

ROZDZIAŁ VIII

SKALE I PAPIERY FUNKCYJNE

§ 72. Układy współrzędnych. Stworzona przez Descartes'a geometria współrzędnych stała się potężnym środkiem prowadzącym w wielu gałęziach wiedzy do nowych i ważnych wyników. Ułatwiła ona kontakt matematyki z innymi naukami rozszerzając ogromnie zakres jej zastosowań. Dziś z pewnością nie ma takiej dziedziny wiedzy, w której istniejące związki i zależności pomiędzy różnymi wielkościami nie byłyby przedstawiane wykreślnie. Przez swą prostotę, przejrzystość i wystarczającą na ogół dla praktyki dokładność metody graficzne zyskały sobie powszechne obywatelstwo i do tego stopnia do nich przywykliśmy, że gdy mówimy: zmienna y jest funkcją zmiennej x , ołówek nasz niemal podświadomie kreśli na papierze krzywą w układzie współrzędnych x, y .

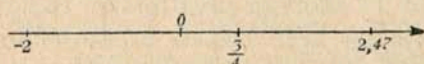
Metoda współrzędnych polega na tym, że każdej wielkości mianowanej x o ustalonym wymiarze w sposób wzajemnie jednoznaczny¹⁾ przyporządkowujemy punkt prostej. Liczby rzeczywiste uważamy za wielkości mianowane o wymiarze 1 i pomijamy ten wymiar przy ich zapisie²⁾. W tym celu obieramy na danej prostej l pewien punkt początkowy O , ustalamy zwrot dodatni i pewien odcinek jako jednostkę długości. Tę jednostkę długości będziemy nazywali *modułem*. Prostą l wraz z ustalonym zwrotem, początkiem O i modułem a będziemy nazywali *osią liczbową*. Wielkości mianowanej x przyporządkujemy taki punkt P osi liczbowej, który jest odległy od początku O o $\xi = ax$, przy czym odległość tę liczymy dodatnio, gdy punkt P leży po tej stronie punktu O , którą wskazuje dodatni kierunek osi, i ujemnie, gdy punkt P leży po przeciwnej stronie punktu O . Wielkość ξ będziemy nazywali *współrzedną* punktu P i dawali

¹⁾ Wzajemna jednoznaczność przyporządkowania oznacza, że każdej wielkości o ustalonym wymiarze przyporządkowujemy dokładnie jeden punkt prostej i każdy punkt prostej jest przyporządkowany dokładnie jednej wielkości o danym wymiarze.

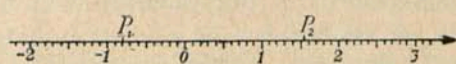
²⁾ Nie precyzujemy tutaj pojęcia wielkości mianowanej. Teorię wielkości mianowanych znaleźć można w pracy: S. Drobot, *O analizie wymiarowej, Zastosowania Matematyki II*, 1 (1954).

jej wymiar długości (mm, cm). Wielkość x będziemy nazywali *kotą* punktu P . Kota może być liczbą rzeczywistą lub też mieć dowolny wymiar (np. $\text{cm} \cdot \text{sek}^{-1}$, volt itp.). Modułowi a nadajemy zawsze wymiar taki, by obie strony równości $\xi = ax$ miały wymiar zgodny. Na rysunku 15 pokazano na osi liczbowej o module $a=1 \text{ cm}$ punkty odpowiadające kotom -2 , $3/4$, $2,47$.

Dogodnie jest zawczasu zaznaczyć na osi kreskami punkty, których koty są wielkościami wyróżnionymi (np. całkowite wielokrotności 5 volt, kąty co 1° , wszystkie liczby całkowite lub ułamki o mianowniku 10).

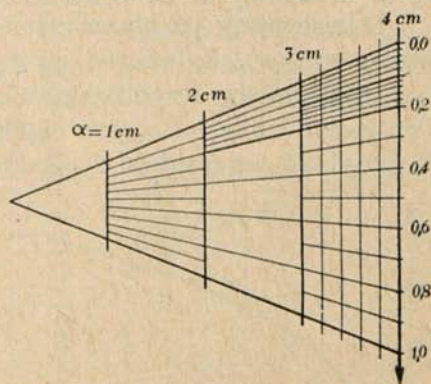


Rys. 15



Rys. 16

Zbiór punktów wyróżnionych na osi kreskami czy kotami i leżących w równych odstępach nazywamy *podziałką*. Podziałka ułatwia odnajdywanie punktów na osi i odczytywanie ich kot. Na rysunku 16 pokazano dla przykładu podziałkę o module $a=1 \text{ cm}$ i kreskach co $0,1$, przy czym koty są wypisane tylko przy kreskach odpowiadających liczbom całkowitym. Dla łatwiejszej orientacji punkty o kotach będących wielokrotnościami ułamka $1/2$ wyróżniono dłuższą kreską. Z pomocą takiej podziałki możemy np. łatwo odnaleźć na osi punkt P_1 odpowiadający liczbie $x_1 = -0,79$ i dla punktu P_2 odczytać kotę $x_2 = 1,54$. Podziałki o module $a=1 \text{ cm}$ z kreskami co $0,1$ spotykamy zwykle na tzw. linijkach. Trójkątna linijka techniczna zaopatrzona jest w 6 podziałek o różnych modułach. Przy częstym posługiwaniu się podziałkami o różnych modułach wygodnie jest sporządzić *uniwersalną podziałkę* przedstawioną na rysunku 17. Konstrukcja jej polega na centralnym rzutowaniu podziałki wykonanej przy ustalonym module (np. na rysunku 17 jest to podziałka o module $a=4 \text{ cm}$) na proste równoległe.



Rys. 17

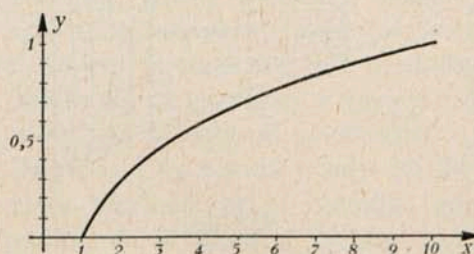
Mając do dyspozycji dokładnie wykonaną podziałkę potrafimy bez większej trudności umieścić na niej punkt z błędem współrzędnej nie przekraczającym $0,2 \text{ mm}$. Podobnie z taką samą dokładnością możemy odczytać współrzędną narysowanego punktu. Błędowi $\Delta \xi$ współrzędnej ξ odpowiada błąd $\Delta x = \frac{\Delta \xi}{a} = \frac{0,2 \text{ mm}}{a}$ koty x . Widzimy więc, że zwiększa-

jąc odpowiednio moduł a możemy dowolnie zmniejszyć błędy kot wynikające z niedokładnego odczytywania podziałki lub niedokładnego odnajdywania na niej punktów.

