

nomogramu pudełko zapalek. Uwzględniając moduły na osiach tego nomogramu  $a = \beta = \sqrt{10}$  cm dostajemy, że powierzchnia górnej ścianki pudełka od zapalek  $z \approx 1,9a\beta = 19$  cm<sup>2</sup>. Taki nomogram, narysowany np. na blacie stołu szklarza, można od razu wycechować wartościami szyby o danej powierzchni (np. w złotych), co pozwoli natychmiast wycenić każdą prostokątną szybę.

W praktyce bardzo często nie znamy analitycznej postaci równania (14). Krzywoliniowy nomogram siatkowy można uzyskać na podstawie wyników pomiarów trzech wielkości związanych nieznanym równaniem (14).

Kiedy indziej, nawet gdy równanie (14) jest znane, lecz ma skomplikowaną postać analityczną, krzywoliniowy nomogram siatkowy można w prosty sposób uzyskać analizując samo zagadnienie, które doprowadza nas do danego równania. Tak np. okazuje się, że dla dość skomplikowanego wzoru analitycznego na dokładność obróbki mechanicznej najprościej jest uzyskać nomogram siatkowy przyjmując jako jedną rodzinę krzywych powiększone profile noża tokarki. Analityczne określenie profilu noża wymagałoby wprowadzenia kilku parametrów.

**§ 82. Nomogramy kolineacyjne.** W geometrii znana jest *zasada dualizmu*, która głosi, że każde twierdzenie geometryczne o koincydencji punktów i prostych na płaszczyźnie pozostaje prawdziwe, jeżeli w jego wysłowieniu zamienimy wszędzie słowo prosta słowem punkt i na odwrót słowo punkt słowem prosta<sup>1)</sup>. Zasada omawianych dotychczas prostoliniowych nomogramów siatkowych polegała na tym, że analitycznej relacji spełniania równania (14) przez trzy wartości zmiennych  $x, y, z$  odpowiadała geometryczna relacja przecinania się w jednym punkcie trzech prostych o kotach  $x, y, z$  wybranych z trzech jednoparametrowych rodzin prostych, wycechowanych wartościami tych zmiennych (rys. 50). Zastanówmy się obecnie, co odpowiada równaniu (14) po przetłumaczeniu zasady prostoliniowych nomogramów siatkowych na język pojęć dualnych.

Trzem jednoparametrowym rodzinom prostych w myśl zasady dualizmu odpowiadają trzy jednoparametrowe rodziny punktów, tj. trzy krzywe, których punkty wycechowane są wartościami parametru jako kotami. Geometrycznej relacji przecinania się trzech prostych w jednym punkcie odpowiada leżenie na jednej prostej trzech punktów o kotach  $x, y, z$  (rys. 59). Tak więc doszliśmy do sformułowania zasady nomogramu kolineacyjnego.

<sup>1)</sup> Ścisłe sformułowanie zasady dualizmu znaleźć można np. w książce M. Starks, *Geometria analityczna*, Monografie Matematyczne XXVI, Warszawa-Wrocław 1951, str. 432.

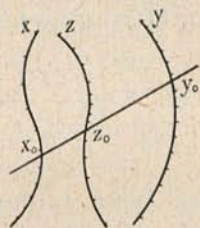


Nomogramem kolineacyjnym danego równania

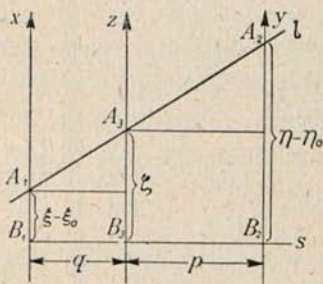
$$(22) \quad F(x, y, z) = 0$$

nazwiemy trzy krzywe na płaszczyźnie, których punkty wycechowane są kotami  $x, y, z$  w taki sposób, że trzy punkty tych krzywych (po jednym z każdej) leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy koty  $x, y, z$  tych punktów spełniają równanie (22).

Krzywą, której punktom przyporządkowano jako koty wartości pewnej zmiennej, będziemy nazywali *skalą* tej zmiennej. Jeśli krzywa jest linią prostą, to wprowadzone tu pojęcie skali sprowadza się do zna-



Rys. 59



Rys. 60

nego już nam pojęcia skali funkcyjnej. Taką skalę będziemy nazywali *skalą prostoliniową*. Skale, które nie są prostoliniowymi, będziemy nazywali *skalami krzywoliniowymi*.

Gdy znamy wartości dowolnych dwu spośród trzech zmiennych występujących w równaniu (22), możemy łatwo znaleźć wartość trzeciej zmiennej prowadząc na nomogramie kolineacyjnym prostą przez punkty odpowiednich skal o danych kotach. Punkt przecięcia tej prostej z trzecią skalą ma kotę równą szukanej wartości trzeciej zmiennej.

Zajmiemy się najpierw nomogramami kolineacyjnymi, których wszystkie trzy skale są prostoliniowe. Rozpatrzmy najprostszy przypadek prostoliniowego nomogramu kolineacyjnego, w którym wszystkie trzy skale są równoległe.

Niech dane będą trzy skale funkcyjne o równaniach

$$(23) \quad \xi = \alpha f(x), \quad \eta = \beta g(y), \quad \zeta = \gamma h(z),$$

umieszczone na trzech prostych równoległych o jednakowych zwrotach (rys. 60). Przyjmijmy, że skala  $z$  znajduje się między skalami  $x$  i  $y$  w odległości  $q$  od skali  $x$  i w odległości  $p$  od skali  $y$ . Niech dowolna prosta  $l$  przecina te trzy skale w punktach  $A_1, A_2, A_3$  o kotach równych odpowiednio  $x, y, z$  i współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$ , a prosta  $s$  przechodząca przez początek



skali  $z$  i prostopadła do wszystkich trzech skal przecina je w punktach  $B_1, B_2, B_3$  o współrzędnych równych odpowiednio  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 = 0$ . Z prostej proporcji geometrycznej otrzymujemy równanie, jakie muszą spełniać współrzędne  $\xi, \eta, \zeta$  trzech punktów leżących na jednej prostej

$$\frac{\zeta - (\xi - \xi_0)}{q} = \frac{(\eta - \eta_0) - \zeta}{p}.$$

Po przekształceniu równanie to przybiera postać

$$\zeta = \frac{p}{p+q} \xi + \frac{q}{p+q} \eta - \frac{p\xi_0 + q\eta_0}{p+q}.$$

Podstawiając do uzyskanego równania wyrażenia (23) otrzymujemy równanie, jakie muszą spełniać koty  $x, y, z$  trzech punktów leżących na jednej prostej

$$(24) \quad h(z) = \frac{ap}{\gamma(p+q)} f(x) + \frac{\beta q}{\gamma(p+q)} g(y) + \frac{p\xi_0 + q\eta_0}{\gamma(p+q)}.$$

Tak więc widzimy, że obierając odpowiednie skale funkcyjne możemy narysować *nomogram kolineacyjny o trzech skalach równoległych* dla dowolnego równania postaci

$$(25) \quad h(z) = af(x) + bg(y) + c,$$

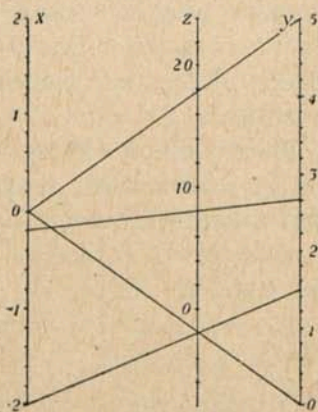
gdzie funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $h(z)$  są w rozważanych przedziałach monotoniczne i ograniczone. Wystarczy w tym celu użyć skal funkcyjnych o równaniach (23). Spośród siedmiu parametrów występujących w równaniu (24)  $a, \beta, \gamma, p, q, \xi_0, \eta_0$  możemy ustalić cztery, dopasowując pozostałe trzy do wartości współczynników  $a, b, c$  równania (25).

