

ROZDZIAŁ VI

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH. KRAKOWIANY

§ 52. Uwagi ogólne. Rozwiązanie układu równań liniowych jest jednym z najczęściej spotykanych w praktyce zadań numerycznych. Nierzadko zachodzi potrzeba rozwiązania układu kilkunastu, kilkudziesięciu, a nawet kilkuset takich równań. Ze wzrostem liczby równań w układzie wzrastają niezmiernie szybko trudności rachunkowe, trudności w ocenie błędu, przedłuża się czas potrzebny do rozwiązania danego układu. I tak np. — jak wskazuje nasza praktyka — można z grubsza przyjąć, że czas T potrzebny do rozwiązania układu n równań liniowych z n niewiadomymi jest proporcjonalny do n^3 , tzn.

$$T \approx an^3,$$

gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli przyjąć, że na rozwiązanie układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi za pomocą arytmometru potrzeba w przypadku wykonywania obliczeń z dokładnością do sześciu miejsc dziesiętnych około kwadransa czasu, czyli 0,25 godzin, to otrzymujemy $a \approx 0,25/3^3$ godzin $\approx 0,01$ godzin, a stąd

$$(1) \quad T \approx 0,01n^3.$$

Za pomocą tego wzoru można szacować czas potrzebny do rozwiązania różnych układów równań liniowych. (Oczywiście przy założeniu, że używa się stale tej samej metody rozwiązywania, korzysta z tych samych pomocy rachunkowych, np. z arytmometru określonego typu, oraz że obliczenia wykonuje się stale z dokładnością tego samego rzędu). Ze wzoru (1) obliczamy np., że czas potrzebny do rozwiązania układu 10 równań liniowych z 10 niewiadomymi jest około 10 godzin, układu 40 równań z tyluż niewiadomymi około 640 godzin, a w przypadku 100 równań już około 10000 godzin, czyli 1250 dni roboczych, tj. około 5 lat pracy dla jednego rachmistrza!

Nie przeto dziwnego, że — skoro praktyka żąda często rozwiązywania układów wielu równań liniowych — robi się wiele starań, aby rozwiązy-

wanie to uczynić możliwie szybkim i prostym, konstruuje się w tym celu specjalne maszyny, udoskonala istniejące i wynajduje nowe metody rachunku, wprowadza dogodne schematy obliczeń. Nawet pozornie drobne uproszczenia rachunku odgrywają nieraz decydującą rolę w bardzo długich obliczeniach, gdyż mogą np. zmniejszyć zmęczenie rachującego i ustrzec go od omyłek.

Ze względu na to, że rozwiązywanie układów równań liniowych jest zadaniem bardzo często w praktyce spotykanym i że wiele metod numerycznych (jak np. metoda najmniejszych kwadratów) sprowadza ostatecznie różne zagadnienia do rozwiązania układu takich równań, wyłączyliśmy metody rozwiązywania układów równań liniowych w osobny rozdział.

Ponieważ dyskusję istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu równań liniowych przeprowadza się za pomocą wyznaczników w kursie algebry ¹⁾, ograniczymy się tylko do przypadku, gdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest to tym bardziej usprawiedliwione, że w praktyce spotyka się prawie wyłącznie tylko takie układy. Z drugiej zaś strony zauważyć należy, że w przypadku dużej liczby równań z wieloma niewiadomymi dyskusja istnienia i jednoznaczności rozwiązania za pomocą wyznaczników może — z powodu ilości potrzebnych w tym celu rachunków — stać się praktyczną niemożliwością. Rachujący zdany jest wtedy na swój spryt i różnymi drogami może upewnić się co do istnienia i jednoznaczności rozwiązania. Odnoszą się tu uwagi, które uczyniliśmy na ten temat w rozdziale V. Dowód istnienia rozwiązania można nieraz zastąpić po prostu znalezieniem efektywnego rozwiązania. O jednoznaczności rozwiązania można znów nieraz przekonać się analizując przebieg obliczeń prowadzących do efektywnego rozwiązania.

Istnieje sporo metod rozwiązywania układów równań liniowych. Do najczęściej i najchętniej używanych należą: metoda wyznaczników, metoda eliminacji, metoda schematyczna, będąca pewnym wariantem metody eliminacji, metoda iteracyjna, metoda relaksacyjna i wreszcie metoda krakowianowa. Metodę iteracyjną i relaksacyjną opisaliśmy już w rozdziale V. Obie te metody stosowane są na ogół przez doświadczonych rachmistrzów i to na ogół tylko w przypadkach, do których te metody specjalnie się nadają. Rachmistrz mniej doświadczony bez wątpienia szybciej rozwiąże układ równań liniowych którąś z pozostałych metod. Metoda wyznacznikowa, której opis czytelnik znaleźć może w każdym niemal kursie algebry ²⁾, jest bardzo pożyteczna w rozważaniach

¹⁾ Patrz np. W. Sierpiński, *Zarys algebry wyższej*, Warszawa-Wrocław 1951, rozdział III.

