{2n}x_n) + \dots + B_{n,n+1}x_n \end{aligned}$$

i na mocy (38)

$$a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \dots + a_{n,n+1}x_n = \sum_{v=1}^n B_{v,n+1} C_{v,n+1}.$$

Zatem wzór (43) przybiera postać

$$(44) \quad \Phi_0 = \sum_{v=1}^p a_{v,n+1}^2 + \sum_{v=1}^n B_{v,n+1} C_{v,n+1}.$$

Wprowadzimy oznaczenie

$$\Phi_0 = B_{n+1,n+1}.$$

Wtedy wzory (36) można na mocy (42) napisać łącznie z (44) w postaci

$$(45) \quad B_{ij} = \sum_{v=1}^p a_{vi} a_{vj} + \sum_{v=1}^{i-1} B_{vi} C_{vj} \quad (j=1,2,\dots,n+1; i=1,2,\dots,j),$$

a element $B_{n+1,n+1}$ dołączyć do tabeli (35) $\left(\sum_{v=1}^0 B_{v1} C_{vj} \text{ oznacza liczbę } 0 \right)$.

Wzory (45) pozwalają konstruować tabelę (35), a więc i rozwiązać układ równań (39) wraz z obliczeniem błędu średniego (41) z pominięciem układu równań normalnych (40) i to na podstawie bardzo wygodnego schematu. Błąd średni \mathfrak{B} obliczamy z ostatniego elementu $B_{n+1,n+1}$ tabeli (35) ze wzoru

$$(46) \quad \mathfrak{B} = \left[\frac{B_{n+1,n+1}}{p} \right]^{1/2},$$

gdzie p jest liczbą równań układu (39). Wzór (46) wynika ze wzoru (41).

Uwaga. Sposób powyższy można również stosować, gdy liczba p równań jest równa liczbie niewiadomych, tj. gdy $p=n$. Wtedy $B_{n+1,n+1}=0$ i można ten wyraz opuścić albo wykorzystać dla kontroli rachunków. Prościej jest jednak korzystać wtedy z poprzednich wariantów metody schematycznej.

PRZYKŁAD 5. Metodą najmniejszych kwadratów rozwiązać układ równań

$$3,153x_1 - 2,062x_2 + 5,404x_3 = 14,002,$$

$$2,710x_1 + 4,133x_2 - 4,125x_3 = -4,315,$$

$$3,888x_1 + 0,696x_2 + 0,287x_3 = 7,194,$$

$$3,001x_1 - 2,899x_2 - 1,725x_3 = 10,003,$$

$$5,454x_1 - 4,734x_2 - 1,910x_3 = 17,873.$$

Rozwiązanie uzyskujemy konstruując tabelę (35), której elementy obliczamy ze wzorów (45) i (37), a następnie korzystając ze wzorów (38). Błąd średni obliczamy ze wzoru (46). A oto prawidłowy zapis układu równań, tabeli (35) i obliczonych przybliżeń dla x_1, x_2, x_3 :

x_1	x_2	x_3	1
3,153	-2,062	5,404	-14,002
2,710	4,133	-4,125	4,315
3,888	0,696	0,287	-7,194
3,001	-2,899	-1,725	-10,003
5,454	-4,734	-1,910	-17,873
71,154170	-27,114143	-8,617947	-187,923273
-1	0,381062	0,121117	2,641072
	42,300736	-17,233190	83,698070
	-1	0,407397	-1,978643
		44,860405	-32,800544
		-1	0,731169
			0,022767
2,089153	-1,680767	0,731169	1

A zatem $x_1 \approx 2,089$, $x_2 \approx -1,681$, $x_3 \approx 0,731$. Błąd średni, z jakim te przybliżenia spełniają równania danego układu, jest

$$\mathfrak{B} = \left[\frac{0,022767}{5} \right]^{1/2} \approx 0,068.$$

Uwaga. Błąd średni \mathfrak{Z} obliczany ze wzoru (46) nie obejmuje błędów wynikających z przyjęcia na pierwiastki układu wartości przybliżonych ani też błędów wynikających z błędów współczynników danego układu równań. \mathfrak{Z} podaje jedynie, z jakim błędem średnim są spełnione równania układu, gdy funkcja (39a) osiąga minimum, jest więc pewną miarą sprzeczności danego układu równań.