Narysujmy dla przykładu nomogram kolineacyjny dla równania

$$z = 3x + 4y - 2$$

uwzględniając przedziały zmiennych  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 5$ . W naszym przykładzie wszystkie trzy skale będą skalami regularnymi. Konstrukcję nomogramu rozpoczniemy rysując dowolne skale regularne dla zmiennych  $x$  i  $y$  (rys. 61).

Rysujemy je na położonych naprzeciwko siebie odcinkach równej długości dobierając rozmiar rysunku taki, by można było odczytywać skale z potrzebną dokładnością. W ten sposób zostały już



Rys. 61



związane cztery parametry równania (24), ustaliliśmy bowiem moduły  $\alpha$  i  $\beta$ , odległość  $p+q$  między skalami  $x$  i  $y$ , oraz różnicę  $\xi_0 - \eta_0$ . Skala  $z$  będzie już jednoznacznie wyznaczona.

Obierzmy dowolne wartości zmiennych  $x$  i  $y$ , np.  $x=0$ ,  $y=0$ , i połączmy prostą odpowiadające im punkty skal. Prosta ta powinna przeciąć skalę  $z$  w punkcie o kocie  $z=3\cdot 0+4\cdot 0-2=-2$ . Znajdując drugą parę wartości  $x=-2$ ,  $y=1,5$ , której odpowiada ta sama wartość  $z$ , mamy już w przecięciu dwu prostych wyznaczony jeden punkt skali  $z$ . Wiedząc, że szukana skala jest równoległa do dwu pozostałych, możemy już narysować prostą, na której umieścimy skalę  $z$ . Z połączenia nowej pary wartości  $x$  i  $y$ , np.  $x=0$ ,  $y=5$ , otrzymujemy drugi punkt szukanej skali o kocie  $z=3\cdot 0+4\cdot 5-2=18$ . Mając dwa punkty skali  $z$  uzupełniamy ją już łatwo, wiedząc, że jest to skala regularna. Dla sprawdzenia konstrukcji odczytujemy z nomogramu dla  $x=-0,2$ ,  $y=2,6$  wartość  $z \approx 8$ . Z obliczenia mamy  $-3\cdot 0,2+4\cdot 2,6-2=7,8$ . Oczywiście dokładniejsze wykonanie nomogramu i zwiększenie modułów pozwoliłoby uzyskać znacznie dokładniejsze wyniki.

#### Równanie

$$(26) \quad z = kx^m y^n$$

można przez obustronne zlogarytmowanie doprowadzić do postaci (25). Gdy przedziały zmiennych  $x, y, z$  nie obejmują zera, możemy więc dla równania (26) narysować nomogram kolineacyjny o trzech równoległych skalach logarytmicznych.

Narysujmy dla przykładu nomogram do obliczania okresu wahadła na podstawie wzoru

$$(27) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dla przedziałów  $50 \leq l \leq 150$  (cm) i  $960 \leq g \leq 1000$  (cm·sek<sup>-2</sup>).

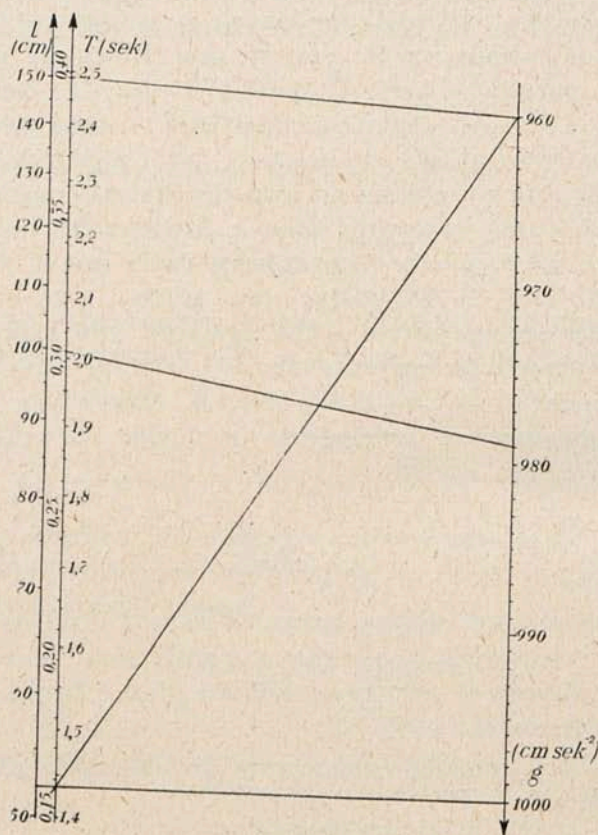
Przez logarytmowanie wzoru (27) otrzymujemy

$$(28) \quad \log T = \frac{1}{2} \log l - \frac{1}{2} \log g + \log 2\pi.$$

Konstrukcję nomogramu rozpoczniemy — podobnie jak w poprzednim przykładzie — rysując na dowolnych dwu prostych równoległych skalach logarytmicznych zmiennych  $l$  i  $g$  w podanych przedziałach i o dowolnie obranych modułach. Na rysunku 62 narysowaliśmy najpierw dwie równoległe skale logarytmiczne: o module  $\alpha=20$  cm dla zmiennej  $l$  i module  $\beta=500$  cm dla zmiennej  $g$ . W rozpatrywanym przedziale zmiennej  $g$  skala logarytmiczna prawie się nie różni od skali regularnej. Skali tej

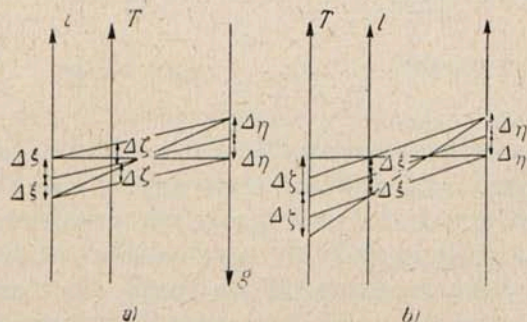


nadaliśmy zwrot przeciwny zwrotowi skali  $l$  z uwagi na to, że we wzorze (28) wyraz  $\frac{1}{2} \log g$  występuje ze znakiem minus. Łatwo jest sprawdzić,



Rys. 62

że gdybyśmy nadali obu skalom zwroty zgodne, to skala zmiennej  $T$  wypadłaby na zewnątrz przyjętych skal  $l$  i  $g$ . Jest to niepożądane zarówno



Rys. 63



z uwagi na zaplanowane rozmiary rysunku, jak też z uwagi na dokładność odczytu wielkości  $T$ . Jeżeli bowiem skala wartości  $T$  leży pomiędzy skalami argumentów  $l$  i  $g$ , to błąd  $\Delta\zeta$  współrzędnej punktu wyznaczonego na tej skali nie przekracza wielkości błędów  $\Delta\xi$  i  $\Delta\eta$  współrzędnych na skalach argumentów  $l$  i  $g$  (rys. 63a). Jeżeli natomiast skala wartości  $T$  leży na zewnątrz skal argumentów  $l$  i  $g$  (rys. 63b), to błąd  $\Delta\zeta$  współrzędnej punktu wyznaczonego na tej skali może znacznie przewyższyć błędy argumentów. Wprawdzie wraz z błędem  $\Delta\zeta$  wzrasta tyle samo razy długość skali  $T$ , a więc i jej moduł  $\gamma$ , tak że w rezultacie błąd koty

$$\Delta T \approx \frac{\Delta\zeta}{\gamma|f'(T)|}$$

pozostaje nie zmieniony, ale zwiększa się niepotrzebnie rozmiar całego rysunku. Dlatego zawsze będziemy dążyli do tego, aby skala wyników znajdowała się pomiędzy skalami argumentów.