Podobnie jak wielkościom mianowanym przyporządkowaliśmy punkty prostej, możemy parom wielkości mianowanych przyporządkować punkty płaszczyzny. Obieramy w tym celu tzw. *prostokątny układ współrzędnych*, tj. dwie prostopadłe osie liczbowe o wspólnym początku O zwanym *połącznikiem układu współrzędnych*. Jedną z osi rysujemy zwykle poziomo i nazywamy *osią odciętych*; drugą pionową nazywamy *osią rzędnych*. Parze wielkości (x, y) przyporządkowujemy punkt P , którego prostopadłe rzuty na oś rzędnych i oś odciętych odpowiadają na tych osiach wielkościom x i y . Wymiar wielkości x może być inny niż wymiar wielkości y . Jeżeli a jest modulem osi rzędnych, a β modulem osi odciętych, to prostopadłe rzuty punktu P na osie odcinają na nich odcinki o długościach $\xi = ax$, $\eta = \beta y$. Wielkości ξ , η mające wymiar długości będziemy nazywali *współrzędnymi punktu P* , a x , y *kotami punktu P* . Modułom a i β przypisujemy takie wymiary, aby wielkości ξ i ax oraz η i βy miały zgodne wymiary.

Często wygodniej jest zrezygnować z warunku prostopadłości osi układu. Mamy wtedy do czynienia z tzw. *ukośnokątnym układem współrzędnych*. Współrzędnymi punktu w układzie ukośnokątnym są — podobnie jak w układzie prostokątnym — współrzędne rzutów punktu na osie, z tą tylko różnicą, że zamiast prostopadłe punkt rzutuje się na każdą z osi równolegle do osi drugiej.

Odwzorujemy na płaszczyźnie wszystkie pary kot (x, y) spełniających relację $y = f(x)$. Zależności $y = f(x)$ wiążącej koty odpowiada zależność $\eta = \beta f(\xi/a)$ między współrzędnymi. Uzyskamy w ten sposób wykres funkcji $f(x)$. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła, jej wykres przedstawia krzywą ciągłą. Na przykład na rysunku 18 widzimy wykres funkcji $y = \log x$ narysowany



Rys. 18

przy modułach $a = 0,5$ cm i $\beta = 2,5$ cm dla odciętych z przedziału $1 \leq x \leq 10$. Uzyskany wykres pozwala zorientować się w przebiegu funkcji $y = \log x$, a także w pewnym stopniu może zastąpić tablice logarytmiczne, gdyż możemy z wykresu odczytać dla danego x przybliżoną wartość $\log x$. W tym celu należy w punkcie o kocie x na osi odciętych wystawić równoległą do osi rzędnych i punkt przecięcia tej prostej z wykresem funkcji rzutować prostopadłe na oś rzędnych. Uzyskany w ten sposób punkt na osi rzędnych ma kotę y równą szukanej wartości $y = \log x$. Przeprowadzając opisaną konstrukcję w odwrotnym kierunku, tj. wychodząc z punktu

leżącego do osi rzędnych i punkt przecięcia tej prostej z wykresem funkcji rzutować prostopadłe na oś rzędnych. Uzyskany w ten sposób punkt na osi rzędnych ma kotę y równą szukanej wartości $y = \log x$. Przeprowadzając opisaną konstrukcję w odwrotnym kierunku, tj. wychodząc z punktu

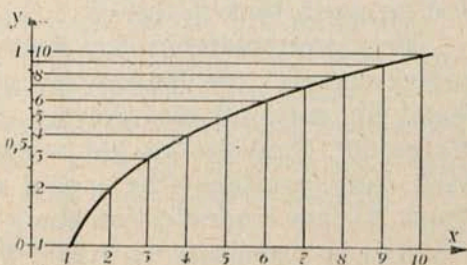
o kocie y na osi rzędnych, możemy znaleźć na osi odciętych punkt o kocie x spełniający równanie $\log x = y$. Dla ułatwienia postępowania możemy zawczasu narysować na wykresie dwie rodziny prostych prostopadłych do osi układu współrzędnych i przechodzących przez punkty podziałek narysowanych na osiach. Uzyskujemy w ten sposób tzw. *papier milimetrowy*. W handlu pod tą nazwą spotykamy papier, w którym odstęp między sąsiednimi liniami równoległymi są 1 mm; będziemy jednak używali tej nazwy dla każdego papieru z dwiema prostopadłymi rodzinami prostych równoległych, jeżeli tylko w każdej z rodzin odstęp między sąsiednimi liniami są stałe. Użycie papieru milimetrowego ułatwia rysowanie i korzystanie z wykresu.

Stosując postępowanie opisane na przykładzie funkcji $f(x) = \log x$ możemy otrzymać z wykresu tylko przybliżone wartości funkcji. Błąd $\Delta x = \frac{\Delta \xi}{a}$ koty x na osi odciętych pociąga za sobą błąd koty y na osi rzędnych $\Delta y = = |f'(x_0)| \Delta x$, gdzie $x - \Delta x < x_0 < x + \Delta x$. Ponadto dochodzą jeszcze nieuniknione błędy wykonania wykresu, błędy wynikające z konstrukcji geometrycznej prostopadłego rzutowania i wyznaczania punktu przecięcia z linią wykresu oraz błąd odczytywania koty y . Użycie papieru milimetrowego zmniejsza znacznie błędy rzutowania, zaś dokładne wykreślenie krzywej możliwe cienką linią zwiększa dokładność wyznaczenia punktu na krzywej.