§ 55. **Krakowiany.** *Krakowianami* nazywamy zbiory liczb, ustawionych w prostokąty, na których to zbiorach są zdefiniowane pewne działania. Dla odróżnienia od macierzy i wyznaczników ujmujemy krakowiany w klamry. Oto przykłady krakowianów:

$$\left\{ \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 2 & \pi \\ 0,3 & 4 \end{array} \right\}, \quad \{1,12 \ 6,32 \ -5,06 \ 1,09\}, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} -2 & 3,1 & -5 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 0,4 & 4,1 \end{array} \right\}.$$

Krakowiany A i B uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wszystkie elementy odpowiednio równe. Jeżeli np.

$$A = \left\{ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ e & f \end{array} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{array}{cc} g & h \\ j & k \\ m & n \end{array} \right\} \quad \text{i} \quad A=B,$$

to $a=g$, $b=h$, $c=j$, $d=k$, $e=m$ i $f=n$.

Mnożyć można tylko krakowiany o jednakowej liczbie wierszy. *Iloczynem* krakowianu

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\}$$

przez krakowian

$$B = \left\{ \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{array} \right\}$$

nazywamy taki krakowian

$$C = \left\{ \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{array} \right\},$$

w którym

$$c_{ij} = a_{1j} b_{1i} + a_{2j} b_{2i} + \dots + a_{mj} b_{mi} \quad (i=1,2,\dots,p; \ j=1,2,\dots,n).$$

Iloczyn krakowianu A przez krakowian B zapisujemy symbolicznie

$$A \cdot B = C \quad \text{lub} \quad AB = C.$$

Na przykład

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -7 \\ -18 & 11 & 33 \\ 1 & 2 & 38 \\ -34 & -13 & 61 \\ 23 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Oznaczamy literą τ każdy krakowian typu

$$(47) \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Krakowian (47) nazywać będziemy *jednostkowym*.

Łatwo sprawdzić, że dla każdego krakowianu A jest

$$(48) \quad A\tau = A,$$

natomiast

$$(49) \quad \tau A = A^*,$$

gdzie A^* jest krakowianem, jaki otrzymujemy zamieniając w krakowianie A jego wiersze z kolumnami. Mamy na przykład

$$\tau \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mnożenie krakowianów nie jest przemienne, tzn. iloczyn AB dwóch krakowianów A i B jest na ogół różny od iloczynu BA . Łatwo jednak wykazać, że

$$(50) \quad BA = \tau(AB) = (AB)^*.$$

Mnożenie krakowianów nie jest też łączne, tzn. iloczyn $A(BC)$ jest na ogół różny od iloczynu $(AB)C$. Łatwo wykazać prawdziwość wzorów

$$A(BC) = [A(\tau C)]B = (AC^*)B \quad \text{i} \quad (AB)C = A[C(\tau B)] = A(CB^*).$$

Iloczyn $(AB)C$ zapisujemy wprost jako ABC . Zgodnie z tą umową ostatnie dwa wzory przybierają postać

$$(51) \quad A(BC) = A(\tau C)B = AC^*B, \quad ABC = A[C(\tau B)] = A(CB^*).$$

Dużą rolę odgrywa w rachunku krakowianowym rozkład krakowianu na czynniki, będące krakowianami o specjalnej budowie. Element krakowianu różny od zera i taki, że wszystkie elementy leżące pod nim w tej samej kolumnie są równe zero, nazywamy *elementem oporowym*. Krakowian mający w każdym wierszu element oporowy nazywamy *elementarnym*. Krakowian, którego wszystkie elementy są równe zero, nazywamy *zerowym*. Można dowieść (dowód pomijamy), że *każdy krakowian niezerowy A jest rozkładalny na czynniki G i H, będące krakowianami elementarnymi*. Rozkład taki nie jest jednoznaczny, co nie ma większego znaczenia dla rachunku krakowianowego. Można jednak wykazać, że liczba wierszy w czynnikach elementarnych *G* i *H* jest stała i charakterystyczna dla danego krakowianu *A*. Nazywamy ją *rangą* krakowianu. Jeżeli np.