²⁾ Ibidem, rozdziały II i III.

teoretycznych, jednak do numerycznego rozwiązywania układów równań liniowych, zwłaszcza przy większej ich liczbie, nie nadaje się ze względu na dużą ilość rachunków i ich niewygodny schemat.

W rozdziale niniejszym opiszemy jedynie trzy metody: *eliminacji*, *schematyczną* i *krakowianową*. Metoda eliminacji polega na kolejnym eliminowaniu niewiadomych z danego układu równań przez odpowiednie mnożenie równań przez stałe czynniki i dodawanie stronami. Metodę schematyczną można otrzymać z metody eliminacji przez odpowiednie uporządkowanie wykonywanych działań. Metoda schematyczna jest bardzo wygodna w użyciu, wymaga jednak od rachującego znacznie więcej uwagi niż metoda eliminacji. Można ją sobie jednak łatwo przyswoić. Metoda krakowianowa jest do przyswojenia trudniejsza, wymaga znajomości teorii krakowianów przynajmniej w wąskim zakresie i ponadto wprawy w działaniach krakowianowych. Daje ona jednak dużo udogodnień rachunkowych, pozwala dokonywać w zręczny sposób kontrolę obliczeń, jak również umożliwia różnego rodzaju dyskusje teoretyczne bez użycia wyznaczników. Trudno by rozstrzygnąć obiektywnie, która z metod — schematyczna czy krakowianowa — jest lepsza. Obie mają wielu zwolenników. Wybór jednej z nich zależy w dużej mierze od gustu i metody pracy rachującego.

Czytelnikowi napotykaćemu w swej praktyce numerycznej jedynie układy o małej liczbie równań i to niezbyt często, wystarczy najłatwiejsza do przyswojenia metoda eliminacji. Natomiast czytelnik mający do czynienia z układami o wielkiej liczbie równań i to dość często, powinien znać wszystkie opisane w niniejszej książce metody i dobrać taką, która dla niego jest najwygodniejsza. Trud włożony w przyswojenie sobie tych metod opłacony będzie późniejszą oszczędnością czasu i wysiłku.

Nie będziemy przeprowadzać ogólnej dyskusji błędów, z jakimi się spotykamy przy rozwiązywaniu układów równań liniowych. Na ogół jest to dyskusja trudna i bardzo żmudna, szczególnie w przypadku wielkiej liczby równań. Zwrócimy jedynie czytelnikowi uwagę na dwie rzeczy: po pierwsze pamiętać należy o tym, że rozwiązywanie układu równań liniowych wymaga wielkiej liczby działań, które są co prawda elementarne, ale wielka ich liczba powoduje bardzo szybkie narastanie błędów; po drugie pamiętać należy o tym, że nieraz trafiają się w praktyce „złośliwe” układy równań, np. układy o wyznaczniku charakterystycznym bliskim zera, w których drobne różnice w wartościach współczynników lub drobne „zaokrąglenia” wyników działań mogą mieć bardzo wielki wpływ na rozwiązanie układu. Powoduje to nieraz, że chcąc uzyskać nawet grube przybliżenie rozwiązania należy mieć współczynniki podane z bardzo dużą dokładnością (kilkunastu, a nawet kilkudziesięciu cyfr dziesiętnych) i wykonywać obliczenia również z dużą dokładnością.

Mając obliczoną niewiadomą x_n , cofamy się do układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi x_{n-1} i x_n i z któregośkolwiek równania tego układu obliczamy x_{n-1} . Następnie cofamy się do układu trzech równań z trzema niewiadomymi x_{n-2}, x_{n-1}, x_n i z któregośkolwiek z tych równań obliczamy x_{n-2} . Postępując dalej analogicznie obliczamy kolejno wszystkie niewiadome do x_1 włącznie.

Powyższa metoda rozwiązywania układu (2) nosi nazwę *metody eliminacji*.