Po narysowaniu skal argumentów  $l$  i  $g$  przystępujemy do konstrukcji skali  $T$ . Biorąc skrajne wartości argumentów  $l=50$  cm,  $g=960$  cm/sec<sup>2</sup> otrzymujemy  $T=1,4351$  sek. Tę samą wartość okresu  $T$  otrzymamy przyjmując  $l=52,17$  cm,  $g=1000$  cm/sec<sup>2</sup>. Łącząc prostymi odpowiadające sobie pary argumentów uzyskujemy w przecięciu tych prostych jeden punkt skali  $T$  o kocie  $T_1=1,4351$  sek. Przez ten punkt kreślimy równolegle do skrajnych skal prostą, na której będzie umieszczona skala  $T$ . Łącząc punkty o kotach  $l=150$  cm,  $g=960$  cm/sec<sup>2</sup> otrzymujemy drugi punkt skali  $T$  o kocie  $T_2=2\pi \sqrt{\frac{150}{960}}$  sek  $\approx 2,4856$  sek. Mając dwa punkty łatwo już uzupełnić skalę logarytmiczną zmiennej  $T$ . Mierzając długość  $\zeta_2 - \zeta_1 = 9,16$  cm odcinka między znalezionymi dwoma punktami skali i dzieląc przez różnicę logarytmów kot znajdujemy moduł szukanej skali  $T$

$$\gamma = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\log T_2 - \log T_1} \approx \frac{9,16 \text{ cm}}{0,23856} \approx 38,40 \text{ cm}.$$

Przy pomocy przyłożonej linijki odkładamy teraz punkty skali  $T$  o „okrągłych” wartościach kot obliczając na maszynie lub suwaku ich współrzędne (odeczytane z tablic logarytmu mnożymy przez moduł  $\gamma$ ). Można także ułatwić sobie pracę rysując pomocniczą podziałkę o tym samym module  $\gamma$ , która pozwoli umieszczać na osi punkty o danych kotach na podstawie odeczytanych z tablic logarytmów kot. Na rysunku 62 narysowano taką pomocniczą podziałkę na lewej stronie skali  $T$ . Po ukończeniu rysunku pomocnicze podziałki należy zatrzeć, aby nie przeszkadzały przy korzystaniu z nomogramu. Skrajne skale logarytmiczne argumentów  $l$  i  $g$  rysowaliśmy bez pomocniczych podziałek obierając dogodnie



moduły (wyrażające się okrągłą liczbą). Tak uzyskujemy nomogram kolineacyjny dla równania (27) pozwalający odczytać okres wahań  $T$  z dokładnością około 0,005 sek. Dla sprawdzenia odczytujemy z nomogramu przy  $l=100$  cm,  $g=979$  cm/sek<sup>2</sup>, że  $T \approx 2,01$  sek. Dokładniejsze obliczenie daje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{100}{979}} \text{ sek} \approx 2,008 \text{ sek.}$$

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że skala  $T$  na nomogramie 62 leży bardzo blisko skali  $l$ . Jest to spowodowane małym wpływem zmiany przyspieszenia ziemskiego  $g$  w rozpatrywanym przedziale na długość okresu wahań  $T$ . Długość wahadła  $l$  ma w naszym przykładzie dominujący wpływ na okres wahań  $T$  i niemal determinuje tę wielkość.

Podobnie jak sprowadziliśmy do postaci (25) równanie (26), tak samo możemy przez logarytmowanie sprowadzić do postaci (25) równanie

$$(29) \quad h(z) = k[f(x)]^n [g(y)]^m.$$

Dla tych więc przedziałów, w których występujące w równaniu (29) funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$ ,  $h(z)$  są dodatnie i monotoniczne, a logarytmy tych funkcji ograniczone, można narysować dla równania (29) nomogram o trzech równoległych skalach prostoliniowych.

Podobnie, logarytmując dwukrotnie równanie

$$(30) \quad h(z) = [f(x)]^{g(y)},$$

otrzymujemy

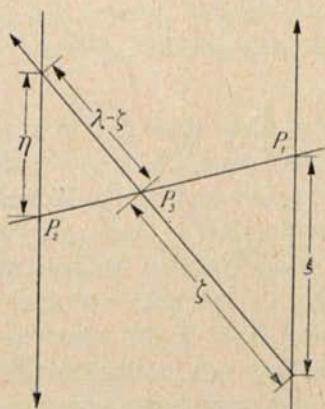
$$\log \log h(z) = \log g(y) + \log \log f(x).$$

Tak więc dla tych przedziałów, w których występujące w ostatnim wyrażeniu logarytmy są określone i ograniczone, a funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $h(z)$

monotoniczne, można dla równania postaci (30) narysować nomogram o trzech skalach prostoliniowych.

Drugą klasę najprostszych i najczęściej stosowanych nomogramów kolineacyjnych tworzą *nomogramy typu N* złożone z trzech skal prostoliniowych, z których dwie są równoległe.

Niech dane będą dwie równoległe osie  $\xi$  i  $\eta$  o przeciwnych zwrotach (rys. 64). Trzecia oś  $\zeta$  ma początek w tym samym punkcie co oś  $\xi$  i przechodzi przez początek skali  $\eta$ . Literą  $\lambda$  oznaczmy długość odcinka osi  $\zeta$



Rys. 64



zawartego między osiami  $\xi$  i  $\eta$ . Dowolna prosta  $l$  odcina na tych osiach odcinki  $\xi, \eta$  i  $\zeta$  spełniające proporcję

$$(31) \quad \frac{\zeta}{\lambda - \zeta} = \frac{\xi}{\eta}.$$

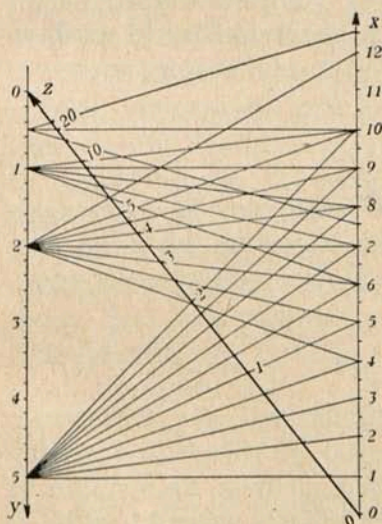
Umieścimy teraz na osiach skale funkcyjne o równaniach

$$(32) \quad \xi = \alpha f(x), \quad \eta = \beta g(y), \quad \zeta = \frac{\lambda h(z)}{1 + h(z)}.$$

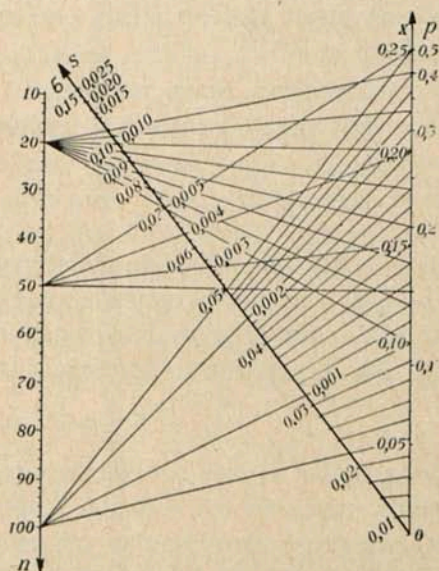
Po podstawieniu równań (32) do (31) otrzymamy równanie, jakie muszą spełniać koty  $x, y, z$  punktów leżących na jednej prostej

$$(33) \quad h(z) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Widzimy więc, że nomogram typu  $N$  możemy narysować dla równania



Rys. 65



Rys. 66

postaci (33), gdzie funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$ ,  $h(z)$  są monotoniczne, a funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $\frac{h(z)}{1 + h(z)}$  ograniczone. Na prostych równoległych musimy wtedy umieścić skale funkcyj  $f(x)$  i  $g(y)$ , na osi pochyłej uogólnioną skalę rzutową, tj. skalę funkcji  $\frac{h(z)}{1 + h(z)}$ .