$$(52) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} \end{pmatrix} = GH,$$

gdzie

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} \end{pmatrix}$$

są krakowianami elementarnymi, to krakowian *A* jest rangi 3.

Krakowian, którego ranga jest równa liczbie kolumn, nazywamy *krakowianem pełnej rangi*.

Rozkładając krakowian *A* na czynniki elementarne przyjmujemy często z góry, iż elementy oporowe jednego z czynników elementarnych są równe 1, a pozostałe elementy obliczamy kolejno, mnożąc kolumny obu czynników i przyrównując do odpowiedniego elementu krakowianu *A*. Jeśli np. założymy we wzorze (52)

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$

to, mnożąc pierwszą kolumnę krakowianu *G* kolejno przez kolumny krakowianu *H*, otrzymujemy

$$g_{11} h_{1i} = h_{1i} = a_{i1} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

i mamy w ten sposób elementy pierwszego wiersza krakowianu *H*. Mnożymy teraz kolejno kolumny krakowianu *G* przez pierwszą kolumnę krakowianu *H*. Otrzymujemy

$$g_{1j} h_{11} = a_{1j} \quad (j=1, 2, 3).$$

Jeżeli $h_{11} \neq 0$, obliczamy stąd elementy pierwszego wiersza krakowianu G . Jeżeli $h_{11} = 0 = a_{1j}$, przyjmujemy wartości g_{1j} dowolnie, np. $g_{12} = g_{13} = 0$ ($g_{11} = 1$). Jeżeli $h_{11} = 0$, a co najmniej jeden z elementów a_{1j} jest różny od zera, musimy zmienić układ elementów oporowych w krakowianach G i H i próbować rozkładu od nowa. W myśl cytowanego już twierdzenia, jeżeli krakowian A nie jest zerowy, to istnieje taki układ elementów oporowych w czynnikach elementarnych, że rozkład jest możliwy.

Załóżmy zatem, że obliczyliśmy już elementy pierwszego wiersza krakowianów G i H . Mnożymy teraz drugą kolumnę krakowianu G kolejno przez kolumny krakowianu H i otrzymujemy

$$g_{12}h_{1i} + g_{22}h_{2i} = a_{i2},$$

czyli

$$g_{12}h_{1i} + h_{2i} = a_{i2} \quad (i=2,3,4),$$

skąd obliczamy h_{2i} itd.

Oto przykład rozkładu na czynniki elementarne:

$$(53) \quad \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 18 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Krakowian C nazywamy *ilorazem* krakowianów A i B i piszemy

$$(54) \quad C = A : B,$$

jeżeli

$$(54a) \quad C(\tau B) = A,$$

czyli na mocy (49)

$$(54b) \quad CB^* = A.$$

Dzielenie krakowianów nie zawsze jest wykonalne i może być wieloznaczne. Warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym wykonalności dzielenia (54) jest jednakowa liczba wierszy w krakowianach A i B . Iloraz C ma tyle kolumn, ile ich ma dzielna A i tyle wierszy, ile kolumn ma dzielnik B .

Iloraz $(A:B):C$ piszemy wprost $A:B:C$. Łatwo sprawdzić następujące wzory:

$$(55) \quad A:(BC) = A:(\tau C):B, \quad A:B:C = A:[C(\tau B)].$$

Spostrzegamy tu analogię ze wzorami (51). W przypadku wieloznaczności ilorazów równości (55) należy traktować jako równości mnogościowe między zbiorami wyników dzielenia.