PRZYKŁAD 1. Rozwiązać układ równań

$$(4) \quad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= -8,9, & 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 22,7, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 17,2, & 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -10,1. \end{aligned}$$

Mnożymy drugie równanie przez $2/3$, trzecie równanie przez $2/5$, a czwarte — przez $2/3$ i odejmujemy je stronami od równania pierwszego. Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$(5) \quad \begin{aligned} -\frac{7}{3}x_2 + \frac{17}{3}x_3 - \frac{29}{3}x_4 &= -\frac{61,1}{3}, \\ -\frac{11}{5}x_2 + \frac{37}{5}x_3 - \frac{51}{5}x_4 &= -\frac{89,9}{5}, \\ -\frac{13}{3}x_2 + \frac{13}{3}x_3 - \frac{13}{3}x_4 &= -\frac{6,5}{3}. \end{aligned}$$

Zanim przystąpimy do dalszej eliminacji niewiadomych uprościmy ten układ: pierwsze z równań (5) mnożymy stronami przez -3 , drugie przez -5 , a trzecie przez $-3/13$. Otrzymujemy

$$(5a) \quad \begin{aligned} 7x_2 - 17x_3 + 29x_4 &= 61,1, \\ 11x_2 - 37x_3 + 51x_4 &= 89,9, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0,5. \end{aligned}$$

Aby wyeliminować z tego układu niewiadomą x_2 , mnożymy drugie równanie przez $7/11$, a trzecie przez 7 i odejmujemy stronami od pierwszego. Otrzymujemy w ten sposób układ równań

$$\frac{72}{11}x_3 - \frac{38}{11}x_4 = \frac{42,8}{11}, \quad -10x_3 + 22x_4 = 57,6,$$

w którym mnożymy pierwsze równanie przez $11/2$, a drugie przez $-1/2$. Przez to układ ten przybiera postać

$$(6) \quad \begin{aligned} 36x_3 - 19x_4 &= 21,4, & 5x_3 - 11x_4 &= -28,8. \end{aligned}$$

Aby wyeliminować z tego układu niewiadomą x_3 , mnożymy drugie równanie przez $36/5$ i odejmujemy stronami od pierwszego. Otrzymujemy w ten sposób równanie

$$\frac{301}{5}x_4 = \frac{1143,8}{5},$$

z którego obliczamy, że $x_4 = 3,8$. Podstawiając tę wartość do drugiego z równań (6) obliczamy

$$x_3 = (-28,8 + 11 \cdot 3,8)/5 = 2,6.$$

Podstawiając obliczone już wartości x_3 i x_4 do ostatniego z równań (5a) obliczamy

$$x_2 = 0,5 + 2,6 - 3,8 = -0,7.$$

Podstawiając wreszcie obliczone wartości x_2, x_3 i x_4 do pierwszego z równań (4) obliczamy

$$x_1 = [-8,9 + 3 \cdot (-0,7) - 5 \cdot 2,6 + 7 \cdot 3,8]/2 = 1,3.$$

Układ (4) ma zatem rozwiązanie:

$$x_1 = 1,3, \quad x_2 = -0,7, \quad x_3 = 2,6, \quad x_4 = 3,8.$$

Gdy współczynniki układu są podane w przybliżeniu z określoną dokładnością i obliczenia wykonujemy w granicach określonej liczby miejsc dziesiętnych, a zależy nam na oszacowaniu błędów, jakimi obarczone są przybliżone wartości niewiadomych otrzymane z rachunku, to zadanie staje się znacznie trudniejsze. Podamy przykład takiego zadania.

PRZYKŁAD 2. Rozwiązać układ równań normalnych z przykładu 6 w rozdziale IV.

$$19,000000a_0 + 14,922565a_1 + 16,060953a_2 + 19,432753a_3 + 25,073787a_4 = 11,951883,$$

$$14,922565a_0 + 16,060953a_1 + 19,432753a_2 + 25,073787a_3 + 33,692135a_4 = 12,251829,$$

$$(7) \quad 16,060953a_0 + 19,432753a_1 + 25,073787a_2 + 33,692135a_3 + 46,554938a_4 = 14,338249,$$

$$19,432753a_0 + 25,073787a_1 + 33,692135a_2 + 46,554938a_3 + 65,652619a_4 = 18,059804,$$

$$25,073787a_0 + 33,692135a_1 + 46,554938a_2 + 65,652619a_3 + 94,031234a_4 = 23,829405,$$

w którym współczynniki podano z dokładnością do 0,0000005.

Zastosujemy metodę eliminacji z pełną dyskusją błędów. Ponieważ metoda eliminacji wymaga wykonywania jedynie czterech działań arytmetycznych, dyskusja błędu polega na stosowaniu reguł przenoszenia się błędów przy dodawaniu, odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu (por. rozdział I A).