Zacznijmy od najprostszego przykładu. Narysujemy mianowicie nomogram (rys. 65) dla równania

$$(34) \quad z = \frac{x}{y}$$

dla przedziałów  $0 \leq x \leq 12$ ,  $0 \leq y \leq 5$ . Na osiach równoległych będziemy teraz mieli skale regularne  $x$  i  $y$ . Możemy je narysować obierając dowolne moduły  $\alpha$  i  $\beta$  tak, by uzyskać pożądaną dokładność odczytu i odpowiednią wielkość rysunku. Na rysunku 65 obrano moduły  $\alpha = 0,5$  cm,  $\beta = 1$  cm. Zmienna  $z$  ma skalę rzutową na osi przechodzącej przez początki skal równoległych. Skalę tę możemy uzyskać rzutując z punktu na osi  $\eta$  skalę regularną na osi  $\xi$ . Istotnie, gdy we wzorze (34) podstawimy  $y = y_0$ , to wartościom zmiennej  $x$  będą odpowiadały proporcjonalne do nich wartości zmiennej  $z$ . Tak więc, rzutując z punktu o kocie  $y = 5$  na osi  $\eta$  punkty podziałki na osi  $\xi$  otrzymamy na osi  $\eta$  punkty skali  $z$  o kotach pięciokrotnie mniejszych. Obierając w ten sposób dogodnie środki rzutowania na osi  $\eta$  uzupełniamy skalę  $z$ . Proste rzutowania na rysunku 65 są oczywiście zbędne. Mają one na celu jedynie ilustrowanie konstrukcji skali  $z$ .

Narysujemy teraz nomogram (rys. 66) do obliczania błędu średniego  $\sigma$  frekwencji udanych doświadczeń. Błąd ten oblicza się ze wzoru

$$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n},$$

gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczym doświadczeniu, a  $n$  jest liczbą niezależnych doświadczeń. Podobnie jak przy konstrukcji nomogramu siatkowego sporządzanego dla tego samego wzoru (rys. 52) przyjmujemy przedziały zmiennych

$$0 \leq p \leq 0,5, \quad 10 \leq n \leq 100.$$

Teraz tylko na osi  $\eta$  będziemy mieli skalę regularną  $\eta = \beta n$ . Zmienna  $p$  będzie miała na osi  $\xi$  skalę o równaniu  $\xi = \alpha p(1-p)$ . Skale te rysujemy na dwu prostych równoległych obierając dowolne moduły. Na rysunku 66 przyjęto  $\alpha = 25$  cm,  $\beta = 0,0625$  cm. Oś  $\zeta$  przechodzi przez początki osi  $\xi$  i  $\eta$ . Wprawdzie początek osi  $\eta$  nie jest narysowany na rysunku 66, bo interesujący nas przedział zmiennej  $n$  nie obejmuje zera, ale w naszym przypadku łatwo jest go wyekstrapolować. Skalę  $\sigma$  o równaniu  $\zeta = \frac{\lambda \sigma^2}{1 + \sigma^2}$

(na rys. 66  $\lambda \approx 7,85$  cm) narysowaliśmy w następujący sposób. Na lewej stronie osi  $\xi$  narysowana jest pomocnicza podziałka o równaniu  $\xi = \alpha x$ . Podziałka ta ułatwiła nam przedtem umieszczenie na tej osi skali  $p$ , obecnie zaś zrzutujemy ją z punktu na osi  $\eta$  na oś  $\zeta$  (tak jak na rys. 65)



uzyskując na tej ostatniej pomocniczą skalę rzutową o równaniu  $\zeta = \frac{\lambda s}{1+s}$ . Rysujemy teraz na osi  $\zeta$  właściwą skalę  $\sigma$  przyporządkowując koty  $\sigma$  punktom o kotach  $s = \sigma^2$  na skali pomocniczej. Skale pomocnicze i proste rzutowania po wykonaniu konstrukcji są oczywiście zbędne i należy je zetrzeć pozostawiając tylko właściwe skale.

Opisana powyżej metoda konstrukcji skali  $\zeta = \frac{\lambda \sigma^2}{1+\sigma^2}$  nie jest jedyną możliwą metodą. Skalę tę można także uzyskać przez rzutowanie skali kwadratowej. Jeżeli na osi  $\xi$  narysujemy pomocniczą skalę kwadratową o równaniu  $\xi = \gamma y^2$ , to rzutując ją na oś  $\zeta$  z odpowiednio obranego środka rzutowania na osi  $\eta$  otrzymamy szukaną skalę  $\zeta = \frac{\lambda \sigma^2}{1+\sigma^2}$ .

Obie konstrukcje skali  $\sigma$  mają wspólną wadę, są mało dokładne. Jeżeli więc zależy nam na dokładności nomogramu, to warto jest obrać nieco pracownią drogę bezpośredniego obliczania współrzędnych na podstawie równania skali. Oznaczając punkty skali według obliczonych współrzędnych możemy osiągnąć maksymalną dokładność nomogramu, na jaką pozwalają jego rozmiary.

Przy konstrukcji nomogramu typu  $N$  oś pochyłą  $\zeta$  prowadzimy przez początki osi równoległych. Gdybyśmy jednak chcieli narysować nomogram typu  $N$  dla równania (27) dla podanych tam przedziałów zmiennych, to okazałoby się, że początki osi równoległych leżałyby daleko poza właściwym rysunkiem. W tym przypadku musielibyśmy szukać innych sposobów wyznaczenia osi  $\zeta$ . Zauważmy na rysunku 64, że stosunek odcinków prostej  $l$  zawartych między osiami, które ta prosta przecina, równy jest stosunkowi współrzędnych punktów przecięcia z równoległymi osiami

$$(35) \quad \frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} = \frac{\xi}{\eta}.$$

Tak więc, łącząc odcinkami dwie pary punktów na osiach równoległych możemy na podstawie wzoru (35) znaleźć punkt przecięcia każdego z tych odcinków z osią  $\zeta$ . W ten sposób znajdziemy dwa punkty skali  $\zeta$ , a tym samym wyznaczymy jej położenie.

Nomogram typu  $N$  można narysować dla każdego równania postaci (33), jeżeli funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $h(z)$  spełniają wymienione wyżej założenia. Jeżeli ponadto funkcje występujące w równaniu (33) w rozważanych przedziałach są różne od zera, to przez logarytmowanie można doprowadzić równanie (33) do postaci (25) i narysować dla niego nomogram o trzech skalach równoległych.



Nomogram typu  $N$  można także narysować dla takich równań, które przez odpowiednie przekształcenie dadzą się sprowadzić do postaci (33). Tak np. można przez logarytmowanie — jeżeli jest ono wykonalne — sprowadzić do postaci (33) równanie

$$(36) \quad f(x) = [h(z)]^{g(y)}.$$

Dla tego równania można więc narysować nomogram typu  $N$ , jeżeli tylko w rozpatrywanych przedziałach funkcje  $f(x)$ ,  $g(y)$  i  $h(z)$  spełniają odpowiednie warunki.