Jeżeli krakowian B jest elementarny, obliczamy elementy ilorazu $C=A:B$ mnożąc kolejno kolumny krakowianów C i B^* , przyrównując do odpowiednich elementów krakowianu A i rozwiązując otrzymany w ten sposób układ równań. Jeżeli krakowian B nie jest elementarny, to rozkładamy go najpierw na czynniki elementarne, a następnie wykonujemy dzielenie według wzorów (55).

Obliczmy np. iloraz

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -17 & 47 \\ 6 & -23 \\ -28 & 107 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 1 & 8 & -6 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 18 & -11 \end{pmatrix}.$$

Według wzorów (55) mamy uwzględniając dokonany już rozkład (53) na czynniki elementarne

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -17 & 47 \\ 6 & -23 \\ -28 & 107 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obliczamy najpierw pierwszy iloraz

$$\begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -17 & 47 \\ 6 & -23 \\ -28 & 107 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}.$$

Na mocy (54b) jest

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -34 \\ -17 & 47 \\ 6 & -23 \\ -28 & 107 \end{pmatrix}.$$

Mnożąc tu kolejno kolumny krakowianów po lewej stronie znaku równości i przyrównując do odpowiednich elementów krakowianu po prawej stronie otrzymujemy równania

$$-2d_{11}=4, \quad -2d_{12}=-34, \quad d_{11}+5d_{21}=-17, \quad d_{12}+5d_{22}=47,$$

$$-d_{11}+2d_{31}=6, \quad -d_{12}+2d_{32}=-23, \quad 4d_{11}+6d_{21}-d_{31}=-28,$$

$$4d_{12}+6d_{22}-d_{32}=107,$$

z których kolejno dostajemy

$$d_{11}=-2, \quad d_{12}=17, \quad d_{21}=-3, \quad d_{22}=6, \quad d_{31}=2, \quad d_{32}=-3.$$

Wynikiem pierwszego dzielenia jest zatem krakowian

$$\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mamy teraz

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 17 \\ -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 17 \\ -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mnożąc kolejno kolumny krakowianów po lewej stronie znaku równości i przyrównując do odpowiednich elementów krakowianu po prawej stronie otrzymujemy równania

$$(56) \quad \begin{aligned} x_{11} + 3x_{21} - x_{31} &= -2, & x_{12} + 3x_{22} - x_{32} &= 17, \\ x_{21} - x_{31} &= -3, & x_{22} - x_{32} &= 6, & x_{31} &= 2, & x_{32} &= -3, \end{aligned}$$

z których otrzymujemy

$$x_{31} = 2, \quad x_{32} = -3, \quad x_{21} = -1, \quad x_{22} = 3, \quad x_{11} = 3, \quad x_{12} = 5.$$

Zatem

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

W praktyce dzielenie krakowianu przez krakowian elementarny wykonujemy bezpośrednio, nie przechodząc do postaci iloczynowej i nie wypisując równań na nieznane elementy ilorazu. Pisząc bowiem np. ostatnio obliczany iloraz w postaci

$$\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ -3 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

zauważamy, iż równania (56) można otrzymać wprost obliczając iloczyny wierszy dzielnika przez kolumny ilorazu i przyrównując do elementu dzielnej, który leży w tymże wierszu, co mnożony wiersz dzielnika i w kolumnie o tymże wskaźniku, co mnożona kolumna ilorazu. Kolejność tych mno-

żeń dobieramy tak, aby elementy ilorazu można było kolejno obliczać w pamięci i zapisywać. I tak, mnożąc w pamięci trzeci wiersz dzielnika przez pierwszą kolumnę ilorazu i przyrównując do 2, obliczamy, że $x_{31}=2$, co od razu zapisujemy. Analogicznie obliczamy i zapisujemy $x_{32}=-3$. Mnożąc teraz drugi wiersz dzielnika przez pierwszą kolumnę ilorazu, w której już zapisano $x_{31}=2$, i przyrównując do -3 , obliczamy z łatwością w pamięci $x_{21}=-1$ itd.