Rozwiązanie rozpoczynamy od eliminacji niewiadomej a_0 z układu (7). W tym celu mnożymy drugie z równań tego układu przez

$$\begin{array}{r} 05 \\ 19,000000 \\ \hline 05 \end{array} = 1,273239554, \\ 14,922565$$

trzecie równanie przez

$$\begin{array}{r} 05 \\ 19,000000 \\ \hline 05 \end{array} = 1,182993313, \\ 16,060953$$

czwarte równanie przez

$$\begin{array}{r} 05 \\ 19,000000 \\ \hline 05 \end{array} = 0,9777307415 \\ 19,432753$$

i piąte równanie przez

$$\begin{array}{r} 05 \\ 19,000000 \\ \hline 05 \end{array} = 0,7577634763 \\ 25,073787$$

i odejmujemy otrzymane w ten sposób równania stronami od pierwszego równania. Dostajemy stąd następujący układ równań:

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccccc} 25 & 27 & 32 & 38 & 22 \\ 5,5268756a_1 + 8,6815968a_2 + 12,4921844a_3 + 17,8243719a_4 = 3,6476303, \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 25 & 29 & 34 & 43 & 22 \\ 8,0662519a_1 + 13,6011694a_2 + 20,4248174a_3 + 30,0003933a_4 = 5,0101697, \end{array} \\ (8) \quad \begin{array}{cccccc} 24 & 28 & 35 & 44 & 15 \\ 9,5928474a_1 + 16,8808831a_2 + 26,0854411a_3 + 39,1167969a_4 = 5,7057426, \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 20 & 26 & 33 & 42 & 18 \\ 10,6081043a_1 + 19,2166787a_2 + 30,3164038a_3 + 46,1796478a_4 = 6,1051698. \end{array} \end{array}$$

Z tego układu eliminujemy teraz niewiadomą a_1 . W tym celu mnożymy drugie z równań (8) przez

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5,5268756 \\ \hline 25 \\ 8,0662519 \end{array} = 0,6851850982,$$

trzecie równanie przez

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5,5268756 \\ \hline 24 \\ 9,5928474 \end{array} = 0,5761454727,$$

czwarte równanie przez

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5,5268756 \\ \hline 20 \\ 10,6081043 \end{array} = 0,5210050207$$

i odejmujemy stronami otrzymane w ten sposób równania od równania pierwszego. Powstaje stąd układ równań

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} 119 & 163 & 225 & 64 \\ 0,63772179a_2 + 1,50259612a_3 + 2,73145053a_4 = -0,21473668, \end{array} \\ (9) \quad \begin{array}{cccc} 112 & 159 & 223 & 55 \\ 1,04424757a_2 + 2,53682439a_3 + 4,71259354a_4 = -0,36029253, \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 106 & 152 & 215 & 53 \\ 1,33038928a_2 + 3,30281419a_3 + 6,23545646a_4 = -0,46680618. \end{array} \end{array}$$

Z tego układu eliminujemy niewiadomą a_2 . W tym celu mnożymy drugie z równań (9) przez

$$\begin{array}{r} 119 \\ 0,63772179 \\ \hline 112 \\ 1,04424757 \end{array} = 0,6106998075,$$

trzecie równanie przez

$$\begin{array}{r} 119 \\ 0,63772179 \\ \hline 106 \\ 1,33038928 \end{array} = 0,4793497660$$

i odejmujemy stronami otrzymane w ten sposób równania od równania pierwszego. Powstaje stąd układ równań

$$(10) \quad \begin{array}{r} 718 \qquad \qquad 121 \qquad \qquad 163 \\ 0,04664205a_3 + 0,14652944a_4 = -0,00529390, \\ 96 \qquad \qquad 1695 \qquad \qquad 193 \\ 0,08060709a_3 + 0,25751407a_4 = -0,00902675. \end{array}$$

Z tego układu eliminujemy a_3 , mnożąc drugie z równań (10) przez

$$\begin{array}{r} 718 \qquad \qquad 159 \\ 0,04664205 \\ 96 \\ \hline 0,08060709 \end{array} = 0,57863458$$

i odejmując stronami otrzymane w ten sposób równanie od równania pierwszego. Dostajemy w ten sposób równanie

$$\begin{array}{r} 509 \qquad \qquad 257 \\ 0,00247711a_4 = 0,00007071, \\ 204 \end{array}$$

z którego obliczamy, że $a_4 = 0,02855$, tzn. $a_4 = 0,02855 \pm 0,02040$.

