

§ 83. Nomogramy równań o czterech i więcej zmiennych. Umiemy już narysować nomogram siatkowy dla równania o trzech zmiennych

$$(59) \quad F(x, y, z) = 0,$$

a dla pewnych typów równania (59) umiemy także narysować nomogramy kolineacyjne. Nasuwa się wobec tego pytanie, czy można skonstruować nomogram dla równania o czterech zmiennych

$$(60) \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

lub ogólniej dla równania o n zmiennych

$$(61) \quad F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

Okazuje się, że dla pewnych typów równań (61) jest to możliwe. Nomogramy takie można uzyskać przez składanie nomogramów siatkowych lub kolineacyjnych dla równań trzech zmiennych, bądź też przez zastosowanie specjalnych metod, jak nomogramy z binarnym polem lub nomogramy z transparentem. Nie możemy się tutaj szczegółowo zająć tym zagadnieniem i ograniczymy się tylko do kilku najprostszych przykładów.

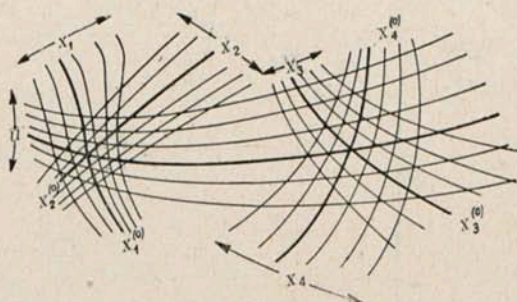
Załóżmy, że równanie (60) daje się zapisać w postaci układu dwóch równań o trzech zmiennych

$$(62) \quad \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, u) &= 0, \\ F_2(x_3, x_4, u) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie równanie (60) otrzymuje się z układu (62) przez wyrugowanie pomocniczej zmiennej u . Załóżmy, że dla każdego z dwóch równań układu (62) możemy narysować nomogram siatkowy. Narysujmy je obok siebie

tak, by rodzina linii u była wspólna dla obu nomogramów (rys. 73). Jest to możliwe, gdyż przy konstrukcji nomogramu siatkowego możemy dowolnie wybrać dwie rodziny linii.

Przypuśćmy teraz, że do danych wartości $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ zmiennych x_1, x_2, x_3 chcemy znaleźć wartość $x_4^{(0)}$ zmiennej x_4 , która wraz z danymi wartościami spełniałaby równanie (60). W tym celu na



Rys. 73

pierwszym nomogramie znajdujemy linię rodziny u przechodzącą przez punkt przecięcia linii rodzin x_1, x_2 o kotach $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$. Przez punkt przecięcia tej linii z linią rodziny x_3 o kocie $x_3^{(0)}$ na drugim nomogramie przechodzi

linia rodziny x_4 o kocie równej szukanej wartości $x_4^{(0)}$. Widzimy, że linie rodziny u nie muszą być nawet oznaczone kotami, chyba że z innych względów interesuje nas wartość pomocniczej zmiennej u .

Opisaną metodę łączenia nomogramów siatkowych można stosować kilkakrotnie, uzyskując nomogram dla równania (61), jeśli tylko da się ono sprowadzić do układu $n-2$ równań

$$(63) \quad \begin{aligned} F_1(x_1, x_2, u_1) &= 0, \\ F_2(x_3, u_1, u_2) &= 0, \\ F_3(x_4, u_2, u_3) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ F_{n-3}(x_{n-2}, u_{n-4}, u_{n-3}) &= 0, \\ F_{n-2}(x_{n-1}, x_n, u_{n-3}) &= 0 \end{aligned}$$

z $n-3$ pomocniczymi zmiennymi u_1, u_2, \dots, u_{n-3} .

Dla równań układu (63) rysujemy nomogramy siatkowe tak, by nomogramy funkcji $F_i=0$ i $F_{i+1}=0$ ($i=1, 2, \dots, n-3$) miały wspólną rodzinę linii zmiennej pomocniczej u_i . Uzyskujemy w ten sposób *złożony nomogram siatkowy* dla równania (61).

Narysujmy dla przykładu nomogram do obliczania prędkości v ciała na równi pochyłej

$$(64) \quad v = [v_0^2 + 2gl(\sin\varphi - K \cos\varphi)]^{1/2},$$

gdzie

v_0 — prędkość początkowa ($0 \text{ m/sek} \leq v_0 \leq 4 \text{ m/sek}$),

g — przyspieszenie ziemskie ($g=9,81 \text{ m/sek}^2$),

l — długość równi pochyłej ($0 \text{ cm} \leq l \leq 100 \text{ cm}$),

φ — kąt nachylenia równi pochyłej ($0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$),

K — współczynnik tarcia ($0 \leq K \leq 0,8$),

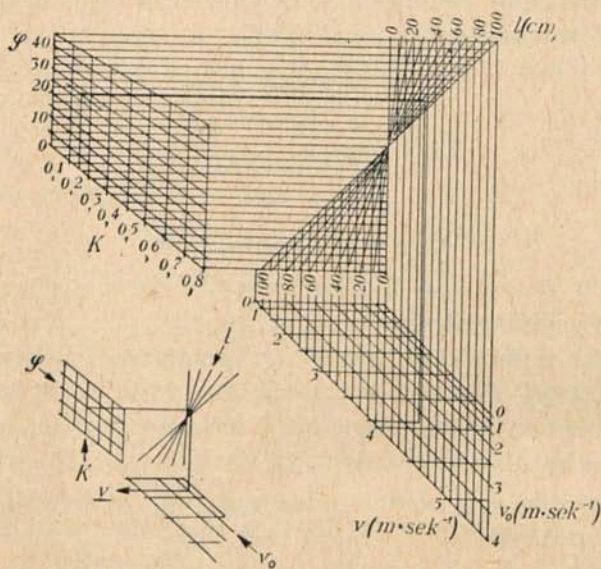
v — szukana prędkość ciała na końcu równi pochyłej (m/sek).

Mamy więc narysować nomogram dla równania (64), w którym występuje 5 zmiennych v_0, l, φ, K, v . Równanie to można sprowadzić do układu trzech równań

$$(65) \quad \begin{aligned} u_1 &= \sin\varphi - K \cos\varphi, \\ u_2 &= 2glu_1, \\ v^2 &= v_0^2 + u_2. \end{aligned}$$

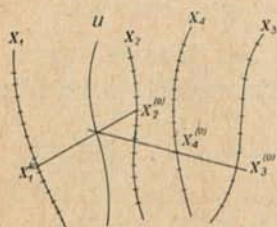
Na rysunku 74 pokazany jest gotowy nomogram siatkowy dla równania (64) uzyskany przez złożenie trzech nomogramów siatkowych dla trzech równań układu (65). Wszystkie trzy nomogramy są prostoliniowe, a wspólne dla poszczególnych par nomogramów rodziny linii pomocniczych zmiennych u_1 i u_2 są rodzinami prostych równoległych.