§ 73. Skale funkcyjne. Wyobraźmy sobie teraz, że podobnie jak postępowaliśmy z pojedynczym punktem na osi odciętych x , wyznaczając na podstawie wykresu wartość funkcji $f(x) = \log x$, postąpimy teraz z wszystkimi punktami podziałki zmiennej x . Wszystkie punkty podziałki na osi odciętych rzutujemy równoległe do osi rzędnych na wykres funkcji i uzyskane w ten sposób punkty na krzywej rzutujemy równoległe do osi odciętych na oś rzędnych. Uzyskanym na osi rzędnych obrazom punktów podziałki z osi odciętych przyporządkujemy ich dawne koty x (rys. 19). W ten sposób na osi rzędnych prócz pierwotnej podziałki zmiennej y otrzymaliśmy tak zwaną *skale logarytmiczną* zmiennej x . Na skali tej punkt o kocie x ma współrzędną $\eta = \beta \log x$, gdzie β — jak poprzednio — jest modulem na osi rzędnych. Równanie

$$\eta = \beta \log x$$

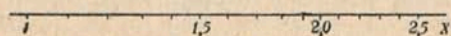
zwane *równaniem skali logarytmicznej* podaje związek między kotami



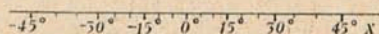
Rys. 19

i współzrzednymi punktów skali logarytmicznej. Równanie to wyznacza całkowicie skalę logarytmiczną i pozwala ją skonstruować na dowolnej osi (np. na osi ξ o module a) niezależnie od wykresu funkcji $y = \log x$ i konstrukcji rzutowania. Dla każdej wartości koty x możemy na podstawie równania $\xi = a \log x$ obliczyć współzrzedną ξ i wyznaczyć na osi punkt odpowiadający danej kocie. Oczywiście musimy się ograniczyć tylko do pewnego przedziału argumentów x . Na przykład na rysunku 19 pokazana jest konstrukcja skali logarytmicznej o module 2,5 cm dla zmiennej x z przedziału $1 \leq x \leq 10$. Rysunek 20 przedstawia skalę o równaniu $\xi = 12,5 \text{ cm} \cdot \log x$ dla $1 \leq x \leq 2,5$.

Analogicznie, jak konstruowaliśmy skalę logarytmiczną, możemy sporządzić skalę innej funkcji $f(x)$. W tym celu kotom x z interesu-



Rys. 20



Rys. 21

jącego nas przedziału $a \leq x \leq b$ przyporządkujemy takie punkty osi, których współzrzedne ξ spełniają równanie

$$(1) \quad \xi = a f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

gdzie a jest dowolnie obranym modulem.

Równanie skali (1) wraz z podanym przedziałem zmiennej niezależnej określa jednoznacznie skalę. Na przykład rysunek 21 przedstawia skalę funkcyjną o równaniu $\xi = 2 \text{ cm} \cdot \operatorname{tg} x$ dla $-45^\circ \leq x \leq +45^\circ$. Innym jeszcze przykładem skali funkcyjnej jest dowolna podziałka, np. przedstawiona na rysunku 16 podziałka o równaniu $\xi = 1 \text{ cm} \cdot x$ dla $-2 \leq x \leq 3$. Jest to skala funkcji $f(x) = x$.

Przy wprowadzeniu skal funkcyjnych musimy zastrzec, że nie dla każdej funkcji i nie dla każdego przedziału można będzie skonstruować skalę. Na przykład nie możemy narysować skali funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$. Funkcja $\operatorname{tg} x$ jest w tym przedziale nieograniczona i, jakkolwiek mały przyjęlibyśmy moduł a , skala musiałaby być nieskończenie długa. Na inne trudności natrafimy chcąc narysować skalę funkcji $f(x) = x \cdot \sin x$ w przedziale $0 \leq x \leq 2\pi$. Funkcja ta jest ograniczona, ale każdą wartość pośrednią między minimum a maksimum przybiera w tym przedziale dwukrotnie. Oznacza to, że poza skrajnymi punktami skali każdy jej punkt miałby dwie różne koty. Dla uniknięcia tych trudności będziemy dalej zakładali, że w przedziale $[a, b]$ funkcja $f(x)$ jest ograniczona i monotoniczna.

Skale funkcyjne są podstawowym narzędziem większości metod rachunku graficznego. Najprostszym i bezpośrednim ich zastosowaniem jest obliczanie wartości funkcji $f(x)$ w danym punkcie x_0 i zadanie od-

wrotne, polegające na znalezieniu wartości argumentu x_0 , gdy dana jest wartość funkcji $f(x_0)$. W tym celu najwygodniej jest razem ze skalą $\xi = af(x)$ umieścić po drugiej stronie osi skalę wartości funkcji, tj. podziałkę $\xi = ay$. Tak jest narysowana skala logarytmiczna na osi rzędnych na rysunku 19. Jest to szczególny przypadek tak zwanej *skali podwójnej*. Jeżeli x i y są kotami tego samego punktu P skali podwójnej o równaniach $\xi = af(x)$ i $\xi = ay$, to zachodzi równość $y = f(x)$, czyli koty podziałki $\xi = ay$ są wartościami funkcji $f(x)$ dla argumentu równego kotom skali funkcyjnej $\xi = af(x)$. Na przykład na rysunku 22 pokazana jest podwójna skala funkcji

$$T = f(g) = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

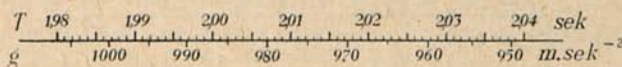
dla $950 \text{ cm/sek}^2 \leq g \leq 1000 \text{ cm/sek}^2$ i $l_0 = 100 \text{ cm}$. Po jednej stronie osi mamy skalę o równaniu

$$\xi = 100 \text{ cm/sek} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{100 \text{ cm}}{g}},$$

po drugiej stronie podziałkę

$$\xi = 100 \text{ cm/sek} \cdot T.$$

Podwójna skala na rysunku 22 pozwala dla dowolnej wartości przyspieszenia ziemskiego g z danego przedziału $[950 \text{ cm/sek}^2, 1000 \text{ cm/sek}^2]$



Rys. 22

znaleźć okres wahań wahadła o długości $l_0 = 100 \text{ cm}$ lub na odwrót — dla dowolnej wartości okresu T znaleźć wielkość przyspieszenia ziemskiego g , przy którym wahadło o długości $l_0 = 100 \text{ cm}$ ma okres wahań T .

Ogólnie skalą podwójną nazwiemy dwie skale funkcyjne o równaniach $\xi = af(x)$ i $\xi = \beta g(y)$ umieszczone po dwu stronach tej samej osi. Jeżeli x i y są kotami tego samego punktu P skali podwójnej, to zachodzi równość

$$af(x) = \beta g(y).$$

Sporządzmy dla przykładu skalę podwójną rozpatrywanej już funkcji

$$T = f(g) = 2\pi \sqrt{\frac{100 \text{ cm}}{g}},$$

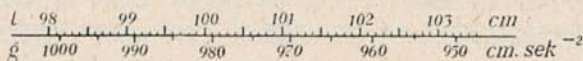
gdzie $950 \text{ cm/sek}^2 \leq g \leq 1000 \text{ cm/sek}^2$ i funkcji

$$T = h(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{981 \text{ cm/sek}^2}},$$

gdzie przedział l dobieramy tak, by funkcja $h(l)$ zmieniała się w tych samych granicach co $f(g)$.