Na początku paragrafu powołaliśmy się na zasadę dualizmu, na mocy której nomogramy kolineacyjne są dualnym odpowiednikiem prostoliniowych nomogramów siatkowych. Wynika stąd, że dla równania

$$(37) \quad F(x, y, z) = 0$$

można narysować nomogram kolineacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy można narysować prostoliniowy nomogram siatkowy, tj. gdy równanie (37) daje się sprowadzić do postaci

$$(38) \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że sprowadziliśmy już równanie (37) do postaci (38) i niech funkcje  $h_1(x)$ ,  $h_2(y)$ ,  $h_3(z)$  nie będą tożsamościowo równe zeru. Gdyby ostatnie założenie nie było spełnione, to można wyznacznik w równaniu (38) tak przekształcić, że po przekształceniu wyrazy trzeciej kolumny nie byłyby tożsamościowo równe zeru.

Dla takich wartości zmiennych  $x, y, z$ , dla których

$$h_1(x)h_2(y)h_3(z) \neq 0,$$

mamy

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = h_1(x)h_2(y)h_3(z) \begin{vmatrix} \frac{f_1(x)}{h_1(x)} & \frac{g_1(x)}{h_1(x)} & 1 \\ \frac{f_2(y)}{h_2(y)} & \frac{g_2(y)}{h_2(y)} & 1 \\ \frac{f_3(z)}{h_3(z)} & \frac{g_3(z)}{h_3(z)} & 1 \end{vmatrix}.$$



Jeżeli więc ograniczymy się do takich przedziałów zmiennych, że  $h_1(x)h_2(y)h_3(z) \neq 0$ , to równanie (38) jest równoważne równaniu

$$(39) \quad \begin{vmatrix} \frac{f_1(x)}{h_1(x)} & \frac{g_1(x)}{h_1(x)} & 1 \\ \frac{f_2(y)}{h_2(y)} & \frac{g_2(y)}{h_2(y)} & 1 \\ \frac{f_3(z)}{h_3(z)} & \frac{g_3(z)}{h_3(z)} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Trzy ustalone wartości zmiennych  $x, y, z$  wtedy i tylko wtedy spełniają równanie (39), gdy w dowolnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta$  (prostokątnym lub ukośnokątnym) i przy dowolnych modułach  $\alpha, \beta$  na osiach układu trzy punkty

$$(40) \quad \begin{aligned} \xi_1(x) &= \alpha \frac{f_1(x)}{h_1(x)}, & \eta_1(x) &= \beta \frac{g_1(x)}{h_1(x)}, \\ \xi_2(y) &= \alpha \frac{f_2(y)}{h_2(y)}, & \eta_2(y) &= \beta \frac{g_2(y)}{h_2(y)}, \\ \xi_3(z) &= \alpha \frac{f_3(z)}{h_3(z)}, & \eta_3(z) &= \beta \frac{g_3(z)}{h_3(z)} \end{aligned}$$

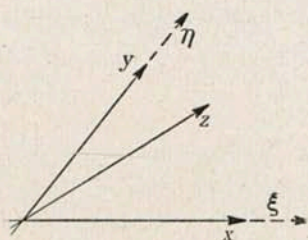
leżą na jednej prostej.

Gdy funkcje  $\xi_1(x), \eta_1(x), \xi_2(y), \eta_2(y), \xi_3(z), \eta_3(z)$  są ciągłe i ograniczone w rozpatrywanych przedziałach, to wzory (40) możemy traktować jako parametryczne równania trzech skal (na ogół krzywoliniowych) nomogramu kolineacyjnego dla równania (39), a więc także dla równania (38) przy ograniczeniu się do przedziałów zmiennych  $x, y, z$ , w których jest ono równoważne równaniu (39). Przez rozbicie przedziałów i odpowiednie transformacje rzutowe płaszczyzny możemy skonstruować nomogramy kolineacyjne dla dowolnego równania postaci (38) i dowolnych przedziałów.

Przy nomogramach kolineacyjnych, podobnie jak przy prostoliniowych nomogramach siatkowych, rozpatruje się te same postacie kanoniczne równań (37). Znane ich przedstawienia w postaci wyznacznikowej (38) pozwalają sporządzić bądź to prostoliniowy nomogram siatkowy, bądź też nomogram kolineacyjny. Można również klasyfikować nomogramy kolineacyjne ze względu na ich kształt i określać, dla jakich równań można narysować nomogram o danej postaci. W ten sposób omówiliśmy już dwa najprostsze typy nomogramów kolineacyjnych: nomogram o trzech skalach równoległych i nomogram typu  $N$ .



Dalszym typem nomogramu, który tu omówimy, będzie *nomogram o trzech skalach prostoliniowych przecinających się w jednym punkcie*. Niech będą dane trzy skale prostoliniowe zmiennych  $x, y, z$  przecinające się w jednym punkcie (rys. 67). Obierzmy ukośnokątny układ współrzędnych, którego osie  $\xi, \eta$  pokrywają się ze skalami zmiennych  $x$  i  $y$ . W układzie  $\xi, \eta$  skale zmiennych  $x, y, z$  można zapisać równaniami parametrycznymi



Rys. 67

$$(41) \quad \begin{aligned} \xi_1(x) &= \alpha f_1(x), & \eta_1(x) &= 0, \\ \xi_2(y) &= 0, & \eta_2(y) &= \beta f_2(y), \\ \xi_3(z) &= \alpha k f_3(z), & \eta_3(z) &= \beta l f_3(z), \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są modułami na skalach  $x$  i  $y$ , a stałe  $k$  i  $l$  zależą od modułu na skali  $z$  i kątów, jakie ta skala tworzy ze skalami  $x$  i  $y$ . Trzy skale o równaniach (41) tworzą nomogram kolineacyjny dla równania

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & 0 & 1 \\ 0 & f_2(y) & 1 \\ k f_3(z) & l f_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie to daje się zapisać w postaci

$$f_1(x)f_2(y) - k f_2(y)f_3(z) - l f_1(x)f_3(z) = 0.$$

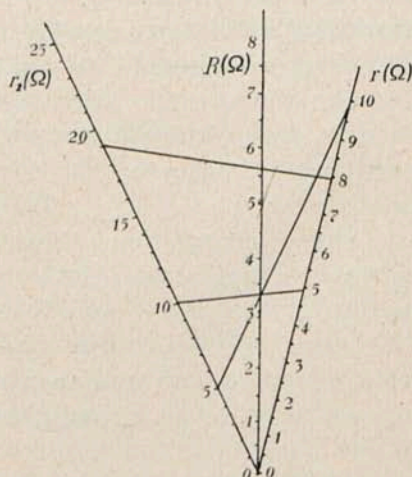
Dzieląc obustronnie ostatnie równanie przez iloczyn  $f_1(x)f_2(y)f_3(z)$  i przenosząc wyrazy ze znakiem minus na prawą stronę otrzymujemy

$$(42) \quad \frac{1}{f_3(z)} = \frac{k}{f_1(x)} + \frac{l}{f_2(y)}.$$

Widzimy więc, że nomogram o trzech skalach prostoliniowych przechodzących przez punkt można narysować dla dowolnego równania postaci (42), gdzie funkcje  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(z)$  są w rozpatrywanych przedziałach monotoniczne i ograniczone

W szczególności przy użyciu trzech skal regularnych można narysować nomogram (rys. 68) do obliczania oporu wypadkowego  $R$  dwóch oporów  $r_1$  i  $r_2$  połączonych równolegle