Wstawiamy to przybliżenie do pierwszego z równań (10) i obliczamy

$$a_3 = \frac{\begin{array}{r} 163 \qquad 121 \qquad 204 \qquad 651 \\ -0,00529390 - 0,14652944 \cdot 0,02855 \\ 718 \end{array}}{0,04664205} = -0,20319.$$

Wstawiamy teraz a_3 i a_4 do pierwszego z równań (9) i obliczamy

$$a_2 = \frac{\begin{array}{r} 640 \qquad 163 \qquad 651 \qquad 225 \qquad 204 \qquad 241 \\ -0,21473668 + 1,50259612 \cdot -0,20319 - 2,73145053 \cdot 0,02855 \\ 119 \end{array}}{0,63772179} = 0,01975.$$

Przybliżenia a_2, a_3 i a_4 wstawiamy do pierwszego z równań (8) i obliczamy

$$\begin{array}{r} 592 \\ a_1 = 0,99615, \end{array}$$

a z pierwszego równania (7) obliczamy

$$\begin{array}{r} 763 \\ a_0 = 0,00012. \end{array}$$

Na podstawie oszacowań błędów otrzymanych dla a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4 zdawać by się mogło, że obliczone przybliżenia nie mają żadnego praktycznego znaczenia, ponieważ są obarczone zbyt dużymi błędami. Tak jednak nie jest, albowiem błędy w danym przypadku nie są aż tak duże, a tylko nasze oszacowania są bardzo niedokładne. Oparliśmy je bowiem na rozpatrywaniu w każdym działaniu błędów maksymalnych. Pamiętać jednak należy, że różnice w wartościach współczynników, po-

wodujące maksymalne błędy w jednym działaniu, często nie dają błędów maksymalnych w innym działaniu. Różnymi sposobami można powiększyć dokładność oszacowań dla błędów otrzymanych przybliżeń. Nie wdając się w ogólne teoretyczne dyskusje pokażemy jeden z nich na tym samym przykładzie liczbowym. Uzyskane poprzednio niedokładne oszacowania błędów będą potrzebne do oszacowań bardziej precyzyjnych.

Podstawiamy otrzymane dla a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 przybliżenia w lewe strony równań (7) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & 19,000000 \cdot 0,00012 + 14,922565 \cdot 0,99615 + 16,060953 \cdot 0,01975 + \\
 & \quad + 19,432753 \cdot (-0,20319) + 25,073787 \cdot 0,02855 = 11,95191248328, \\
 & 14,922565 \cdot 0,00012 + 16,060953 \cdot 0,99615 + 19,432753 \cdot 0,01975 + \\
 & \quad + 25,073787 \cdot (-0,20319) + 33,692135 \cdot 0,02855 = 12,25187358422, \\
 & 16,060953 \cdot 0,00012 + 19,432753 \cdot 0,99615 + 25,073787 \cdot 0,01975 + \\
 (11) \quad & \quad + 33,692135 \cdot (-0,20319) + 46,554938 \cdot 0,02855 = 14,33831007781, \\
 & 19,432753 \cdot 0,00012 + 25,073787 \cdot 0,99615 + 33,692135 \cdot 0,01975 + \\
 & \quad + 46,554938 \cdot (-0,20319) + 65,652619 \cdot 0,02855 = 18,05988893689, \\
 & 25,073787 \cdot 0,00012 + 33,692135 \cdot 0,99615 + 46,554938 \cdot 0,01975 + \\
 & \quad + 65,652619 \cdot (-0,20319) + 94,031234 \cdot 0,02855 = 23,82952523628.
 \end{aligned}$$

Niech teraz „prawdziwy” układ równań będzie

$$\begin{aligned}
 & (19,000000 + \delta_1)(0,00012 + A_0) + (14,922565 + \delta_2)(0,99615 + A_1) + \\
 & \quad + (16,060953 + \delta_3)(0,01975 + A_2) + (19,432753 + \delta_4)(-0,20319 + A_3) + \\
 & \quad + (25,073787 + \delta_5)(0,02855 + A_4) = 11,951883 + \varepsilon_1, \\
 & (14,922565 + \delta_2)(0,00012 + A_0) + (16,060953 + \delta_3)(0,99615 + A_1) + \\
 & \quad + (19,432753 + \delta_4)(0,01975 + A_2) + (25,073787 + \delta_5)(-0,20319 + A_3) + \\
 & \quad + (33,692135 + \delta_6)(0,02855 + A_4) = 12,251829 + \varepsilon_2, \\
 & (16,060953 + \delta_3)(0,00012 + A_0) + (19,432753 + \delta_4)(0,99615 + A_1) + \\
 (12) \quad & \quad + (25,073787 + \delta_5)(0,01975 + A_2) + (33,692135 + \delta_6)(-0,20319 + A_3) + \\
 & \quad + (46,554938 + \delta_7)(0,02855 + A_4) = 14,338249 + \varepsilon_3, \\
 & (19,432753 + \delta_4)(0,00012 + A_0) + (25,073787 + \delta_5)(0,99615 + A_1) + \\
 & \quad + (33,692135 + \delta_6)(0,01975 + A_2) + (46,554938 + \delta_7)(-0,20319 + A_3) + \\
 & \quad + (65,652619 + \delta_8)(0,02855 + A_4) = 18,059804 + \varepsilon_4, \\
 & (25,073787 + \delta_5)(0,00012 + A_0) + (33,692135 + \delta_6)(0,99615 + A_1) + \\
 & \quad + (46,554938 + \delta_7)(0,01975 + A_2) + (65,652619 + \delta_8)(-0,20319 + A_3) + \\
 & \quad + (94,031234 + \delta_9)(0,02855 + A_4) = 23,829405 + \varepsilon_5,
 \end{aligned}$$

gdzie wiadomo, że $|\delta_i| < 0,0000005$ ($i=1,2,\dots,9$) oraz $|\varepsilon_j| < 0,0000005$ ($j=1,2,3,4,5$), a błędy $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ należy oszacować.