Przy pomocy podwójnej skali przedstawionej na rysunku 23 możemy, bezpośrednio odczytując kątę odpowiedniego punktu, odpowiedzieć na następujące pytania:

a) Jaką długość l musi mieć wahadło, aby przy przyśpieszeniu ziemskim $g_0=981$ cm/sec² miało ten sam okres co wahadło o długości $l_0=100$ cm

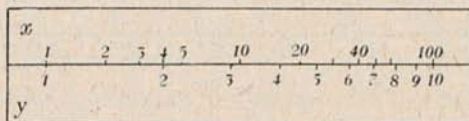


Rys. 23

przy danym przyśpieszeniu ziemskim g ? (Np. dla $g=990$ cm/sec² odczytujemy ze skali $l=99,1$ cm).

b) Jakie musi być przyśpieszenie ziemskie g , by wahadło o długości $l_0=100$ cm miało ten sam okres wahań co wahadło o danej długości l przy przyśpieszeniu ziemskim $g_0=981$ cm/sec² (Np. dla $l=102,5$ cm odczytujemy ze skali $g=957$ cm/sec²).

Narysujmy teraz dwie skale $\xi=af(x)$ i $\eta=\beta g(x)$ na brzegach dwu pasków papieru, tak by można je było składać ze sobą uzyskując w ten sposób skalę podwójną. Należy w tym celu przyłożyć obie skale do siebie tak, by się pokrywały ich początki, to jest punkty, od których liczymy współrzędne ξ i η , a zwroty obu skal były zgodne. Na przykład na rysunku



Rys. 24

24 widzimy skalę podwójną uzyskaną z przyłożenia do siebie dwu skal o równaniach

$$\xi = 2,5 \text{ cm} \cdot \log x \quad \text{dla } 1 \leq x \leq 100,$$

$$\eta = 5 \text{ cm} \cdot \log y \quad \text{dla } 1 \leq y \leq 10.$$

Koty x i y odpowiadających sobie punktów obu skal spełniają równość

$$2,5 \text{ cm} \cdot \log x = 5 \text{ cm} \cdot \log y,$$

to jest po uproszczeniu przez $2,5$ cm

$$\log x = 2 \log y,$$

czyli

$$x = y^2 \quad \text{lub} \quad y = \sqrt{x}.$$

Kładąc np. $y=4,5$ możemy odczytać na skali $x=y^2 \approx 20$. Podobnie dla $x=10$ odczytujemy $y=\sqrt{x} \approx 3,2$.

Przesuniemy teraz górną skalę, tak by jej początek, tj. punkt o kocie 1 pokrył się z punktem skali dolnej o kocie y_0 i współrzędnej $\eta_0 = \beta g(y_0)$. Na rysunku 25 narysowane są skale z rysunku 24, przy czym początek skali górnej przesunięto do punktu o kocie $y_0 = 1,7$ na skali dolnej. W takim położeniu współrzędne ξ i η pokrywających się punktów obu skal spełniają równość $\eta = \eta_0 + \xi$. Odpowiadające tym punktom koty x i y spełniają równość

$$(2) \quad \beta g(y) = \beta g(y_0) + \alpha f(x).$$

W naszym przypadku mamy

$$5 \text{ cm} \cdot \log y = 5 \text{ cm} \cdot \log y_0 + 2,5 \text{ cm} \cdot \log x,$$

czyli

$$\log y = \log y_0 + \frac{1}{2} \log x$$

i po przekształceniu

$$y = y_0 \sqrt{x} \quad \text{lub} \quad x = \frac{y^2}{y_0^2}.$$

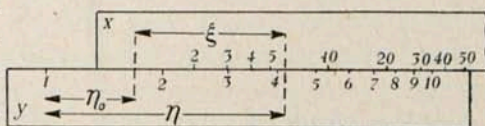
Dla oznaczonych na rysunku wartości $y_0 = 1,7$, $x = 6$ odczytujemy

$$y = 1,7\sqrt{6} \approx 4,2.$$

Równanie (2) wyrażające związek między kotami przesuniętych skal jest podstawą teorii *suwaka logarytmicznego*, któremu poświęcimy następny rozdział.

Rozpatrzmy skalę funkcyjną o równaniu $\xi = \alpha f(x)$. Nawet wtedy, gdy jest ona bardzo precyzyjnie wykonana, nie możemy na niej umieścić dokładnie punktu o danej kocie ani też dokładnie odczytać koty zaznaczonego punktu. Istnieje pewna graniczna wielkość δ , związana z fizjologią ludzkiego wzroku, taka że nie potrafimy już odróżnić punktów odległych o mniej niż δ . Ponadto błąd odczytu czy lokalizacji punktu powiększają jeszcze niedokładności wykonania skali, a także błędy przeprowadzanej na oko interpolacji, w przypadku gdy punkt nie pokrywa się z żadną z kresek skali.

Przyjmijmy, że potrafimy umieścić punkt na skali lub odczytać jego położenie z błędem współrzędnej nie przekraczającym wielkości $\Delta\xi$. Zwykle można przyjąć $\Delta\xi = 0,5 \text{ mm}$; przy starannym wykonaniu skali i pewnej wprawie w posługiwaniu się nią można obniżyć tę wielkość do $0,2 \text{ mm}$, a nawet do $0,1 \text{ mm}$ (suwak logarytmiczny). Przyjmijmy



Rys. 25

również, że w rozpatrywanym przedziale $[a, b]$ funkcja $f(x)$ jest ciągła i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Błędowi $\Delta\xi$ współrzędnej ξ odpowiada wtedy błąd Δx koty x związany z poprzednim równością

$$\Delta\xi = a|f'(x_0)|\Delta x, \quad \text{gdzie} \quad x - \Delta x < x_0 < x + \Delta x,$$

z której otrzymujemy

$$(3) \quad \Delta x = \frac{\Delta\xi}{a|f'(x_0)|}.$$

Z wzoru (3) widzimy, że w przeciwieństwie do błędu współrzędnej $\Delta\xi$, który nie zależy od położenia punktu na skali, błąd Δx koty x jest na ogół zależny od x . Jedynie w przypadku funkcji liniowej $f(x) = kx + m$ mamy $f'(x) = k$ i błąd koty Δx jest stały na całej skali. W tym przypadku skala funkcyjna jest podziałką o module ka i początku przesuniętym do punktu o współrzędnej am .