Na rysunku 74 odczytano dla przykładu $v \approx 3,85$ m/sek dla $K=0,15$, $\varphi=27^\circ$, $l=80$ cm i $v_0=3,2$ m/sek. Dokładniejsze obliczenie daje $v \approx 3,907$ m/sek. Nomogram wykonany dokładniej w większym formacie dałby z pewnością dokładniejszy wynik.



Rys. 74

Rozpatrzmy równanie (60) o czterech zmiennych i założmy, że da się ono sprowadzić do układu równań (62). Wiemy, że można wtedy dla równania (60) narysować nomogram siatkowy (rys. 73) złożony z dwu nomogramów siatkowych o wspólnej rodzinie linii pomocniczej zmiennej u . Jeżeli dla obu równań układu (62) można narysować nomogramy kolineacyjne takie, że zmienna pomocnicza u będzie miała w obu nomogramach identyczną skalę, to składając te dwa nomogramy tak, by skale u się pokrywały, uzyskamy złożony nomogram kolineacyjny dla równania (60). Schemat takiego nomogramu pokazany jest na rysunku 75. Posługujemy się takim nomogramem następująco. Niech np. dane będą wartości $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ zmiennych



Rys. 75

x_1, x_2, x_3 . Poszukujemy wartości $x_4^{(0)}$ zmiennej x_4 związanej z poprzednimi równaniem (60). Należy w tym celu połączyć prostą punkty o kotach $x_1^{(0)}$ i $x_2^{(0)}$ na skalach x_1, x_2 . Punkt przecięcia tej prostej ze skalą pomocniczej zmiennej u łączymy następnie z punktem o kocie $x_3^{(0)}$ na skali x_3 . Ta prosta przecina skalę x_4 w punkcie, którego kota jest szukaną wartością $x_4^{(0)}$ zmiennej x_4 . Widzimy, że na skali zmiennej

x_4 związanej z poprzednimi równaniem (60). Należy w tym celu połączyć prostą punkty o kotach $x_1^{(0)}$ i $x_2^{(0)}$ na skalach x_1, x_2 . Punkt przecięcia tej prostej ze skalą pomocniczej zmiennej u łączymy następnie z punktem o kocie $x_3^{(0)}$ na skali x_3 . Ta prosta przecina skalę x_4 w punkcie, którego kota jest szukaną wartością $x_4^{(0)}$ zmiennej x_4 . Widzimy, że na skali zmiennej

pomocniczej nie trzeba umieszczać kresek ani wypisywać kot, chyba że z innych względów interesuje nas wartość pomocniczej zmiennej u . Do znalezienia wartości jednej spośród zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 , gdy dane są wartości trzech pozostałych, wystarczy tylko ślepa skala pomocniczej zmiennej u , tj. tylko krzywa, na której ta skala jest położona. Niekiedy także rysuje się na ślepej skali dowolną podziałkę, która ułatwia orientację. Na tle takiej podziałki łatwiej jest wtedy odróżnić dany punkt od ewentualnych innych punktów.

Opisane postępowanie można — podobnie jak składanie nomogramów siatkowych — zastosować także do równań o n zmiennych. Jeżeli równanie (61) da się sprowadzić do układu równań (63), a ponadto dla wszystkich równań tego układu można narysować nomogramy kolineacyjne takie, że każda zmienna pomocnicza u_i ($i=1, 2, \dots, n-3$) będzie miała identyczne skale w obu nomogramach dla równań $F_i=0$ i $F_{i+1}=0$, to dla równania (61) można narysować złożony nomogram kolineacyjny. Należy w tym celu narysować nomogramy dla wszystkich równań układu (63) tak, by pokrywały się skale pomocniczych zmiennych w każdych dwóch nomogramach sąsiednich.

Narysujemy dla przykładu nomogram kolineacyjny do obliczania ciężaru P rury na podstawie wzoru

$$(65) \quad P = \frac{\pi a l}{4} (D^2 - d^2),$$

gdzie

D — średnica zewnętrzna rury ($2 \text{ cm} \leq D \leq 11 \text{ cm}$),

d — średnica wewnętrzna rury ($0 \text{ cm} \leq d \leq 8 \text{ cm}$, $d < D$),

l — długość rury ($0 \text{ cm} \leq l \leq 500 \text{ cm}$),

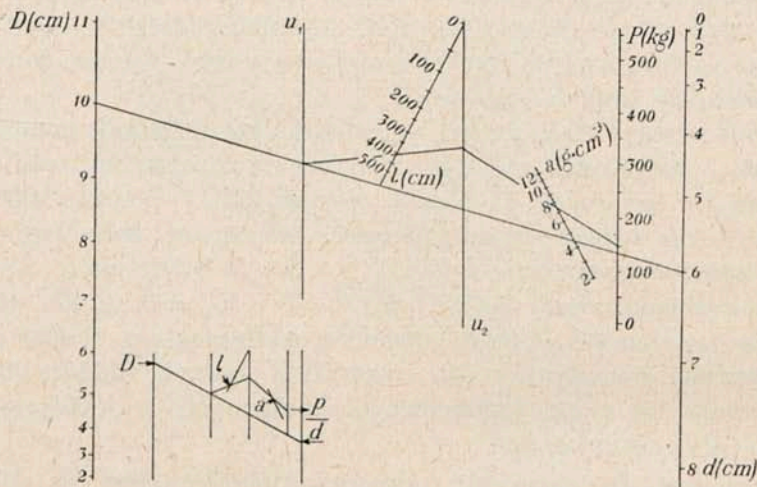
a — ciężar właściwy ($2 \text{ g/cm}^3 \leq a \leq 12 \text{ g/cm}^3$).

Równanie (65) można sprowadzić do układu równań

$$(66) \quad \begin{aligned} u_1 &= D^2 - d^2, \\ u_2 &= l u_1, \\ P &= \frac{\pi}{4} a u_2. \end{aligned}$$

Dla pierwszego z tych równań można narysować nomogram o trzech skalach równoległych ze skalami kwadratowymi zmiennych D , d i skalą regularną zmiennej u_1 . Dla drugiego równania narysujemy nomogram typu N ze skalą rzutową zmiennej l i skalami regularnymi zmiennych u_1 i u_2 . Podobnie dla trzeciego równania narysujemy także nomogram typu N ze skalą rzutową zmiennej a i skalami regularnymi zmiennych u_2 i P . Widzimy więc, że dla wszystkich trzech równań układu (66) mo-

żemy narysować nomogramy kolineacyjne, przy czym zmienne pomocnicze u_1, u_2 mają skale regularne. Dobierając odpowiednie moduły możemy więc złożyć poszczególne nomogramy uzyskując w ten sposób składany nomogram kolineacyjny dla równania (65). Na rysunku 76 pokazany



Rys. 76

jest gotowy nomogram dla tego równania. Nie potrzebując wartości pomocniczych zmiennych u_1, u_2 narysowaliśmy dla nich skale ślepe. Dla przykładu na rysunku 76 odczytano $P \approx 150$ kg dla wartości zmiennych $D = 10$ cm, $d = 6$ cm, $l = 400$ cm, $a = 7,8$ g cm⁻³ (żeliwo). Dokładniejsze obliczenie daje $P \approx 157$ kg.