Odejmując stronami odpowiadające sobie równania układów (11) i (12) otrzymujemy po uporządkowaniu

$$19,000000 \Delta_0 + 14,922565 \Delta_1 + 16,060953 \Delta_2 + 19,432753 \Delta_3 + \\ + 25,073787 \Delta_4 = -0,00002948328 + B_1,$$

$$14,922565 \Delta_0 + 16,060953 \Delta_1 + 19,432753 \Delta_2 + 25,073787 \Delta_3 + \\ + 33,692135 \Delta_4 = -0,00004458422 + B_2.$$

$$(13) \quad 16,060953 \Delta_0 + 19,432753 \Delta_1 + 25,073787 \Delta_2 + 33,692135 \Delta_3 + \\ + 46,554938 \Delta_4 = -0,00006107781 + B_3,$$

$$19,432753 \Delta_0 + 25,073787 \Delta_1 + 33,692135 \Delta_2 + 46,554938 \Delta_3 + \\ + 65,652619 \Delta_4 = -0,00008493689 + B_4,$$

$$25,073787 \Delta_0 + 33,692135 \Delta_1 + 46,554938 \Delta_2 + 65,652619 \Delta_3 + \\ + 94,031234 \Delta_4 = -0,00012023628 + B_5,$$

gdzie

$$B_1 = \varepsilon_1 - a_0 \delta_1 - a_1 \delta_2 - a_2 \delta_3 - a_3 \delta_4 - a_4 \delta_5,$$

$$B_2 = \varepsilon_2 - a_0 \delta_2 - a_1 \delta_3 - a_2 \delta_4 - a_3 \delta_5 - a_4 \delta_6,$$

$$(14) \quad B_3 = \varepsilon_3 - a_0 \delta_3 - a_1 \delta_4 - a_2 \delta_5 - a_3 \delta_6 - a_4 \delta_7,$$

$$B_4 = \varepsilon_4 - a_0 \delta_4 - a_1 \delta_5 - a_2 \delta_6 - a_3 \delta_7 - a_4 \delta_8,$$

$$B_5 = \varepsilon_5 - a_0 \delta_5 - a_1 \delta_6 - a_2 \delta_7 - a_3 \delta_8 - a_4 \delta_9$$

oraz

$$a_0 = 0,00012 + \Delta_0,$$

$$a_1 = 0,99615 + \Delta_1,$$

$$(15) \quad a_2 = 0,01975 + \Delta_2,$$

$$a_3 = -0,20319 + \Delta_3,$$

$$a_4 = 0,02855 + \Delta_4.$$

Rozwiążemy powyższy układ równań (13) uważając prawe strony tych równań za znane. W tym celu zastosujemy znowu metodę eliminacji, ale z pewnymi zmianami dla wygody rachunku. Dzielimy najpierw każde z równań (13) przez współczynnik przy niewiadomej Δ_0 . Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
& \overset{04}{\Delta_0} + 0,78539815789474 \overset{04}{\Delta_1} + 0,84531331578947 \overset{04}{\Delta_2} + \\
& + 1,02277647368421 \overset{01}{\Delta_3} + 1,31967300000000 \overset{00}{\Delta_4} = \\
& = -0,00000155175158 + 0,0526316 \overset{02}{B_1}, \overset{03}{}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{03}{\Delta_0} + 1,07628634889511 \overset{01}{\Delta_1} + 1,30223946084336 \overset{01}{\Delta_2} + \\
& + 1,68025986149164 \overset{01}{\Delta_3} + 2,25779783837430 \overset{01}{\Delta_4} = \\
& = -0,00000298770486 + 0,0670126 \overset{02}{B_2}, \overset{01}{}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{05}{\Delta_0} + 1,20993772909989 \overset{00}{\Delta_1} + 1,56116433439535 \overset{00}{\Delta_2} + \\
& + 2,09776686352298 \overset{01}{\Delta_3} + 2,89864107067619 \overset{03}{\Delta_4} = \\
(16) \quad & = -0,00000380287583 + 0,0622628 \overset{02}{B_3}, \overset{01}{}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{05}{\Delta_0} + 1,29028486082234 \overset{02}{\Delta_1} + 1,73378084927030 \overset{02}{\Delta_2} + \\
& + 2,39569442373914 \overset{03}{\Delta_3} + 3,37845178189627 \overset{05}{\Delta_4} = \\
& = -0,00000437081097 + 0,0514595 \overset{01}{B_4}, \overset{02}{}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \overset{04}{\Delta_0} + 1,34371943895033 \overset{02}{\Delta_1} + 1,85671745556425 \overset{02}{\Delta_2} + \\
& + 2,61837667361536 \overset{03}{\Delta_3} + 3,75018077644195 \overset{03}{\Delta_4} = \\
& = -0,00000479529797 + 0,0398823 \overset{04}{B_5}, \overset{02}{}
\end{aligned}$$