Skala funkcji liniowej $f(x) = kx + m$ zwana *skalą regularną* ma więc dwie bardzo ważne w zastosowaniach praktycznych własności:

a) Błąd bezwzględny Δx odczytu koty jest stały na całej długości skali regularnej.

b) Skala regularna jest podziałką, tj. odstęp między sąsiednimi kreskami tej skali są równe. Ułatwia to bardzo konstrukcję i posługiwanie się skalą (łatwość interpolacji).

Skalę regularną wyznaczają całkowicie dowolne dwa jej punkty. Jeżeli kocie x_1 odpowiada punkt P_1 o współrzędnej ξ_1 , a kocie x_2 — punkt P_2 o współrzędnej ξ_2 , to skala liniowa ma równanie

$$\xi = \frac{\xi_2 - \xi_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \xi_1,$$

a zatem szukana skala jest podziałką o module $a = \frac{\xi_2 - \xi_1}{x_2 - x_1}$ i początku w punkcie o współrzędnej $\xi_0 = \xi_1 - ax_1$. Konstrukcyjnie najłatwiej uzyskać skalę liniową korzystając z uniwersalnej podziałki (rys. 17) lub przez rzutowanie centralne dowolnej podziałki z prostej równoległej do danej tak, by punkty podziałki o kotach x_1, x_2 przeszły przy rzutowaniu w punkty P_1, P_2 .

Obok najprostszej skali regularnej ogromną rolę odgrywa w metodach graficznych *skala logarytmiczna*. Ponieważ logarytmy o różnych zasadach różnią się tylko stałym czynnikiem, możemy więc zająć się tylko skalą logarytmu dziesiętnego $y = \log x$. Skale logarytmów o innych zasadach uzyskamy zmieniając odpowiednio modul.

Ze wzoru (3) otrzymujemy dla skali logarytmicznej

$$\Delta x = \frac{\Delta \xi}{a |f'(x_0)|} = \frac{x_0 \Delta \xi}{a M},$$

gdzie $M = \log e \approx 0,4343$. Mamy stąd

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta \xi}{a M} \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x}{x_0} \right| = \frac{\Delta x |x_0 - x|}{x_0 x} < \frac{(\Delta x)^2}{x(x - \Delta x)}.$$

Błąd względny $\Delta x/x$ koty x na skali logarytmicznej jest więc w przybliżeniu wielkością stałą.

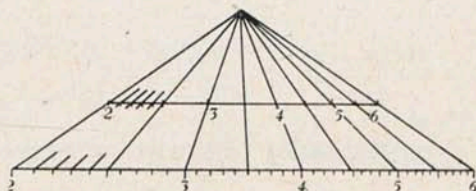
Druga ważna własność skali logarytmicznej $\xi = a \log x$ wynika ze wzoru $\log(10^k x) = k + \log x$. Jeśli narysujemy skalę $\xi = a \log x$ dla podstawowego przedziału $1 \leq x \leq 10$ ($0 \leq \xi \leq a$), to następny przedział $10 \leq x \leq 100$ ($a \leq \xi \leq 2a$) uzyskamy bardzo łatwo, przesuwając narysowaną część skali o odcinek a w dodatnim kierunku osi, przy czym koty punktów skali należy dziesięciokrotnie zwiększyć. Podobnie przesuwając podstawowy odcinek skali ($1 \leq x \leq 10$) o odcinek a w stronę przeciwną i zmniejszając dziesięciokrotnie koty punktów uzyskamy skalę logarytmiczną w przedziale $0,1 \leq x \leq 1$. Tak więc każdy odcinek skali logarytmicznej $\xi = a \log x$ dla $10^k \leq x \leq 10^{k+1}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, przystaje do podstawowego przedziału $1 \leq x \leq 10$ skali logarytmicznej. Powyższa własność sprowadza zagadnienie konstrukcji skali logarytmicznej do konstrukcji jej podstawowego przedziału. Aby uniknąć żmudnego w praktyce wyznaczania skali logarytmicznej za pomocą odczytanych z tablic wartości logarytmów, możemy skopiować skalę logarytmiczną z suwaka lub z papieru logarytmicznego, o którym będziemy mówili w paragrafie następnym. Mając skalę logarytmiczną o pewnym module a (np. skalę o module $a = 25$ cm na suwaku) możemy łatwo uzyskać skalę logarytmiczną o module innym przez centralne rzutowanie na prostą równoległą. Gdy posługujemy się często skalami logarytmicznymi o różnych modułach, warto jest sporządzić uniwersalną skalę logarytmiczną, analogiczną do uniwersalnej podziałki pokazanej na rysunku 17.

Skalę logarytmiczną podobnie jak skalę regularną wyznaczają dowolne dwa jej punkty. Jeżeli punktowi o kocie x_1 odpowiada na osi współrzędna ξ_1 (liczona od dowolnego punktu), a punktowi o kocie x_2 — współrzędna ξ_2 , to moduł skali obliczymy ze wzoru

$$a = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\log x_2 - \log x_1},$$

a początek skali będzie się znajdował w punkcie o współrzędnej $\xi_0 = \xi_1 - a \log x_1 = \xi_2 - a \log x_2$. Przy graficznej konstrukcji skali logarytmicznej

na podstawie danych dwu jej punktów nie musimy nawet obliczać modułu ani wyznaczać początku skali. Niech np. końce odcinka o długości 3,5 cm mają koty 2 i 6. Należy uzupełnić skalę logarytmiczną wewnątrz tego odcinka. Rysunek 26 pokazuje graficzne rozwiązanie tego zadania przy użyciu fragmentu skali logarytmicznej o module $a=12,5$ cm skopiowanej z suwaka.



Rys. 26

Zajmiemy się obecnie skalą tak zwaną *funkcją homograficzną*

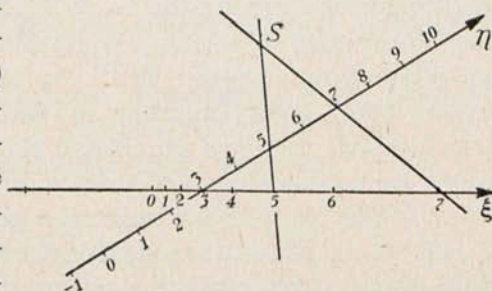
$$(4) \quad y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

gdzie

$$ad - bc \neq 0.$$

Skalę funkcji (4) nazywamy *skalą rzutową*, gdyż — jak wykazemy — można ją skonstruować przez rzutowanie podziałki.