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$



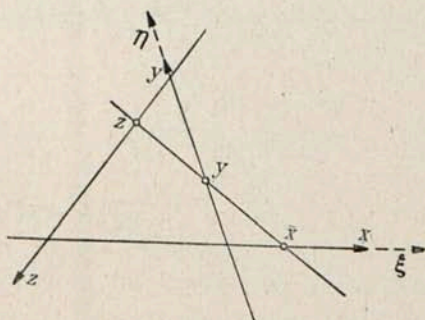
Rys. 68



Przyjmijmy np. przedziały  $0 \leq r_1 \leq 10 \Omega$ ,  $0 \leq r_2 \leq 25 \Omega$  i na dowolnych dwóch prostych narysujmy skale regularne zmiennych  $r_1, r_2$  o początkach w punkcie przecięcia skal i o dowolnych modułach  $\alpha, \beta$  (na rys. 68  $\alpha = 0,5 \text{ cm}/\Omega$ ,  $\beta = 0,25 \text{ cm}/\Omega$ ). Skala  $R$  ma początek we wspólnym punkcie przecięcia wszystkich trzech skal, więc do jej wyznaczenia trzeba znaleźć jeszcze jeden punkt tej skali. Znajdziemy go graficznie jako punkt przecięcia prostych łączących punkty o kotach  $r_1 = 5\Omega$ ,  $r_2 = 10\Omega$  oraz  $r_1 = 10\Omega$ ,  $r_2 = 5\Omega$ , którym odpowiada ta sama wartość  $R = \frac{10}{3}\Omega$ . Dla sprawdzenia odczytujemy z nomogramu przy  $r_1 = 8\Omega$ ,  $r_2 = 19\Omega$  wartość  $R \approx 5,6\Omega$ . Dokładny rachunek daje  $R = \frac{152}{27}\Omega \approx 5,63\Omega$ .

Do omówienia wszystkich możliwych przypadków nomogramu kolineacyjnego o wszystkich trzech skalach prostoliniowych pozostaje nam jeszcze do rozpatrzenia ten przypadek, gdy trzy skale prostoliniowe tworzą dowolny trójkąt (rys. 69).

Niech będą dane trzy skale prostoliniowe zmiennych  $x, y, z$ , tworzące dowolny trójkąt. Obierzmy na skalach cykliczne zwroty, umieśmy ich początki w trzech wierzchołkach trójkąta i przyjmijmy jako moduły skal długości boków trójkąta. Obieramy osie układu współrzędnych  $\xi, \eta$  pokrywające się ze skalami  $x$  i  $y$  oraz piszemy parametryczne równania skal w postaci



Rys. 69

$$\begin{aligned}
 \xi_1(x) &= \alpha[f_1(x) - 1], & \eta_1(x) &= 0, \\
 \xi_2(y) &= 0, & \eta_2(y) &= \beta f_2(y), \\
 \xi_3(z) &= -\alpha f_3(z), & \eta_3(z) &= \beta[1 - f_3(z)].
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Trzy skale prostoliniowe o równaniach (43) tworzą nomogram kolineacyjny dla równania

$$\begin{vmatrix} f_1(x) - 1 & 0 & 1 \\ 0 & f_2(y) & 1 \\ -f_3(z) & 1 - f_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu wyznacznika równanie to przybierze postać

$$f_1(x)f_2(y) - f_2(y) + f_2(y)f_3(z) - f_1(x) + f_1(x)f_3(z) + 1 - f_3(z) = 0.$$



Dzieląc obustronnie przez  $-f_1(x)f_2(y)f_3(z)$  i grupując wyrazy otrzymamy ostatecznie

$$(44) \quad \left(1 - \frac{1}{f_1(x)}\right) \left(1 - \frac{1}{f_2(y)}\right) \left(1 - \frac{1}{f_3(z)}\right) = 1.$$

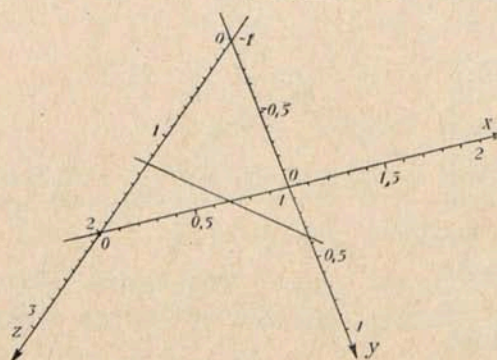
Tak więc dla równania (44), w którym funkcje  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(z)$  są w rozpatrywanych przedziałach monotoniczne i ograniczone, możemy narysować nomogram kolineacyjny o trzech skalach prostoliniowych tworzących dowolny trójkąt.

Narysujmy dla przykładu nomogram równania

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{2}{z}\right) = 1$$

dla  $0 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 3$ . W naszym przykładzie jest więc  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(y) = -y$ ,  $f_3(z) = z/2$  i wszystkie trzy zmienne mają skale

regularne. Obierając moduły skal  $\alpha = 2,5$  cm,  $\beta = 2$  cm,  $\gamma = 3$  cm rysujemy skale zmiennych na prostych tworzących trójkąt o bokach równych modułom  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  (rys. 70). Dla sprawdzenia konstrukcji odczytujemy z nomogramu dla  $z = 1,3$  i  $y = 0,36$  wartość  $x \approx 0,68$ . Obliczenie daje  $x \approx 0,67$ .



Rys. 70

Rozpatrzyliśmy cztery typy nomogramów o skalach prostoliniowych wyczerpujące wszystkie możliwości wzajemnych położień

trzech prostych. W wielu przypadkach będziemy mogli do danego równania

$$F(x, y, z) = 0$$

zastosować dwa, trzy, a nawet wszystkie cztery spośród omawianych tutaj typów prostoliniowych nomogramów kolineacyjnych. Tak np. dla równania

$$F_1(x) F_2(y) F_3(z) = 1$$

można narysować:

a) nomogram o trzech skalach równoległych podstawiając w równaniu (25)

$$f(x) = \log F_1(x), \quad g(y) = \log F_2(y), \quad h(z) = \log F_3(z),$$



przy założeniu, że w rozpatrywanych przedziałach zmiennych  $x, y, z$  funkcje  $F_1(x)$ ,  $F_2(y)$ ,  $F_3(z)$  możemy logarytmować;

b) nomogram typu  $N$  podstawiając w równaniu (33)

$$f(x) = \frac{1}{F_1(x)}, \quad g(y) = F_2(y), \quad h(z) = F_3(z),$$

przy założeniu, że  $F_1(x) \neq 0$ ;

c) nomogram o trzech skalach prostoliniowych przechodzących przez jeden punkt podstawiając w równaniu (42)

$$f_1(x) = \frac{1}{\log F_1(x)}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\log F_2(y)}, \quad f_3(z) = \frac{1}{\log F_3(z)},$$

przy założeniu, że w rozpatrywanych przedziałach zmiennych  $x, y, z$  funkcje  $F_1(x)$ ,  $F_2(y)$ ,  $F_3(z)$  są dodatnie i różne od jednościi;

d) nomogram o trzech skalach prostoliniowych tworzących trójkąt podstawiając w równaniu (44)

$$f_1(x) = \frac{1}{1 - F_1(x)}, \quad f_2(y) = \frac{1}{1 - F_2(y)}, \quad f_3(z) = \frac{1}{1 - F_3(z)},$$

przy założeniu, że  $F_1(x) \neq 1$ ,  $F_2(y) \neq 1$ ,  $F_3(z) \neq 1$ .

Wybierając któryś z wymienionych typów będziemy się kierowali względami prostoty i czytelności nomogramu. Z uwagi na omawiane w rozdziale VIII własności skali regularnej (łatwość konstrukcji i interpolacji, stałość błędu bezwzględnego) i skali logarytmicznej (stałość błędu względnego) wybierzemy, jeśli to jest możliwe, taki typ nomogramu, w którym te skale występują.