W przykładzie powyższym rachunki były tak proste, że można je było wykonywać w pamięci. W przypadkach trudniejszych wykonujemy rachunki na arytmometrze. Mnożenie kolumn przez kolumny czy wierszy przez kolumny na arytmometrze przebiega bardzo łatwo i nie wymaga pomocniczych zapisów.

Dzielenie przez krakowian można nieraz zastąpić mnożeniem przez odwrotność.

Odwrotnością krakowianu A będziemy nazywali taki krakowian A^{-1} , dla którego jest

$$(57) \quad A^{-1}A = \tau,$$

gdzie τ jest krakowianem jednostkowym.

Nie każdy krakowian ma odwrotność. Krakowian może mieć również niejedną odwrotność. Można udowodnić, że *odwrotność krakowianu A istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy A jest krakowianem pełnej rangi*. Można również udowodnić, że *gdy A jest krakowianem kwadratowym, tzn. mającym tyleż wierszy, co kolumn, to może mieć tylko jedną odwrotność*. Odwrotność A^{-1} krakowianu A obliczamy zazwyczaj ze wzoru (57), czyli

$$(58) \quad A^{-1} = \tau : (\tau A) = \tau : A^*.$$

Jeżeli A nie jest krakowianem elementarnym, wymaga to jednak uprzedniego rozkładu A na czynniki elementarne.

Krakowianem trójkątnym nazywamy krakowian kwadratowy, w którym po jednej stronie jednej z dwóch przekątnych wszystkie elementy są równe zeru. Oto przykłady krakowianów trójkątnych:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 8 & 9 & 1 \\ 7 & 7 & 8 & 3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{Bmatrix}.$$

Pierwiastkiem kwadratowym krakowianu A nazywamy taki krakowian trójkątny B , że

$$BB = A.$$

Będziemy pisali również $B^2 = A$.

Można udowodnić, że *krakowian kwadratowy, symetryczny* (tj. taki, w którym element leżący w i -tym wierszu i j -tej kolumnie jest równy elementowi leżącemu w j -tym wierszu i i -tej kolumnie dla $i, j=1, 2, \dots$), *pełnej rangi i taki, że pełnej rangi są krakowiany narożne* (tj. takie, które otrzymujemy z danego krakowianu kwadratowego odrzucając kolejno ostatni wiersz wraz z ostatnią kolumną, aż dochodzimy do jednego tylko elementu), *ma pierwiastek kwadratowy*.

Przyjmując

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

mamy

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

skąd wynikają następujące wzory

$$(59) \quad b_{ii} = \left[a_{ii} - \sum_{v=1}^{i-1} b_{vi}^2 \right]^{1/2} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{v=1}^{i-1} b_{vi} b_{vj}}{b_{ii}} \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad j=i+1, i+2, \dots, n).$$

(Symbol $\sum_{v=1}^0 b_{vi} b_{vj}$ oznacza jak poprzednio liczbę zero).

Kierując się tymi wzorami możemy z łatwością ułożyć schemat postępowania dla obliczenia pierwiastka kwadratowego B danego krakowianu A .

Obliczmy na przykład pierwiastek kwadratowy B krakowianu

$$A = \begin{pmatrix} 6,153 & 2,201 & 1,077 \\ 2,201 & 7,000 & 3,456 \\ 1,077 & 3,456 & 5,876 \end{pmatrix}.$$

Obliczając kolejno elementy według wzorów (59) otrzymujemy

$$B = \begin{pmatrix} 2,481 & 0,887 & 0,434 \\ 0 & 2,493 & 1,232 \\ 0 & 0 & 2,042 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Inne zastosowania rachunku krakowianowego znajdzie czytelnik m. in. w książce: T. Banachiewicz, *Rachunek krakowianowy* (w przygotowaniu).