Niech na osi ξ (rys. 27) dana będzie skala funkcji (4) o równaniu $\xi = af(x)$. Obierzmy na niej dowolny punkt o kocie x_0 (na rys. 27 $x_0=3$) spełniającej warunek $cx_0 + d \neq 0$ (w przeciwnym razie byłby to bowiem punkt w nieskończoności). Przez punkt ten prowadzimy dowolnie inną oś η i rysujemy na niej podziałkę o równaniu $\eta = \beta x$, taką by punkt przecięcia osi miał na podziałce i skali rzutowej tę samą kotę x_0 . Udowodnimy, że skalę rzutową $\xi = af(x)$ można uzyskać przez centralne rzutowanie podziałki $\eta = \beta x$, gdy wykazemy, że wszystkie proste łączące punkty o jednakowych kotach na podziałce i skali przecinają się w jednym punkcie. W tym celu przyjmijmy osie $\bar{\xi} = \xi - \xi_0$ i $\bar{\eta} = \eta - \eta_0$ (gdzie $\eta_0 = \beta x_0$ i $\xi_0 = af(x_0)$) jako osie ukośnokątnego układu współrzędnych. Prosta łącząca punkt o kocie x na skali rzutowej z punktem o tej samej kocie na podziałce ma w obranym układzie współrzędnych równanie odcinkowe¹⁾



Rys. 27

$$(5) \quad \frac{\bar{\xi}}{af(x) - af(x_0)} + \frac{\bar{\eta}}{\beta x - \beta x_0} - 1 = 0,$$

¹⁾ W ukośnokątnym układzie współrzędnych, tak jak w prostokątnym, każda prosta ma równanie liniowe; każde równanie liniowe jest równaniem jakiejś prostej. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić, współrzędne punktów $(a + f(x) - af(x_0), 0)$ i $(0, \beta x - \beta x_0)$ spełniają równanie liniowe (5), więc jest ono równaniem prostej przechodzącej przez te punkty.

czyli, po podstawieniu funkcji $f(x)$ ze wzoru (4), równanie

$$\frac{\bar{\xi}}{a\left(\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)} + \frac{\bar{\eta}}{\beta(x-x_0)} - 1 = 0.$$

Podstawiając do tego równania dowolne dwie wartości kot x_1 i x_2 różne od x_0 dostajemy dwa równania

$$\frac{\bar{\xi}}{a\left(\frac{ax_1+b}{cx_1+d} - \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)} + \frac{\bar{\eta}}{\beta(x_1-x_0)} - 1 = 0,$$

(6)

$$\frac{\bar{\xi}}{a\left(\frac{ax_2+b}{cx_2+d} - \frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)} + \frac{\bar{\eta}}{\beta(x_2-x_0)} - 1 = 0.$$

Gdy $c \neq 0$, układ (6) ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$(7) \quad \bar{\xi} = \frac{a(ad-bc)}{c(cx_0+d)}, \quad \bar{\eta} = \frac{-\beta(cx_0+d)}{c}.$$

Są to współrzędne punktu S przecięcia prostych łączących punkty o jednakowych kotach x_1 oraz x_2 na skali rzutowej i podziałce. Uzyskane rozwiązania (7) nie zależą od x_1 i x_2 , więc wszystkie proste (5), łączące punkty o jednakowych kotach na skali rzutowej i podziałce, przechodzą przez punkt S . Skala rzutowa $\xi = a \frac{ax+b}{cx+d}$ jest więc rzutem z punktu S podziałki

$\eta = \beta x$. Środek rzutowania S można wyznaczyć z przecięcia dowolnych dwóch prostych łączących pary punktów o tej samej kocie na skali i podziałce.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $c=0$. Wtedy funkcja homograficzna (4) sprowadza się do liniowej i skala rzutowa do skali regularnej. Układ (6) ma wtedy tylko nieskończone rozwiązania i zgodnie z twierdzeniem Talesa proste łączące punkty o jednakowych kotach na obu skalach są równoległe. W tym przypadku uzyskujemy więc rzutowanie równoległe (środek rzutowania S jest punktem w nieskończoności).

Na odwrót można wykazać, że każde rzutowanie podziałki daje skalę funkcji postaci (4). Gdy środek rzutowania S jest w nieskończoności lub gdy prosta, na którą rzutujemy, jest równoległa do podziałki, otrzymujemy skalę regularną, która jest szczególnym przypadkiem skali rzutowej.

Z przeprowadzonego dowodu wynika, że do wyznaczenia skali rzutowej wystarczy znać dowolne jej trzy punkty¹⁾. Przez jeden z nich prowadzimy dowolną prostą i na niej rysujemy podziałkę tak, by punkt przecięcia miał na podziałce tę samą kotę co na skali. Łącząc liniami prostymi pozostałe dwa dane punkty skali z odpowiadającymi im punktami o tych samych kotach na podziałce, znajdujemy w punkcie przecięcia tych prostych środek S , z którego należy rzutować podziałkę, aby uzupełnić skalę rzutową. Z dowodu poprzedniego twierdzenia wynika także jednoznaczność takiej konstrukcji. Istnieje jedna i tylko jedna skala rzutowa, która w danych trzech punktach ma dane koty, więc przy konstrukcji skali rzutowej każda prosta przechodząca przez jeden z trzech danych punktów i dowolna podziałka na tej prostej, byleby tylko punkt przecięcia miał tę samą kotę na podziałce i na skali, prowadzi do tego samego wyniku.

Narysujmy dla przykładu skalę rzutową $\xi = 1 \text{ cm} \cdot \frac{x+1}{x-1}$. W tym celu obliczmy współrzędne dowolnych trzech punktów skali. Dla $x = -1, 0, 2$ mamy odpowiednio $\xi = 0 \text{ cm}, -1 \text{ cm}, 3 \text{ cm}$. Rysując dowolną prostą i obierając na niej dowolny punkt początkowy i zwrot, odnajdujemy na prostej obrane trzy punkty. Przez jeden z tych punktów, np. przez punkt o kocie -1 prowadzimy prostą i na niej rysujemy podziałkę o dowolnym module np. $\beta = 0,75 \text{ cm}$. Środek rzutowania S znajdujemy jako punkt przecięcia prostych łączących punkty o kotach 0 i 2 na skali i podziałce. Rzutując następnie podziałkę z punktu S uzupełniamy skalę (rys. 28).