Specjalny typ nomogramu, tzw. *nomogram z binarnym polem* można narysować dla równania (60), jeżeli da się ono sprowadzić do postaci

$$(67) \quad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & g_1(x_1) & 1 \\ f_2(x_2) & g_2(x_2) & 1 \\ f_3(x_3, x_4) & g_3(x_3, x_4) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie funkcje $f_1(x_1)$, $g_1(x_1)$, $f_2(x_2)$, $g_2(x_2)$, $f_3(x_3, x_4)$, $g_3(x_3, x_4)$ są ciągłe i ograniczone w rozpatrywanych przedziałach zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 . Taka postać równania ma prostą interpretację geometryczną. W dowolnym układzie współrzędnych ξ, η trzy punkty o współrzędnych

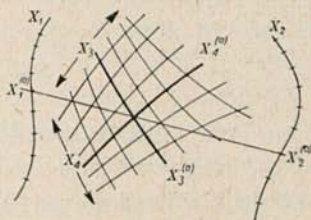
$$(68) \quad \xi_1(x_1) = \alpha f_1(x_1), \quad \eta_1(x_1) = \beta g_1(x_1),$$

$$(68') \quad \xi_2(x_2) = \alpha f_2(x_2), \quad \eta_2(x_2) = \beta g_2(x_2),$$

$$(68'') \quad \xi_3(x_3, x_4) = \alpha f_3(x_3, x_4), \quad \eta_3(x_3, x_4) = \beta g_3(x_3, x_4)$$

wtedy i tylko wtedy leżą na jednej prostej, gdy wielkości x_1, x_2, x_3, x_4 spełniają równanie (67).

Dla równania (67) można więc narysować nomogram (rys. 77) złożony z dwóch skal zmiennych x_1 i x_2 , o równaniach określonych wzorami (68) i (68'), i z dwu rodzin linii uzyskanych przez ustalanie wartości jednej ze zmiennych x_3 i x_4 w równaniach (68''). Siatkę utworzoną przez dwie rodziny krzywych o kotach równych wartościom jednej ze zmiennych x_3 i x_4 nazywamy *polem binarnym* tych dwu zmiennych, a uzyskany nomogram *nomogramem z polem binarnym*.



Rys. 77

Gdy dane są wartości dowolnych trzech spośród czterech zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 , np. wartości $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$, to wartość $x_4^{(0)}$ czwartej zmiennej x_4 , związanej z pozostałymi równaniem (67), wyznaczamy przy pomocy nomogramu z polem binarnym (rys. 77) w sposób następujący. Przez punkty o kotach $x_1^{(0)}$ i $x_2^{(0)}$ na skalach zmiennych x_1 i x_2 prowadzimy linię prostą i znajdujemy jej punkt przecięcia z linią o kocie $x_3^{(0)}$ z pierwszej rodziny linii pola binarnego. Przechodząca przez ten punkt linia drugiej rodziny pola binarnego ma kątę równą szukanej wartości $x_4^{(0)}$.

Nomogram z binarnym polem jest połączeniem nomogramu kolineacyjnego z siatkowym. Spełnieniu równania (67) odpowiada tu kolineacja trzech punktów, z których jeden jest punktem przecięcia dwu krzywych.

Tak, jak wprowadzając do nomogramu kolineacyjnego zamiast jednej skali pole binarne, mogliśmy narysować nomogram dla równania (67), podobnie, stosując dwa lub trzy pola binarne zamiast dowolnych dwóch lub wszystkich trzech skal nomogramu kolineacyjnego, możemy narysować nomogram dla równań o pięciu lub sześciu zmiennych postaci

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & g_1(x_1) & 1 \\ f_2(x_2, x_3) & g_2(x_2, x_3) & 1 \\ f_3(x_4, x_5) & g_3(x_4, x_5) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oraz

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2) & g_1(x_1, x_2) & 1 \\ f_2(x_3, x_4) & g_2(x_3, x_4) & 1 \\ f_3(x_5, x_6) & g_3(x_5, x_6) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

W szczególności jeżeli można narysować nomogram kolineacyjny dla równania o trzech zmiennych

$$F(x, y, z) = 0,$$

to wprowadzając nowe zmienne przez podstawienia

$$x = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y = \varphi_2(x_3, x_4), \quad z = \varphi_3(x_5, x_6)$$

i stosując pola binarne możemy narysować nomogram dla równania o sześciu zmiennych

$$F(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_3, x_4), \varphi_3(x_5, x_6)) = 0.$$

Inne bogate możliwości rysowania nomogramów dla równań o większej ilości zmiennych daje użycie dwu płaszczyzn. Wykonując rysunek na dwu arkuszach papieru, z których jeden przeźroczysty zwany *transparentem* nakłada się na nieprzeźroczysty zwany *podkładem*, możemy wprowadzić do rachunku nowe zmienne jako parametry wzajemnego położenia obu płaszczyzn. Zasada ta prowadzi do nowego typu nomogramów zwanych *nomogramami z transparentem*, których teoria tworzy osobny dział nomografii. Niekiedy stosuje się także nomogramy z dwoma transparentami.

W krótkim zarysie poznaliśmy już główne zasady nomografii i potrafimy sporządzić nomogramy dla dość obszernej klasy równań. Nomogram pozwala w bardzo prosty sposób i w bardzo krótkim czasie rozwiązać nieraz dość skomplikowane równanie. Zwłaszcza wtedy, gdy musimy wielokrotnie powtarzać pewne stereotypowe obliczenia, trud sporządzenia odpowiedniego nomogramu sownie się opłaci. Odpowiednie nomogramy mogą np. ułatwić konstruktorowi wielokrotnie powtarzane obliczenia konstrukcyjne. Spotyka się całe wydawnictwa zbierające nomogramy służące do rozwiązywania specjalnych zagadnień.

Przy dobrym zaplanowaniu i starannym wykonaniu można uzyskać na nomogramie dokładność do trzech miejsc znaczących. Jest to dokładność zupełnie wystarczająca w prawie wszystkich obliczeniach praktycznych. Najprostsza droga prowadząca do zwiększenia dokładności nomogramu jest powiększenie modułów na skalach. Zwiększanie modułów prowadzi jednak do wydłużenia skal i powiększenia całego rysunku. Jest to możliwe tylko do pewnych granic. Dalsze zwiększanie modułów można uzyskać przez wykonanie kilku nomogramów dla różnych przedziałów. W pewnych przypadkach można poszczególne nomogramy rysować na tym samym arkuszu papieru, umieszczając obok siebie pocięte na kawałki skale zmiennych, podobnie jak układaliśmy obok siebie odcinki skali logarytmicznej na płaskim suwaku logarytmicznym. Można w ten sposób uzyskać skale o długości kilkudziesięciu metrów i dokładność odczytu do pięciu miejsc znaczących.