Od równań tych (z wyjątkiem pierwszego) odejmujemy stronami równanie pierwsze i każde z otrzymanych w ten sposób równań dzielimy przez współczynnik przy niewiadomej Δ_1 . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \overset{57}{\Delta_1} + 1,57079647503913 \overset{63}{\Delta_2} + 2,26026153054317 \overset{4}{\Delta_3} + \\
 & \overset{83}{+ 3,22503582956761 \Delta_4} = \\
 & = -0,00000493644405 - 0,18093412 \overset{15}{B_1} + 0,23037236 \overset{11}{B_2}, \\
 & \overset{46}{\Delta_1} + 1,68618208327148 \overset{59}{\Delta_2} + 2,53213236821993 \overset{3}{\Delta_3} + \\
 & \overset{87}{+ 3,71924828160055 \Delta_4} = \\
 (17) \quad & = -0,00000530250748 - 0,12397337 \overset{14}{B_1} + 0,14665959 \overset{8}{B_2}, \\
 & \overset{47}{\Delta_1} + 1,75973644845274 \overset{60}{\Delta_2} + 2,71925947364830 \overset{3}{\Delta_3} + \\
 & \overset{88}{+ 4,07770450272979 \Delta_4} = \\
 & = -0,00000558354849 - 0,10424438 \overset{11}{B_1} + 0,10192287 \overset{7}{B_2}, \\
 & \overset{40}{\Delta_1} + 1,81150920463316 \overset{51}{\Delta_2} + 2,85785309296187 \overset{5}{\Delta_3} + \\
 & \overset{73}{+ 4,35324222613673 \Delta_4} = \\
 & = -0,00000580946222 - 0,09426759 \overset{14}{B_1} + 0,07143253 \overset{6}{B_2}.
 \end{aligned}$$

Odejmujemy stronami pierwsze z równań (17) kolejno od równań drugiego, trzeciego i czwartego. Każde z otrzymanych w ten sposób równań dzielimy przez współczynnik przy niewiadomej Δ_2 . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \overset{36}{\Delta_2} + 2,356193652239 \overset{57}{\Delta_3} + 4,283137729254 \overset{4}{\Delta_4} = \\
 & = -0,0000031725224 + 0,493656 \overset{28}{B_1} - 1,996543 \overset{22}{B_2} + 1,271039 \overset{06}{B_3}, \\
 & \overset{23}{\Delta_2} + 2,429332103802 \overset{36}{\Delta_3} + 4,512907765132 \overset{5}{\Delta_4} = \\
 (18) \quad & = -0,0000034249208 + 0,405895 \overset{17}{B_1} - 1,219289 \overset{13}{B_2} + 0,539446 \overset{06}{B_3}, \\
 & \overset{18}{\Delta_2} + 2,482592272650 \overset{29}{\Delta_3} + 4,686941145455 \overset{4}{\Delta_4} = \\
 & = -0,0000036268052 + 0,360041 \overset{17}{B_1} - 0,957046 \overset{07}{B_2} + 0,296754 \overset{02}{B_3}.
 \end{aligned}$$

Od drugiego i trzeciego z równań (18) odejmujemy stronami równanie pierwsze, każde z otrzymanych w ten sposób równań dzielimy przez współczynnik przy niewiadomej Δ_3 i dostajemy

$$\begin{aligned} \Delta_3 + 3,1415764341 \Delta_4 &= -0,000003450967 - 1,19993 B_1 + \\ &+ 10,62716 B_2 - 17,37853 B_3 + 7,37568 B_4, \\ (19) \quad \Delta_3 + 3,1946821485 \Delta_4 &= -0,000003594049 - 1,05709 B_1 + \\ &+ 8,22396 B_2 - 10,05580 B_3 + 2,34776 B_5. \end{aligned}$$

Odejmując wreszcie równania (19) stronami od siebie i dzieląc otrzymane w ten sposób równanie przez współczynnik przy Δ_4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= -0,0000026943 + 2,690 B_1 - 45,253 B_2 + 137,890 B_3 - \\ &- 138,887 B_4 + 44,209 B_5. \end{aligned}$$