Rys. 28

Zwróćmy uwagę na to, że na rysunku 28 uzyskaliśmy w wyniku konstrukcji skali rzutowej punkt o kocie ∞ . Jest to punkt przecięcia

¹⁾ Mogłoby się zdawać, że do wyznaczenia skali rzutowej trzeba czterech punktów, bo funkcja (4) zawiera cztery nieznane parametry a, b, c, d . Tak jednak nie jest, gdyż do wyznaczenia funkcji (4) wystarczy znać tylko stosunki pomiędzy tymi parametrami. Przez podzielenie licznika i mianownika w wyrażeniu (4) np. przez a (gdy $a \neq 0$) można funkcję $f(x)$ sprowadzić do postaci

$$f(x) = \frac{x + b'}{c'x + d'},$$

gdzie występują już tylko trzy parametry,

z osią ξ prostej równoległej do podziałki i przechodzącej przez środek rzutowania S . Z równania skali rzutowej mamy

$$\xi_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \xi = \lim_{x \rightarrow \infty} a \frac{ax+b}{cx+d} = a \frac{a}{c} \quad (\text{dla } c \neq 0).$$

Skala rzutowa, w odróżnieniu od skal dotychczas omawianych, przy $c \neq 0$ przyporządkowuje kocie $x = \infty$ punkt o skończonej współrzędnej $\xi = a \frac{a}{c}$. Widzimy natomiast na rysunku 28, że połączenie punktu podziałki o kocie 1 ze środkiem rzutowania S daje prostą równoległą do skali rzutowej. Punkt o kocie 1 jest więc *punktem niewłaściwym* rozważanej skali rzutowej. Istotnie funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) ma punkt nieciągłości dla $x = -d/c$ i obie jednostronne granice są w tym punkcie nieskończone. Punktowi o kocie $x = -d/c$ nie odpowiada więc na skali rzutowej żaden punkt o skończonej współrzędnej ξ .

Na skali rzutowej błąd Δx koty x spowodowany błędem $\Delta \xi$ współrzędnej ξ jest równy na mocy wzoru (3)

$$(7) \quad \Delta x = \frac{\Delta \xi}{a|f'(x_0)|} = \frac{\Delta \xi}{a \frac{|ad-bc|}{(cx_0+d)^2}} = \frac{\Delta \xi (cx_0+d)^2}{a|ad-bc|} \quad (x - \Delta x < x_0 < x + \Delta x).$$

Widzimy, że dla $c \neq 0$ zarówno błąd bezwzględny Δx , jak i błąd względny $\Delta x/x$ zmieniają się wraz ze zmianą wartości koty x . Błąd Δx dąży do zera, gdy x_0 dąży do $-d/c$ (a więc gdy punkt na skali oddala się do położonego w nieskończoności punktu o kocie $-d/c$). Gdy x_0 dąży do ∞ , punkty skali zagęszczają się wokół punktu o współrzędnej $\xi = a(a/c)$ i błąd Δx rośnie nieograniczenie.

W przypadku gdy $c = 0$, błąd bezwzględny Δx jest stały, gdyż wtedy — jak już widzieliśmy — skala rzutowa redukuje się do skali regularnej $\xi = a \left(\frac{a}{d}x + \frac{b}{d} \right)$.

Innym przypadkiem szczególnym skali rzutowej jest skala funkcji $f(x) = 1/x$ nazywana *skalą odwrotności*. Rysujemy ją opisaną metodą konstrukcji skal rzutowych przyjmując zwykle punkty o kotach $x = 0, 1, \infty$.

Podobnie jak skalę rzutową konstruujemy skalę ogólniejszej funkcji

$$(8) \quad f(x) = \frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)+d} \quad (ad-bc \neq 0).$$

Otrzymujemy ją przez rzutowanie skali funkcji $\varphi(x)$. Dla przykładu narysujemy skalę funkcji

$$(9) \quad f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad 0^\circ \leq x \leq 60^\circ,$$

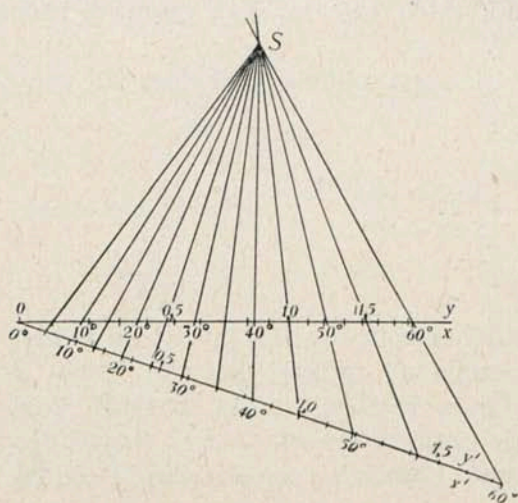
przez rzutowanie skali funkcji $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$. Skala funkcji $f(x)$ w podanym przedziale ma mieć długość 5 cm (rys. 29).

Z warunku na długość skali znajdujemy jej moduł

$$a = \frac{5 \text{ cm}}{f(60^\circ) - f(0^\circ)} = \frac{5 \text{ cm}}{0,634} \approx 7,89 \text{ cm}.$$

Do uzyskania szukanej skali trzeba

prócz znanych końców skali mieć jeszcze dowolny jej punkt wewnętrzny. Na przykład dla $x = 45^\circ$ mamy $f(x) = 0,5$ i $\xi \approx 7,89 \text{ cm} \cdot 0,5 \approx 3,94 \text{ cm}$. Na odcinku o długości 5 cm (na rys. 29 odcinek poziomy) możemy teraz zaznaczyć trzy punkty szukanej skali. Są to końce odcinka, które oznaczymy skrajnymi wartościami kot $x = 0^\circ$ i $x = 60^\circ$ oraz punkt o obliczonej kocie $x = 45^\circ$ i współrzędnej $\xi = 3,94 \text{ cm}$ (współrzedną odmierzamy od punktu $x = 0^\circ$, który jest początkiem skali). Następnie przez początek skali prowadzimy prostą ukośną, na której rysujemy skalę pomoc-



Rys. 29

niczą o równaniu $\xi' = 3,75 \text{ cm} \cdot \operatorname{tg} x'$; kierunek i moduł tej skali obraliśmy zupełnie dowolnie. Łączymy prostymi punkty obu skal o tych samych kotach 45° i 60° . Punkt przecięcia tych prostych jest środkiem rzutowania S . Rzutując z punktu S skalę pomocniczą uzupełniamy szukaną skalę funkcji (9).