Często dla danego równania możemy narysować kilka różnych typów nomogramu i stajemy przed koniecznością wyboru najlepszego. Dla większości spotykanych w praktyce równań o trzech zmiennych możemy

narysować nomogram siatkowy, podczas gdy nomogram kolineacyjny tylko dla niektórych typów równań. Najczęściej więc musimy wybierać między nomogramem siatkowym a kolineacyjnym. Największą zaletą nomogramu siatkowego jest to, że — w przeciwieństwie do nomogramów kolineacyjnych — deformacje płaszczyzny rysunku nie mają wpływu na błędy odczytywanych wyników. Jeżeli wskutek załamań lub działania ciepła czy wilgoci arkusz papieru, na którym narysowany jest nomogram, ulegnie deformacji, to zniekształcą się tylko krzywe nomogramu siatkowego, ale nie zmieniają się ich punkty przecięcia. Ta własność nomogramu siatkowego pozwala go używać w każdym warsztacie, a nawet w terenie. Nomogramy kolineacyjne są natomiast zwykle prostsze do narysowania i posługiwania się nimi. Gęsta sieć linii nomogramu siatkowego męczy oko i stwarza większe możliwości pomyłki przy odczytywaniu. Ponadto interpolacja między kreskami skali nomogramu kolineacyjnego jest łatwiejsza i dokładniejsza niż interpolacja między krzywymi siatki nomogramu siatkowego. Dzięki temu nomogramem kolineacyjnym można zwykle uzyskać większą dokładność przy tym samym formacie rysunku. Dlatego mając do wyboru nomogram siatkowy lub kolineacyjny i nie mając specjalnych obaw deformacji rysunku w warunkach posługiwania się nim, wybieramy najczęściej nomogram kolineacyjny. Do odczytywania nomogramu kolineacyjnego najwygodniej jest używać przezroczystego lineалу celuloidowego z wrytą i zamalowaną na czarno linią prostą (należy zawsze przykładąć do rysunku tę stronę lineálu, na której wryta jest linia) lub też napiętej nitki. Jeżeli na skalach znajdują się wyróżnione punkty, które będziemy specjalnie często używali, to warto jest je specjalnie zaznaczyć na skali. Tak np. na skali zmiennej a nomogramu na rysunku 76 można by umieścić punkty odpowiadające ciężarom właściwym najczęściej używanych materiałów (np. żelazo, ołów, szkło itp.) pisząc zamiast kot symbole oznaczające te materiały. Wykonując nomogram dla praktyka nie możemy zapominać o dokładnej i jasnej instrukcji posługiwania się nim. Na bardziej skomplikowanych nomogramach rysujemy w tym celu specjalne schematy (klucze) użycia (rys. 74 i 76).

Tablica Ia
Rozkład normalny

x	$\Phi(x)$	$\Psi(x)$
0,0	0,50000	0,00000
0,1	0,53983	0,07966
0,2	0,57926	0,15852
0,3	0,61791	0,23582
0,4	0,65542	0,31084
0,5	0,69146	0,38292
0,6	0,72575	0,45149
0,7	0,75804	0,51607
0,8	0,78814	0,57629
0,9	0,81594	0,63188
1,0	0,84134	0,68269
1,1	0,86433	0,72867
1,2	0,88493	0,76986
1,3	0,90320	0,80640
1,4	0,91924	0,83849
1,5	0,93319	0,86639
1,6	0,94520	0,89040
1,7	0,95543	0,91087
1,8	0,96407	0,92814
1,9	0,97128	0,94257
2,0	0,97725	0,95450
2,1	0,98214	0,96427
2,2	0,98610	0,97219
2,3	0,98928	0,97855
2,4	0,99180	0,98360
2,5	0,99379	0,98758
2,6	0,99534	0,99068
2,7	0,99653	0,99307
2,8	0,99744	0,99489
2,9	0,99813	0,99627
3,0	0,99865	0,99730
3,1	0,99903	0,99806
3,2	0,99931	0,99863
3,3	0,99952	0,99903
3,4	0,99966	0,99933
3,5	0,99977	0,99953
3,6	0,99984	0,99968
3,7	0,99989	0,99978
3,8	0,99993	0,99986
3,9	0,99995	0,99990
4,0	0,99997	0,99994

Tablica Ib
Rozkład t -Studenta

$f \backslash p$	0,9	0,95	0,99	0,999
1	6,314	12,706	63,657	636,619
2	2,920	4,303	9,925	31,598
3	2,353	3,182	5,841	12,941
4	2,132	2,776	4,604	8,610
5	2,015	2,571	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,707	5,959
7	1,895	2,365	3,499	5,405
8	1,860	2,306	3,355	5,041
9	1,833	2,262	3,250	4,781
10	1,812	2,228	3,169	4,587
11	1,796	2,201	3,106	4,437
12	1,782	2,179	3,055	4,318
13	1,771	2,160	3,012	4,221
14	1,761	2,145	2,977	4,140
15	1,753	2,131	2,947	4,073
16	1,746	2,120	2,921	4,015
17	1,740	2,110	2,898	3,965
18	1,734	2,101	2,878	3,922
19	1,729	2,093	2,861	3,883
20	1,725	2,086	2,845	3,850
21	1,721	2,080	2,831	3,819
22	1,717	2,074	2,819	3,792
23	1,714	2,069	2,807	3,767
24	1,711	2,064	2,797	3,745
25	1,708	2,060	2,787	3,725
26	1,706	2,056	2,779	3,707
27	1,703	2,052	2,771	3,690
28	1,701	2,048	2,763	3,674
29	1,699	2,045	2,756	3,659
30	1,697	2,042	2,750	3,646
35	1,689	2,030	2,724	3,591
40	1,684	2,021	2,704	3,551
45	1,679	2,014	2,689	3,522
50	1,676	2,008	2,677	3,497
60	1,671	2,000	2,660	3,460
70	1,667	1,995	2,648	3,436
80	1,664	1,990	2,639	3,416
90	1,662	1,987	2,632	3,401
100	1,660	1,984	2,626	3,391
120	1,658	1,980	2,617	3,373
∞	1,645	1,960	2,576	3,291

Tablica II
A. Liczby Stirlinga I rodzaju

n	S_0^n	S_1^n	S_2^n	S_3^n	S_4^n	S_5^n	S_6^n	S_7^n	S_8^n	S_9^n
1	1									
2	1	-1								
3	1	-3	2							
4	1	-6	11	-6						
5	1	-10	35	-50	24					
6	1	-15	85	-225	274	-120				
7	1	-21	175	-735	1624	-1764	720			
8	1	-28	322	-1960	6769	-13132	13068	-5040		
9	1	-36	546	-4536	22449	-67284	118124	-109584	40320	
10	1	-45	870	-9450	63273	-269325	723680	-1172700	1026576	-362880