Nomogramy kolineacyjne o wszystkich trzech skalach prostoliniowych można narysować dla takiego i tylko takiego równania (37), które można sprowadzić do jednej z rozważanych postaci (25), (33), (42), (44). Dla równania (37), które nie spełnia tego warunku, lecz da się sprowadzić do postaci wyznacnikowej (38), możemy narysować nomogram kolineacyjny o skalach krzywoliniowych. Jest bardzo dużo różnych typów nomogramów kolineacyjnych o skalach krzywoliniowych. Ograniczymy się tutaj tylko do pokazania paru najprostszych przykładów.

Przyjmując dwie skale prostoliniowe na prostych równoległych i trzecią skalę krzywoliniową możemy narysować nomogram dla równania

$$(45) \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1(x) & 1 \\ 1 & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$



gdzie  $\eta = \beta g_1(x)$  jest równaniem skali  $x$  leżącej na osi  $\eta$ ,  $\eta = \beta g_2(y)$  jest równaniem skali  $y$  leżącej na prostej  $\xi = a$ , równoległej do osi  $\eta$ , a zmienna  $z$  ma skalę krzywoliniową o równaniu parametrycznym

$$\xi = \alpha f_3(z), \quad \eta = \beta g_3(z).$$

Po rozwinięciu wyznacznika równanie (45) przybiera postać

$$g_3(z) + g_1(x)f_3(z) - g_2(y)f_3(z) - g_1(x) = 0$$

i po dalszym przekształceniu

$$g_1(x) \frac{f_3(z) - 1}{g_3(z)} - g_2(y) \frac{f_3(z)}{g_3(z)} + 1 = 0.$$

Podstawiając w ostatnim równaniu

$$(46) \quad G_1(z) = \frac{f_3(z) - 1}{g_3(z)}, \quad G_2(z) = -\frac{f_3(z)}{g_3(z)}$$

otrzymujemy

$$(47) \quad g_1(x)G_1(z) + g_2(y)G_2(z) + 1 = 0.$$

Dla równania postaci (47) można więc narysować *nomogram kolineacyjny o dwu równoległych skalach prostoliniowych i trzeciej na ogół krzywoliniowej*<sup>1)</sup>.

Narysujmy dla przykładu *nomogram do obliczania pierwiastków rzeczywistych równania czwartego stopnia*

$$(48) \quad x^4 + px^2 + x + q = 0$$

dla współczynników  $p$  i  $q$  z przedziału  $[-10, 5]$ .

Zanim przystąpimy do wykonania nomogramu dla równania (48) zauważmy, że będziemy go mogli również używać do znajdowania pierwiastków takiego równania czwartego stopnia

$$(49) \quad a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

dla którego  $a_3 \neq 0$  albo  $a_1 \neq 1$ . Równanie to można bowiem w prosty sposób sprowadzić do postaci (48). Dokonajmy w tym celu w równaniu (49) podstawienia

$$(50) \quad z = ax + b.$$

Otrzymamy

$$\begin{aligned} & a^4 a_4 x^4 + a^3 (4ba_4 + a_3) x^3 + a^2 (6b^2 a_4 + 3ba_3 + a_2) x^2 + \\ & + a (4b^3 a_4 + 3b^2 a_3 + 2ba_2 + a_1) x + b^4 a_4 + b^3 a_3 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0 = 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Aby można było narysować taki nomogram, potrzebne są pewne założenia o funkcjach  $g_1(x)$ ,  $g_2(y)$ ,  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$ , których tutaj nie precyzujemy.



Dzielimy otrzymane równanie przez  $a^4 a_4$  i przyrównujemy jego współczynniki do współczynników równania (48)

$$\begin{aligned} \frac{1}{aa_4}(4ba_4 + a_3) &= 0, \\ \frac{1}{a^2 a_4}(6b^2 a_4 + 3ba_3 + a_2) &= p, \\ \frac{1}{a^3 a_4}(4b^3 a_4 + 3b^2 a_3 + 2ba_2 + a_1) &= 1, \\ \frac{1}{a^4 a_4}(b^4 a_4 + b^3 a_3 + b^2 a_2 + ba_1 + a_0) &= q. \end{aligned} \quad (51)$$

Z pierwszego i trzeciego równania układu (51) obliczamy współczynniki

$$b = -\frac{a_3}{4a_4}, \quad a = \left( \frac{4b^3 a_4 + 3b^2 a_3 + 2ba_2 + a_1}{a_4} \right)^{1/3} \quad (52)$$

takiego podstawienia liniowego (50), które równanie (49) sprowadza do postaci (48). Drugie i czwarte równanie układu (51) dają gotowe wzory na współczynniki  $p$  i  $q$  równania sprowadzonego do postaci (48).

Przystąpmy teraz do konstrukcji nomogramu dla równania (48). Dzielimy je obustronnie przez  $x^4 + x$  otrzymujemy równanie

$$p \frac{x}{x^3 + 1} + q \frac{1}{x^4 + x} + 1 = 0,$$

które ma postać (47) z tym, że role zmiennych  $x, y, z$  grają teraz odpowiednio zmienne  $p, q, x$ . Zmienne  $p, q$  będą więc miały równoległe skale regularne o tych samych modułach  $\beta$  i odległe jedna od drugiej o  $a$ , a zmienna  $x$  skalę krzywoliniową. Obierzmy układ współrzędnych  $\xi, \eta$  tak, by oś  $\xi$  przechodziła przez początki skal  $p$  i  $q$  oraz była skierowana od  $p$  do  $q$ , a oś  $\eta$  pokrywała się ze skalą współczynnika  $p$ . Skala  $x$  będzie miała w tym układzie równanie parametryczne

$$\xi = a f_3(x), \quad \eta = \beta g_3(x).$$

Funkcje  $f_3(x)$  i  $g_3(x)$  znajdziemy z układu równań (46), który w naszym przykładzie przybierze postać

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{f_3(x) - 1}{g_3(x)}, \quad \frac{1}{x^4 + x} = -\frac{f_3(x)}{g_3(x)}.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$f_3(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad g_3(x) = -\frac{x^4 + x}{1 + x^2}.$$



Skala zmiennej  $x$  ma więc równanie parametryczne

$$\xi = a \frac{1}{1+x^2}, \quad \eta = -\beta \frac{x^4+x}{1+x^2}.$$

Na rysunku 71 narysowany jest gotowy nomogram. Na skalach prostoliniowych przyjęto moduł  $\beta=1$  cm, odległość między nimi  $a=10$  cm. Skalę krzywoliniową zmiennej  $x$  narysowano obliczając z równań parametrycznych współrzędne jej punktów o danych kotach.