Wstawiamy otrzymane na Δ_4 wyrażenie do pierwszego z równań (19) i obliczamy Δ_3 , następnie mając już Δ_3 i Δ_4 obliczamy Δ_2 z pierwszego z równań (18); analogicznie z pierwszego z równań (17) obliczamy Δ_1 i z pierwszego z równań (16) Δ_0 . Otrzymujemy rozwiązanie układu (13):

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 0,0000014908 + 0,746 B_1 - 5,440 B_2 + 11,710 B_3 - 9,650 B_4 + 2,691 B_5, \\ \Delta_1 &= -0,0000021677 - 5,439 B_1 + 65,001 B_2 - 168,182 B_3 + \\ &+ 152,793 B_4 - 45,253 B_5, \\ \Delta_2 &= -0,0000034447 + 11,712 B_1 - 168,182 B_2 + 472,302 B_3 - \\ &- 450,571 B_4 + 137,889 B_5, \\ (20) \quad \Delta_3 &= 0,0000050133 - 9,651 B_1 + 152,793 B_2 - 450,571 B_3 + \\ &+ 443,700 B_4 - 138,886 B_5, \\ \Delta_4 &= -0,0000026943 + 2,690 B_1 - 45,253 B_2 + 137,890 B_3 - \\ &- 138,887 B_4 + 44,209 B_5. \end{aligned}$$

Z poprzednich niedokładnych oszacowań mieliśmy

$$(21) \quad \begin{aligned} |\Delta_0| &\leq 0,76300, & |\Delta_1| &\leq 0,59200, & |\Delta_2| &\leq 0,24100, \\ |\Delta_3| &\leq 0,06510, & |\Delta_4| &\leq 0,02040. \end{aligned}$$

Wynikają stąd na mocy (15) następujące nierówności:

$$\begin{aligned} |a_0| &\leq 0,76312, & |a_1| &\leq 1,58815, & |a_2| &\leq 0,26075, \\ |a_3| &\leq 0,26829, & |a_4| &\leq 0,04895. \end{aligned}$$

Ponieważ $|\varepsilon_j| < 0,0000005$ ($j=1,2,3,4,5$) i $|\delta_i| < 0,0000005$ ($i=1,2,\dots,9$), więc na mocy (14) otrzymujemy oszacowania

$$|B_j| < 0,000002 \quad (j=1,2,3,4,5).$$

Ze wzorów (20) otrzymujemy wtedy

$$(22) \quad \begin{aligned} |\Delta_0| &< 0,000063, & |\Delta_1| &< 0,000877, & |\Delta_2| &< 0,002486, \\ |\Delta_3| &< 0,002397, & |\Delta_4| &< 0,000741. \end{aligned}$$

Są to oszacowania znacznie lepsze niż (21), ale jeszcze nienajlepsze. Szacujemy z ich pomocą jeszcze raz. Na mocy (15) mamy

$$\begin{aligned} |a_0| &< 0,000183, & |a_1| &< 0,997027, & |a_2| &< 0,022236, \\ |a_3| &< 0,205587, & |a_4| &< 0,029291, \end{aligned}$$

a stąd na mocy (14)

$$|B_j| < 0,00000113 \quad (j=1,2,3,4,5).$$

Mamy wtedy na podstawie wzorów (20):

$$(23) \quad \begin{aligned} |\Delta_0| &< 0,000036, & |\Delta_1| &< 0,000496, & |\Delta_2| &< 0,001406, \\ |\Delta_3| &< 0,001357, & |\Delta_4| &< 0,000420. \end{aligned}$$

Oszacowania (23) są nieco lepsze od oszacowań (22). Są one ponadto dość dokładne. Zakładając bowiem we wzorach (14) $\delta_i = 0$ ($i=1,2,\dots,9$) i $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0,0000005$ otrzymujemy $B_1 = -B_2 = B_3 = -B_4 = -B_5 = 0,0000005$ i ze wzorów (20)

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\approx 0,000017, & \Delta_1 &\approx -0,000220, & \Delta_2 &\approx 0,000617, \\ \Delta_3 &\approx -0,000593, & \Delta_4 &\approx 0,000182. \end{aligned}$$

Wnioskujemy stąd, że niewiele można poprawić oszacowania (23). Te nieznaczną poprawę można by uzyskać wstawiając w (20) wzory (14), a następnie (15), porządkując otrzymane wyrażenia względem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5$, $\delta_1, \dots, \delta_9$ i przed ostatecznym oszacowaniem błędów $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ szacując możliwie dokładnie współczynniki przy $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_9$.