B. Liczby Stirlinga II rodzaju

n	\mathcal{S}_0^n	\mathcal{S}_1^n	\mathcal{S}_2^n	\mathcal{S}_3^n	\mathcal{S}_4^n	\mathcal{S}_5^n	\mathcal{S}_6^n	\mathcal{S}_7^n	\mathcal{S}_8^n	\mathcal{S}_9^n
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1		
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	
10	1	45	750	5880	22827	42525	34105	9330	511	1

Tablica III

Współczynniki interpolacyjne I rodzaju

$n=1$			
	1		ξ
$^+y_0$	1	$^-y_0$	-1

$n=2$				
	1	ξ^2		ξ
$^+y_0$	0	1	$^-y_0$	-2
$^+y_1$	4	-1	$^-y_1$	0

$n=3$					
	1	ξ^2		ξ	ξ^3
$^+y_0$	-3	3	$^-y_0$	1	-1
$^+y_1$	27	-3	$^-y_1$	-27	3

$n=4$						
	1	ξ^2	ξ^4		ξ	ξ^3
$^+y_0$	0	-4	1	$^-y_0$	16	-4
$^+y_1$	0	64	-4	$^-y_1$	-128	8
$^+y_2$	192	-60	3	$^-y_2$	0	0

$n=5$							
	1	ξ^2	ξ^4		ξ	ξ^3	ξ^5
$^+y_0$	45	-50	5	$^-y_0$	-9	10	-1
$^+y_1$	-375	390	-15	$^-y_1$	125	-130	5
$^+y_2$	2250	-340	10	$^-y_2$	-2250	340	-10

$n=6$								
	1	ξ^2	ξ^4	ξ^6		ξ	ξ^3	ξ^5
$^+y_0$	0	64	-20	1	$^-y_0$	-384	120	-6
$^+y_1$	0	-864	240	-6	$^-y_1$	3456	-960	24
$^+y_2$	0	8640	-780	15	$^-y_2$	-17280	1560	-30
$^+y_3$	23040	-7840	560	-10	$^-y_3$	0	0	0

Tablica III (ciąg dalszy)

$n=7$									
	1	ξ^2	ξ^4	ξ^6		ξ	ξ^3	ξ^5	ξ^7
$^+y_0$	-1575	1813	-245	7	$^-y_0$	225	-259	35	-1
$^+y_1$	15435	-17465	2065	-35	$^-y_1$	-3087	3493	-413	7
$^+y_2$	-77175	81837	-4725	63	$^-y_2$	25725	-27279	1575	-21
$^+y_3$	385875	-66185	2905	-35	$^-y_3$	-385875	66185	-2905	35

Tablica IV

Współczynniki dwumienne Newtona $\binom{n}{k}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66

Tablica V

Współczynniki $\binom{\xi}{k}$, czyli współczynniki interpolacyjne II rodzaju

$\xi = \binom{\xi}{1}$	$\binom{\xi}{2}$	$\binom{\xi}{3}$	$\binom{\xi}{4}$	$\binom{\xi}{5}$
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	-0,00495	0,00328	-0,00245	0,00196
0,02	-0,00980	0,00647	-0,00482	0,00384
0,03	-0,01455	0,00955	-0,00709	0,00563
0,04	-0,01920	0,01254	-0,00928	0,00735
0,05	-0,02375	0,01544	-0,01139	0,00899
0,06	-0,02820	0,01824	-0,01340	0,01056
0,07	-0,03255	0,02094	-0,01534	0,01206
0,08	-0,03680	0,02355	-0,01719	0,01348
0,09	-0,04095	0,02607	-0,01897	0,01483
0,10	-0,04500	0,02850	-0,02066	0,01612
0,11	-0,04895	0,03084	-0,02228	0,01733
0,12	-0,05280	0,03309	-0,02382	0,01849
0,13	-0,05655	0,03525	-0,02529	0,01958
0,14	-0,06020	0,03732	-0,02669	0,02060
0,15	-0,06375	0,03931	-0,02801	0,02157
0,16	-0,06720	0,04122	-0,02926	0,02247
0,17	-0,07055	0,04304	-0,03045	0,02332
0,18	-0,07380	0,04477	-0,03156	0,02412
0,19	-0,07695	0,04643	-0,03261	0,02485
0,20	-0,08000	0,04800	-0,03360	0,02554
0,21	-0,08295	0,04949	-0,03452	0,02617
0,22	-0,08580	0,05091	-0,03538	0,02675
0,23	-0,08855	0,05224	-0,03618	0,02728
0,24	-0,09120	0,05350	-0,03692	0,02776
0,25	-0,09375	0,05469	-0,03760	0,02820
0,26	-0,09620	0,05580	-0,03822	0,02859
0,27	-0,09855	0,05683	-0,03879	0,02893
0,28	-0,10080	0,05779	-0,03930	0,02924
0,29	-0,10295	0,05868	-0,03976	0,02950
0,30	-0,10500	0,05950	-0,04016	0,02972
0,31	-0,10695	0,06025	-0,04052	0,02990
0,32	-0,10880	0,06093	-0,04082	0,03004
0,33	-0,11055	0,06154	-0,04108	0,03015
0,34	-0,11220	0,06208	-0,04129	0,03022
0,35	-0,11375	0,06256	-0,04145	0,03026
0,36	-0,11520	0,06298	-0,04156	0,03026
0,37	-0,11655	0,06333	-0,04164	0,03023
0,38	-0,11780	0,06361	-0,04167	0,03017
0,39	-0,11895	0,06384	-0,04165	0,03007
0,40	-0,12000	0,06400	-0,04160	0,02995
0,41	-0,12095	0,06410	-0,04151	0,02980
0,42	-0,12180	0,06415	-0,04138	0,02962
0,43	-0,12255	0,06413	-0,04121	0,02942
0,44	-0,12320	0,06406	-0,04100	0,02919
0,45	-0,12375	0,06394	-0,04076	0,02894
0,46	-0,12420	0,06376	-0,04049	0,02866
0,47	-0,12455	0,06352	-0,04018	0,02836
0,48	-0,12480	0,06323	-0,03984	0,02804
0,49	-0,12495	0,06289	-0,03946	0,02770
0,50	-0,12500	0,06250	-0,03906	0,02734

Tablica V (ciąg dalszy)