Na rysunku 29 obok skali pomocniczej $\xi' = \beta \operatorname{tg} x'$ ($\beta = 3,75 \text{ cm}$) narysowaliśmy także podziałkę $\eta' = \beta y'$. Rzutując tę podziałkę z tego samego środka S uzyskujemy obok szukanej skali $\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ($a = 7,89 \text{ cm}$)

skalę rzutową $\eta = a \frac{y}{1+y}$. Uzyskałismy w ten sposób skalę podwójną

$$\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad \eta = a \frac{y}{1 + y}$$

powstałą przez rzutowanie z punktu S podwójnej skali pomocniczej

$$\xi' = \beta \operatorname{tg} x', \quad \eta' = \beta y'.$$

Na obu podwójnych skalach kąty x i y tych samych punktów spełniają równość $y = \operatorname{tg} x$. Obie podwójne skale mogą więc służyć do odczytu kąta x , gdy znany jest jego tangens y , lub — na odwrót — odczytu tangensa y ,

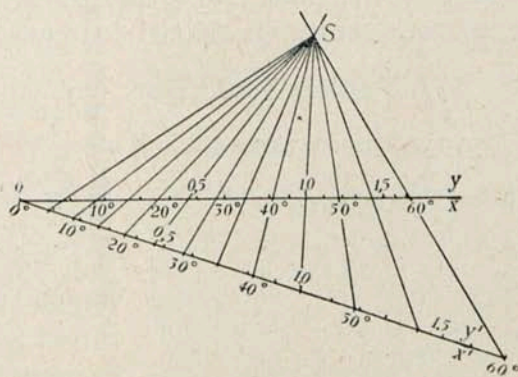
gdy znany jest kąt x . Obie skale $\xi' = \beta \operatorname{tg} x'$ i $\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ nie są regularne,

więc odczytana wartość kąta x będzie obciążona błędem Δx różnym w różnych miejscach skali. Z rysunku 29 widać jednak wyraźnie, że skala

$\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ jest bardziej zbliżona do regularnej niż skala pomocnicza.

Widzimy więc, że rzutowanie skali może poprawić jej regularność. Można się zapytać, jaką funkcję postaci (8) najlepiej jest obrać, by uzyskana skala $\xi = af(x)$ możliwie najlepiej poprawiła nie-regularność danej skali $\xi' = \beta \varphi(x')$ w ustalonym przedziale $p \leq x' \leq q$.

W odpowiedzi na to pytanie można podać pewien prosty sposób postępowania prowadzący do wyboru odpowiedniej funkcji homograficznej. Zakładając tylko postać (8) funkcji $f(x)$ wiemy, że skala $\xi = af(x)$ powstanie przez rzutowanie skali $\xi' = \beta \varphi(x')$. Dwa spośród trzech



Rys. 30

punktów, które wyznaczają rzutowanie są ustalone, bo końce obu skal muszą sobie odpowiadać. Pozostaje do ustalenia jeszcze jeden punkt skali. Niesprecyzowany dokładnie warunek możliwie najlepszego poprawienia regularności możemy zastąpić prostym i naturalnym warunkiem, aby środek skali miał kąt równy średniej arytmetycznej kąt końców skali. Wracając do poprzedniego przykładu, gdy chcemy przez rzutowanie poprawić regularność skali $\xi' = \beta \operatorname{tg} x'$ dla $0^\circ \leq x \leq 60^\circ$, należy — w myśl sformułowanego warunku — środkowi rozporządzanego odcinka, to jest

punktowi o współrzędnej $\xi=2,5$ cm, przyporządkować średnią wartość kątów $x=30^\circ$. W ten sposób konstrukcja szukanej skali, a więc także postać funkcji (8), zostanie jednoznacznie ustalona. Rysunek 30 przedstawia rozwiązanie konstrukcyjne postawionego zagadnienia. Widzimy, że skala uzyskana na rysunku 30 jest bliższa skali regularnej niż odpowiadająca jej skala $\xi = a \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$ na rysunku 29.

Rzutowe przekształcenie skal funkcyjnych w celu zbliżenia ich do regularności odgrywa ważną rolę w *nomografii*, o której będziemy mówili w osobnym rozdziale.

Omówione trzy typy skal funkcyjnych obejmują przypadki o najważniejszych własnościach, a mianowicie:

1° skale regularne — stały błąd bezwzględny, łatwość konstrukcji, łatwość odczytu,

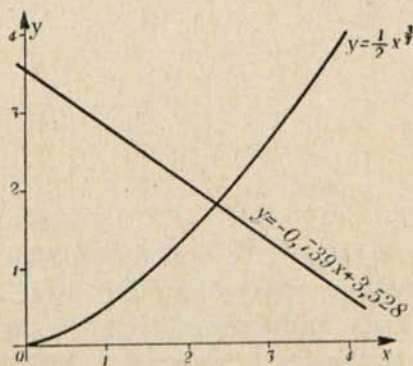
2° skale logarytmiczne — błąd względny w przybliżeniu stały, przedstawianie odcinków skali, można je stosować tylko w przedziałach $0 < a \leq x \leq b < \infty$,

3° skale rzutowe — łatwość konstrukcji przez rzutowanie skali regularnej, możliwość uwzględnienia przedziałów nieskończonych.

Prócz omówionych typów spotykaliśmy się już także z innymi typami skal, np. skale funkcyj trygonometrycznych, potęgowych itp. Przez rzutowanie można je zbliżyć do regularności.

§74. Papiery funkcyjne. Wróćmy do omawiania wykresów funkcyj.

Narysujmy np. wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^{3/2}$ dla $0 \leq x \leq 4$. Można w tym celu obliczyć wartości funkcji w dostatecznie gęsto położonych punktach,



Rys. 31

np. dla wartości x co $1/4$, i w odpowiednio obranym układzie współrzędnych umieścić punkty o kotach x, y związanych podaną zależnością funkcyjną. Przez umieszczone punkty na płaszczyźnie prowadzimy linię ciągłą będącą przybliżeniem właściwego wykresu (rys. 31). Gdy chcemy uzyskać dokładny wykres, tak by można było zastąpić obliczenia odczytywaniem wartości funkcji z wykresu, musimy dokładnie i gęsto obliczać wartości funkcji. O wiele łatwiej jest narysować wykres funkcji $y = -0,739x + 3,528$.

Ta funkcja jest liniowa i wykresem jej jest linia prosta. Do narysowania wykresu wystarczy więc znaleźć dowolne dwa punkty