Dla przykładu znajdziemy z pomocą nomogramu 71 pierwiastki rzeczywiste równania

$$(53) \quad 2z^4 - 1,4z^3 - 12,2z^2 + 8,4z + 0,2 = 0.$$

Ze wzorów (52) obliczamy

$$b = 0,175, \quad a \approx \sqrt[3]{-2,078} \approx -1,276.$$

Z drugiego i czwartego równania układu (51) obliczamy następnie współczynniki

$$(54) \quad p = -3,86, \quad q = 0,24.$$

Łącząc punkty o takich kotach na skalach  $p$  i  $q$  linią prostą widzimy, że prosta ta przecina skalę  $x$  w czterech punktach. Równanie (48) o współczynnikach (54) ma więc cztery pierwiastki rzeczywiste

$$x_1 \approx -2,07, \quad x_2 \approx -0,15, \quad x_3 \approx 0,43, \quad x_4 \approx 1,80.$$

Równanie (53) ma więc także cztery pierwiastki

$$z_i = ax_i + b \approx -1,276x_i + 0,175 \quad (i=1,2,3,4).$$

Wykonując obliczenia otrzymujemy

$$z_1 \approx 2,82, \quad z_2 \approx 0,37, \quad z_3 \approx -0,37, \quad z_4 \approx -2,12.$$

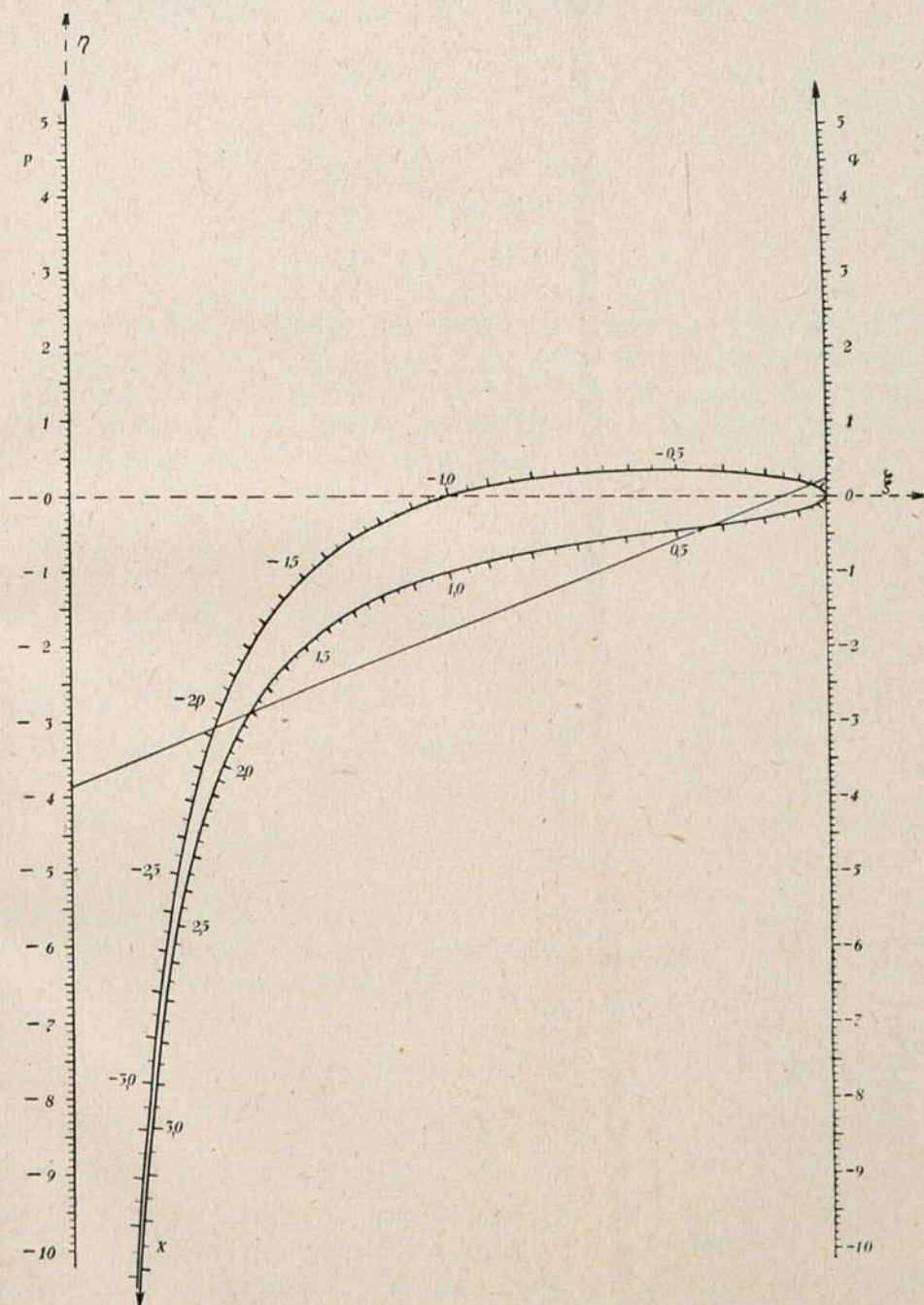
Przy omawianiu nomogramów siatkowych stwierdziliśmy, że równanie

$$(55) \quad \frac{f_1(x) + f_2(y)}{g_1(x) + g_2(y)} = f_3(z)$$

można zapisać w postaci wyznacznikowej

$$(56) \quad \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & -1 \\ f_3(z) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$





Rys. 71. Nomogram dla równania  $x^4 + px^2 + x + q = 0$



Dzieląc poszczególne wiersze wyznacznika (56) przez wyrazy drugiej kolumny otrzymamy w drugiej kolumnie same jedynki

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} & 1 & \frac{1}{g_1(x)} \\ \frac{f_2(y)}{g_2(y)} & 1 & \frac{-1}{g_2(y)} \\ f_3(z) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dla równania (55) będziemy więc mogli (przy odpowiednich założeniach o funkcjach  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $f_2(y)$ ,  $g_2(y)$ ,  $f_3(z)$ ) narysować nomogram kolineacyjny o dwu skalach krzywoliniowych zmiennych  $x$  i  $y$  oraz skali prostej zmiennej  $z$ . W dowolnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta$  parametryczne równania skal będą następujące:

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= a \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, & \eta_1(x) &= \beta \frac{1}{g_1(x)}, \\ (57) \quad \xi_2(y) &= a \frac{f_2(y)}{g_2(y)}, & \eta_2(y) &= -\beta \frac{1}{g_2(y)}, \\ \xi_3(z) &= a f_3(z), & \eta_3(z) &= 0. \end{aligned}$$

Narysujmy dla przykładu nomogram dla równania

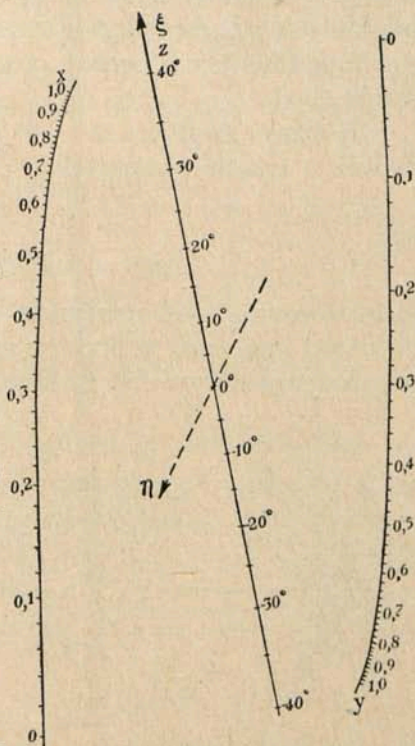
$$(58) \quad \operatorname{tg} z = \frac{x-y}{e^x + e^y}$$

dla  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

W nomogramie dla równania (58) parametryczne równania skal (57) przyjmą postać

$$\begin{aligned} \xi_1(x) &= a x e^{-x}, & \eta_1(x) &= \beta e^{-x}, \\ \xi_2(y) &= -a y e^{-y}, & \eta_2(y) &= -\beta e^{-y}, \\ \xi_3(z) &= a \operatorname{tg} z, & \eta_3(z) &= 0. \end{aligned}$$

Na rysunku 72 pokazany jest gotowy nomogram dla równania (58). Aby skale zmiennych  $x$  i  $y$  położone symetrycznie względem początku układu współrzędnych wypadły naprzeciwko siebie, obrano ukośnokątny układ współrzędnych  $\xi, \eta$ .



Rys. 72