$\xi = \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$
0,50	-0,12500	0,06250	-0,03906	0,02734
0,51	-0,12495	0,06206	-0,03863	0,02696
0,52	-0,12480	0,06157	-0,03817	0,02657
0,53	-0,12455	0,06103	-0,03769	0,02615
0,54	-0,12420	0,06044	-0,03717	0,02572
0,55	-0,12375	0,05981	-0,03664	0,02528
0,56	-0,12320	0,05914	-0,03607	0,02482
0,57	-0,12255	0,05842	-0,03549	0,02434
0,58	-0,12180	0,05765	-0,03488	0,02386
0,59	-0,12095	0,05685	-0,03425	0,02336
0,60	-0,12000	0,05600	-0,03360	0,02285
0,61	-0,11895	0,05511	-0,03293	0,02233
0,62	-0,11780	0,05419	-0,03224	0,02180
0,63	-0,11655	0,05322	-0,03154	0,02125
0,64	-0,11520	0,05222	-0,03081	0,02071
0,65	-0,11375	0,05119	-0,03007	0,02015
0,66	-0,11220	0,05012	-0,02932	0,01958
0,67	-0,11055	0,04901	-0,02855	0,01901
0,68	-0,10880	0,04787	-0,02777	0,01844
0,69	-0,10695	0,04670	-0,02697	0,01785
0,70	-0,10500	0,04550	-0,02616	0,01727
0,71	-0,10295	0,04427	-0,02534	0,01668
0,72	-0,10080	0,04301	-0,02451	0,01608
0,73	-0,09855	0,04172	-0,02368	0,01548
0,74	-0,09620	0,04040	-0,02283	0,01488
0,75	-0,09375	0,03906	-0,02197	0,01428
0,76	-0,09120	0,03770	-0,02111	0,01368
0,77	-0,08855	0,03631	-0,02024	0,01308
0,78	-0,08580	0,03489	-0,01937	0,01247
0,79	-0,08295	0,03346	-0,01848	0,01187
0,80	-0,08000	0,03200	-0,01760	0,01126
0,81	-0,07695	0,03052	-0,01671	0,01066
0,82	-0,07380	0,02903	-0,01582	0,01006
0,83	-0,07055	0,02751	-0,01493	0,00946
0,84	-0,06720	0,02598	-0,01403	0,00887
0,85	-0,06375	0,02444	-0,01314	0,00828
0,86	-0,06020	0,02288	-0,01224	0,00769
0,87	-0,05655	0,02130	-0,01134	0,00710
0,88	-0,05280	0,01971	-0,01045	0,00652
0,89	-0,04895	0,01811	-0,00955	0,00594
0,90	-0,04500	0,01650	-0,00866	0,00537
0,91	-0,04095	0,01488	-0,00777	0,00480
0,92	-0,03680	0,01325	-0,00689	0,00424
0,93	-0,03255	0,01161	-0,00601	0,00369
0,94	-0,02820	0,00996	-0,00513	0,00314
0,95	-0,02375	0,00831	-0,00426	0,00260
0,96	-0,01920	0,00666	-0,00339	0,00206
0,97	-0,01455	0,00500	-0,00254	0,00154
0,98	-0,00980	0,00333	-0,00168	0,00102
0,99	-0,00495	0,00167	-0,00084	0,00050
1,00	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tablica VI
Współczynniki interpolacyjne Everetta

ξ	$\left(\begin{smallmatrix}\xi+1\\3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\xi+2\\5\end{smallmatrix}\right)$	ξ	$\left(\begin{smallmatrix}\xi+1\\3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\xi+2\\5\end{smallmatrix}\right)$
0,00	0,00000	0,00000	0,50	-0,06250	0,01172
0,01	-0,00167	0,00033	0,51	-0,06289	0,01176
0,02	-0,00333	0,00067	0,52	-0,06323	0,01179
0,03	-0,00500	0,00100	0,53	-0,06352	0,01181
0,04	-0,00666	0,00133	0,54	-0,06376	0,01182
0,05	-0,00831	0,00166	0,55	-0,06394	0,01182
0,06	-0,00996	0,00199	0,56	-0,06406	0,01181
0,07	-0,01161	0,00232	0,57	-0,06413	0,01179
0,08	-0,01325	0,00265	0,58	-0,06415	0,01175
0,09	-0,01488	0,00297	0,59	-0,06410	0,01170
0,10	-0,01650	0,00329	0,60	-0,06400	0,01165
0,11	-0,01811	0,00361	0,61	-0,06384	0,01158
0,12	-0,01971	0,00393	0,62	-0,06361	0,01150
0,13	-0,02130	0,00424	0,63	-0,06333	0,01141
0,14	-0,02288	0,00455	0,64	-0,06298	0,01131
0,15	-0,02444	0,00486	0,65	-0,06256	0,01119
0,16	-0,02598	0,00516	0,66	-0,06208	0,01106
0,17	-0,02751	0,00546	0,67	-0,06154	0,01093
0,18	-0,02903	0,00576	0,68	-0,06093	0,01078
0,19	-0,03052	0,00605	0,69	-0,06025	0,01062
0,20	-0,03200	0,00634	0,70	-0,05950	0,01044
0,21	-0,03346	0,00662	0,71	-0,05868	0,01026
0,22	-0,03489	0,00689	0,72	-0,05779	0,01006
0,23	-0,03631	0,00717	0,73	-0,05683	0,00985
0,24	-0,03770	0,00743	0,74	-0,05580	0,00963
0,25	-0,03906	0,00769	0,75	-0,05469	0,00940
0,26	-0,04040	0,00794	0,76	-0,05350	0,00916
0,27	-0,04172	0,00819	0,77	-0,05224	0,00890
0,28	-0,04301	0,00843	0,78	-0,05091	0,00863
0,29	-0,04427	0,00867	0,79	-0,04949	0,00835
0,30	-0,04550	0,00890	0,80	-0,04800	0,00806
0,31	-0,04670	0,00912	0,81	-0,04643	0,00776
0,32	-0,04787	0,00933	0,82	-0,04477	0,00745
0,33	-0,04901	0,00954	0,83	-0,04304	0,00712
0,34	-0,05012	0,00973	0,84	-0,04122	0,00679
0,35	-0,05119	0,00992	0,85	-0,03931	0,00644
0,36	-0,05222	0,01011	0,86	-0,03732	0,00608
0,37	-0,05322	0,01028	0,87	-0,03525	0,00572
0,38	-0,05419	0,01045	0,88	-0,03309	0,00534
0,39	-0,05511	0,01060	0,89	-0,03084	0,00495
0,40	-0,05600	0,01075	0,90	-0,02850	0,00455
0,41	-0,05685	0,01089	0,91	-0,02607	0,00413
0,42	-0,05765	0,01102	0,92	-0,02355	0,00371
0,43	-0,05842	0,01114	0,93	-0,02094	0,00328
0,44	-0,05914	0,01125	0,94	-0,01824	0,00284
0,45	-0,05981	0,01136	0,95	-0,01544	0,00239
0,46	-0,06044	0,01145	0,96	-0,01254	0,00193
0,47	-0,06103	0,01153	0,97	-0,00955	0,00146
0,48	-0,06157	0,01160	0,98	-0,00647	0,00098
0,49	-0,06206	0,01167	0,99	-0,00328	0,00050
0,50	-0,06250	0,01172	1,00	0,00000	0,00000

Tablica VII

Wzory na przybliżone różniczkowanie

(Liczby F_k i M_k są określone wzorami (10a) w rozdziale VII)

A. Pochodne pierwszego rzędu.

 $n=1$

$$y'_0 = \frac{1}{h} (-y_0 + y_1) - \frac{1}{2} F_2 h \pm \frac{1}{2} M_2 h,$$

$$y'_1 = \frac{1}{h} (-y_0 + y_1) + \frac{1}{2} F_2 h \pm \frac{1}{2} M_2 h.$$

 $n=2$

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{1}{3} F_3 h^2 \pm \frac{1}{3} M_3 h^2,$$

$$y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2) - \frac{1}{6} F_3 h^2 \pm \frac{1}{6} M_3 h^2,$$

$$y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{1}{3} F_3 h^2 \pm \frac{1}{3} M_3 h^2.$$

 $n=3$

$$y'_0 = \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{1}{4} F_4 h^3 \pm \frac{1}{4} M_4 h^3,$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{1}{12} F_4 h^3 \pm \frac{1}{12} M_4 h^3,$$

$$y'_2 = \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{1}{12} F_4 h^3 \pm \frac{1}{12} M_4 h^3,$$

$$y'_3 = \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{1}{4} F_4 h^3 \pm \frac{1}{4} M_4 h^3.$$

 $n=4$

$$y'_0 = \frac{1}{12h} (-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{1}{5} F_5 h^4 \pm \frac{1}{5} M_5 h^4,$$

$$y'_1 = \frac{1}{12h} (-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{1}{20} F_5 h^4 \pm \frac{1}{20} M_5 h^4,$$

$$y'_2 = \frac{1}{12h} (y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{1}{30} F_5 h^4 \pm \frac{1}{30} M_5 h^4,$$

$$y'_3 = \frac{1}{12h} (-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{1}{20} F_5 h^4 \pm \frac{1}{20} M_5 h^4,$$

$$y'_4 = \frac{1}{12h} (3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{1}{5} F_5 h^4 \pm \frac{1}{5} M_5 h^4.$$

 $n=5$

$$y'_0 = \frac{1}{60h} (-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5) - \frac{1}{6} F_6 h^5 \pm \frac{1}{6} M_6 h^5,$$

$$y'_1 = \frac{1}{60h} (-12y_0 - 65y_1 + 120y_2 - 60y_3 + 20y_4 - 3y_5) + \frac{1}{30} F_6 h^5 \pm \frac{1}{30} M_6 h^5,$$

$$y'_2 = \frac{1}{60h} (3y_0 - 30y_1 - 20y_2 + 60y_3 - 15y_4 + 2y_5) - \frac{1}{60} F_6 h^5 \pm \frac{1}{60} M_6 h^5,$$

$$y'_3 = \frac{1}{60h} (-2y_0 + 15y_1 - 60y_2 + 20y_3 + 30y_4 - 3y_5) + \frac{1}{60} F_6 h^5 \pm \frac{1}{60} M_6 h^5,$$

$$y'_4 = \frac{1}{60h} (3y_0 - 20y_1 + 60y_2 - 120y_3 + 65y_4 + 12y_5) - \frac{1}{30} F_6 h^5 \pm \frac{1}{30} M_6 h^5,$$

$$y'_5 = \frac{1}{60h} (-12y_0 + 75y_1 - 200y_2 + 300y_3 - 300y_4 + 137y_5) + \frac{1}{6} F_6 h^5 \pm \frac{1}{6} M_6 h^5.$$

 $n=6$

$$y'_0 = \frac{1}{60h} (-147y_0 + 360y_1 - 450y_2 + 400y_3 - 225y_4 + 72y_5 - 10y_6) + \frac{1}{7} F_7 h^6 \pm \frac{1}{7} M_7 h^6,$$

$$y'_1 = \frac{1}{60h} (-10y_0 - 77y_1 + 150y_2 - 100y_3 + 50y_4 - 15y_5 + 2y_6) - \frac{1}{42} F_7 h^6 \pm \frac{1}{42} M_7 h^6,$$

$$y'_2 = \frac{1}{60h} (2y_0 - 24y_1 - 35y_2 + 80y_3 - 30y_4 + 8y_5 - y_6) + \frac{1}{105} F_7 h^6 \pm \frac{1}{105} M_7 h^6,$$

$$y'_3 = \frac{1}{60h} (-y_0 + 9y_1 - 45y_2 + 45y_4 - 9y_5 + y_6) - \frac{1}{140} F_7 h^6 \pm \frac{1}{140} M_7 h^6,$$

$$y'_4 = \frac{1}{60h} (y_0 - 8y_1 + 30y_2 - 80y_3 + 35y_4 + 24y_5 - 2y_6) + \frac{1}{105} F_7 h^6 \pm \frac{1}{105} M_7 h^6,$$

$$y'_5 = \frac{1}{60h} (-2y_0 + 15y_1 - 50y_2 + 100y_3 - 150y_4 + 77y_5 + 10y_6) - \frac{1}{42} F_7 h^6 \pm \frac{1}{42} M_7 h^6,$$

$$y'_6 = \frac{1}{60h} (10y_0 - 72y_1 + 225y_2 - 400y_3 + 450y_4 - 360y_5 + 147y_6) + \frac{1}{7} F_7 h^6 \pm \frac{1}{7} M_7 h^6.$$

B. Pochodne wyższych rzędów.

 $n=2$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - F_3 h \pm M_3 h.$$

 $n=3$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12} F_4 h^2 \pm \frac{11}{12} M_4 h^2,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} (-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) - \frac{3}{2} F_4 h \pm \frac{3}{2} M_4 h.$$

$n=4$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{35}{12} y_0 - \frac{26}{3} y_1 + \frac{19}{2} y_2 - \frac{14}{3} y_3 + \frac{11}{12} y_4 \right) - \frac{5}{6} F_5 h^3 \pm \frac{5}{6} M_5 h^3,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} \left(-\frac{5}{2} y_0 + 9y_1 - 12y_2 + 7y_3 - \frac{3}{2} y_4 \right) + \frac{7}{4} F_5 h^2 \pm \frac{7}{4} M_5 h^2,$$

$$y_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} \left(y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 \right) - 2F_5 h \pm 2M_5 h.$$

 $n=5$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{15}{4} y_0 - \frac{77}{6} y_1 + \frac{107}{6} y_2 - 13y_3 + \frac{61}{12} y_4 - \frac{5}{6} y_5 \right) + \frac{137}{180} F_6 h^4 \pm \frac{137}{180} M_6 h^4,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} \left(-\frac{17}{4} y_0 + \frac{71}{4} y_1 - \frac{59}{2} y_2 + \frac{49}{2} y_3 - \frac{41}{4} y_4 + \frac{7}{4} y_5 \right) - \frac{15}{8} F_6 h^3 \pm \frac{15}{8} M_6 h^3,$$

$$y_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} (3y_0 - 14y_1 + 26y_2 - 24y_3 + 11y_4 - 2y_5) + \frac{17}{6} F_6 h^2 \pm \frac{17}{6} M_6 h^2,$$

$$y_0^{(5)} = \frac{1}{h^5} (-y_0 + 5y_1 - 10y_2 + 10y_3 - 5y_4 + y_5) - \frac{5}{2} F_6 h \pm \frac{5}{2} M_6 h.$$

 $n=6$

$$y_0^{(2)} = \frac{1}{h^2} \left(\frac{203}{45} y_0 - \frac{87}{5} y_1 + \frac{117}{4} y_2 - \frac{254}{9} y_3 + \frac{33}{2} y_4 - \frac{27}{5} y_5 + \frac{137}{180} y_6 \right) - \frac{7}{10} F_7 h^5 \pm \frac{7}{10} M_7 h^5,$$

$$y_0^{(3)} = \frac{1}{h^3} \left(-\frac{49}{8} y_0 + 29y_1 - \frac{461}{8} y_2 + 62y_3 - \frac{307}{8} y_4 + 13y_5 - \frac{15}{8} y_6 \right) + \frac{29}{15} F_7 h^4 \pm \frac{29}{15} M_7 h^4,$$

$$y_0^{(4)} = \frac{1}{h^4} \left(\frac{35}{6} y_0 - 31y_1 + \frac{137}{2} y_2 - \frac{242}{3} y_3 + \frac{107}{2} y_4 - 19y_5 + \frac{17}{6} y_6 \right) - \frac{7}{2} F_7 h^3 \pm \frac{7}{2} M_7 h^3,$$

$$y_0^{(5)} = \frac{1}{h^5} \left(-\frac{7}{2} y_0 + 20y_1 - \frac{95}{2} y_2 + 60y_3 - \frac{85}{2} y_4 + 16y_5 - \frac{5}{2} y_6 \right) + \frac{25}{6} F_7 h^2 \pm \frac{25}{6} M_7 h^2,$$

$$y_0^{(6)} = \frac{1}{h^6} (y_0 - 6y_1 + 15y_2 - 20y_3 + 15y_4 - 6y_5 + y_6) - 3F_7 h \pm 3M_7 h.$$

Tablica VIII

Wzory Newtona-Cotesa dla przybliżonego obliczania całek oznaczonych
(Liczby F_k i M_k są określone wzorem (79) w rozdziale VII)

$n=1$

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} (y_0 + y_1) - \frac{1}{12} F_2(b-a)^3 \pm \frac{1}{12} M_2(b-a)^3,$$

$n=2$

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) - \frac{1}{90} F_4 \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 \pm \frac{1}{90} M_4 \left(\frac{b-a}{2} \right)^5,$$

$n=3$

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) - \frac{3}{80} F_4 \left(\frac{b-a}{3} \right)^5 \pm \frac{3}{80} M_4 \left(\frac{b-a}{3} \right)^5,$$

$n=4$

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{90} (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) - \frac{8}{945} F_6 \left(\frac{b-a}{4} \right)^7 \pm \frac{8}{945} M_6 \left(\frac{b-a}{4} \right)^7,$$

$n=5$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{288} (19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5) - \frac{275}{12096} F_6 \left(\frac{b-a}{5} \right)^7 \pm \\ \pm \frac{275}{12096} M_6 \left(\frac{b-a}{5} \right)^7, \end{aligned}$$

$n=6$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{840} (41y_0 + 216y_1 + 27y_2 + 272y_3 + 27y_4 + 216y_5 + 41y_6) - \frac{9}{1400} F_8 \left(\frac{b-a}{6} \right)^9 \pm \\ \pm \frac{9}{1400} M_8 \left(\frac{b-a}{6} \right)^9. \end{aligned}$$

Tablica IX

Wzory Gaussa dla przybliżonego obliczania całek oznaczonych

(Liczby F_k i M_k są określone wzorem (88a) w rozdziale VII) $n=0$

$$\int_a^b F(x) dx = (b-a) y_0 + \frac{1}{24} F_2(b-a)^3 \pm \frac{1}{24} M_2(b-a)^3,$$

gdzie

$$y_0 = F\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

 $n=1$

$$\int_a^b F(x) dx = (b-a) \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{1}{4320} F_4(b-a)^5 \pm \frac{1}{4320} M_4(b-a)^5,$$

gdzie

$$y_0 = F\left(-\frac{b-a}{6}\sqrt{3} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,577350269 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_1 = F\left(\frac{b-a}{6}\sqrt{3} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,577350269 + \frac{b+a}{2}\right),$$

 $n=2$

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{18} (5y_0 + 8y_1 + 5y_2) + \frac{1}{2016000} F_6(b-a)^7 \pm \frac{1}{2016000} M_6(b-a)^7,$$

gdzie

$$y_0 = F\left(-\frac{b-a}{10}\sqrt{15} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,774596669 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_1 = F\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_2 = F\left(\frac{b-a}{10}\sqrt{15} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,774596669 + \frac{b+a}{2}\right),$$

 $n=3$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{b-a}{72} ((18-\sqrt{30})(y_0+y_3) + (18+\sqrt{30})(y_1+y_2)) + \frac{1}{1778112000} F_8(b-a)^9 \pm \\ &\pm \frac{1}{1778112000} M_8(b-a)^9 \approx \\ &\approx (b-a) (0,173927423(y_0+y_3) + 0,326072577(y_1+y_2)) + \\ &+ \frac{1}{1778112000} F_8(b-a)^9 \pm \frac{1}{1778112000} M_8(b-a)^9, \end{aligned}$$

gdzie

$$y_0 = F\left(-\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,861136312 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_1 = F\left(-\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,339981044 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_2 = F\left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,339981044 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_3 = F\left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,861136312 + \frac{b+a}{2}\right).$$

 $n=4$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{b-a}{1800} ((322-13\sqrt{70})(y_0+y_4) + (322+13\sqrt{70})(y_1+y_3) + 512y_2) + \\ &+ \frac{1}{1237732650} F_{10}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11} \pm \frac{1}{1237732650} M_{10}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11} \approx \\ &\approx (b-a)(0,118463443(y_0+y_4) + 0,239314335(y_1+y_3) + 0,284444444y_2) + \\ &+ \frac{1}{1237732650} F_{10}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11} \pm \frac{1}{1237732650} M_{10}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{11}, \end{aligned}$$

gdzie

$$y_0 = F\left(-\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{35+2\sqrt{70}}{63}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,906179846 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_1 = F\left(-\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{35-2\sqrt{70}}{63}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(-\frac{b-a}{2} 0,538469310 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_2 = F\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_3 = F\left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{35-2\sqrt{70}}{63}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,538469310 + \frac{b+a}{2}\right),$$

$$y_4 = F\left(\frac{b-a}{2} \sqrt{\frac{35+2\sqrt{70}}{63}} + \frac{b+a}{2}\right) \approx F\left(\frac{b-a}{2} 0,906179846 + \frac{b+a}{2}\right).$$